Cagliari, 13/02/2026

Esame di MATEMATICA – CdL in FARMACIA

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ______________________________________

1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino l'ellisse di centro C (1; 1) e semiassi orizzontale *a* e verticale *b* di lunghezza pari a 4 e 3 rispettivamente, nonché la retta passante per i punti A (0; 5) e B (4; 1).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra l'ellisse e la retta.

2) Studio di funzione: Escursione termica (11 punti)

In una certa località, viene misurata la temperatura durante una giornata invernale. Le misurazioni partono nel momento in cui la temperatura supera i 0° C per interrompersi una volta che la temperatura scenda nuovamente sotto lo zero. La seguente funzione modellizza l'andamento della temperatura *T* (in gradi Celsius) in funzione del tempo (in ore):

$$T(t) = -kt \ln\left(\frac{t}{k}\right)$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Sapendo che il picco termico viene raggiunto dopo 2 ore, calcolare il valore di *k*. (4 punti)
b. Quanto vale la temperatura massima raggiunta? (1 punto)
c. Per quanto tempo viene misurata la temperatura? (1 punto)
d. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione *T(t)* e tracciarne il grafico preciso mediante uno studio per punti. (5 punti)

3) Calcolo integrale: Crescita di una popolazione batterica (9 punti)

Sia data la seguente funzione, che modellizza la velocità di crescita di una popolazione batterica (in milioni di unità) rispetto al tempo (in ore):

$$v(t) = \frac{2t + 2}{t^2 + 5t + 6}$$

a. Ricavare la formula che permette di calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo tempo ed in funzione del numero iniziale di batteri N_0. (5 punti)
b. Creare una tabella che mostri la variazione del numero di batteri presenti nel campione nelle prime 24 ore, con frequenza di campionamento (i.e. ogni quanto tempo si effettua ogni misurazione) non superiore alle 4 ore e per un numero iniziale di organismi pari a un milione. (2 punti)
c. Tracciare un grafico dei valori ottenuti al punto precedente. (2 punti)

4) Statistica: Tasso di natalità (5 punti)

La seguente tabella illustra il tasso di natalità, in termini di numero di figli per donna, e la popolazione, in milioni di abitanti, di tre Paesi europei:

Paesi	Italia	Spagna	Grecia
Popolazione [mln]	58.76	48.37	10.36
Tasso di natalità	1.25	1.19	1.43

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra la popolazione ed il tasso di natalità. (3 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)

FORMULE UTILI

Coefficienti retta di regressione lineare (generica): $m = \frac{\sigma_{XY}}{{\sigma_X}^2} \qquad q = \bar{y} - m\bar{x}$

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = 1 \quad y_C = 1 \qquad a = 4 \rightarrow a^2 = 16 \quad b = 3 \rightarrow b^2 = 9$$

$$x_A = 0 \quad y_A = 5 \qquad x_B = 4 \quad y_B = 1$$

SOLUZIONE

Equazione dell'ellisse:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \rightarrow 9x^2 + 16y^2 - 18x - 32y - 119 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow y = -x + 5$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 - 18x - 32y - 119 = 0 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$25x^2 - 146x + 121 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = 1 \\ x_{P2} = \dfrac{121}{25} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -x_P + 5$, facendo attenzione a cambiare di segno x_P:

$$\begin{cases} y_{P1} = 4 \\ y_{P2} = \dfrac{4}{25} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(1;\ 4)\ ,\ \mathrm{P}_2\left(\frac{121}{25};\ \frac{4}{25}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$T(t) = -kt\ \ln\left(\frac{t}{k}\right) \qquad T_0 = T_f = 0\,°C \qquad t_M = 2\,hr$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$T'(t) = -k\left[\ln\left(\frac{t}{k}\right) + t\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{t/_k}\right] = -k\left[\ln\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{t}{k}\cdot\frac{k}{t}\right]$$

$$\boldsymbol{T'(t) = -k\left[\ln\left(\frac{t}{k}\right) + 1\right]}$$

$$T'(t_M) = 0 \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{t_M}{k}\right) + 1 = 0 \;\rightarrow\; \frac{t_M}{k} = e^{-1} \;\rightarrow\; \frac{k}{t_M} = e \;\rightarrow\; k = e\cdot t_M$$

$$\boldsymbol{k = 2\,e\ \approx 5.44}$$

$$\boldsymbol{T(t) = -2e\,t\ \ln\left(\frac{t}{2e}\right) = 2e\,t\ \ln\left(\frac{2e}{t}\right)}$$

b)

$$T_M = T(t_M) = -4e\cdot\ln\left(\frac{2}{2e}\right) \;\rightarrow\; \boldsymbol{T_M = 4e \approx 10.87\,°C}$$

c)

$$T(t_f) = 0 \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{t}{2e}\right) = 0 \;\rightarrow\; \frac{t}{2e} = 1 \;\rightarrow\; \boldsymbol{t_f = k = 2e \approx 5.44\,hr = 5\,hr\ \ 26\,min\ \ 12s}$$

d)

$$\boldsymbol{T(t) = -2e\,t\ \ln\left(\frac{t}{2e}\right)\ \ con\ \ 0 \le t \le 2e}$$

- Dominio:

$$D\!: \forall t \in R \qquad (0 \le t \le 2e)$$

- Intersezioni con gli assi:

$$t = 0 \;\rightarrow\; T = T_0 = 0 \;\rightarrow\; P_0(0;0)$$

$$t = 2e \;\rightarrow\; T = T_f = 0 \;\rightarrow\; P_0(2e;0)$$

- Studio del segno:

$$T(t) > 0$$

$-2e\,t > 0 \quad \rightarrow \quad t < 0$

$\ln\left(\frac{t}{2e}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{t}{2e} > 1 \quad \rightarrow \quad t > 2e \quad (fuori\ dal\ dominio)$

$$\boldsymbol{T(t) > 0} \quad \rightarrow \quad 0 < t < 2e$$

- Comportamento asintotico agli estremi: NON RICHIESTO PERCHE' ESTERNO AL DOMINIO

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$\boldsymbol{T'(t) = -2e\left[\ln\left(\frac{t}{2e}\right) + 1\right]}$$

$$T'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2$$

$T'(t) > 0$

$-2e\left[\ln\left(\frac{t}{2e}\right) + 1\right] > 0 \quad \rightarrow \quad -\ln\left(\frac{t}{2e}\right) - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad -\ln\left(\frac{t}{2e}\right) > 1 \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{2e}{t}\right) > 1 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \frac{2e}{t} > e \quad \rightarrow \quad \frac{2}{t} > 1 \quad \rightarrow \quad t < 2$

$$\boldsymbol{T'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < t < 2}$$

- Studio della derivata seconda:

$T''(t) = -2e\,\frac{1}{t/_{2e}} \cdot \frac{1}{2e} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{T''(t) = -\frac{2e}{t}}$

$T''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \nexists t \in R$

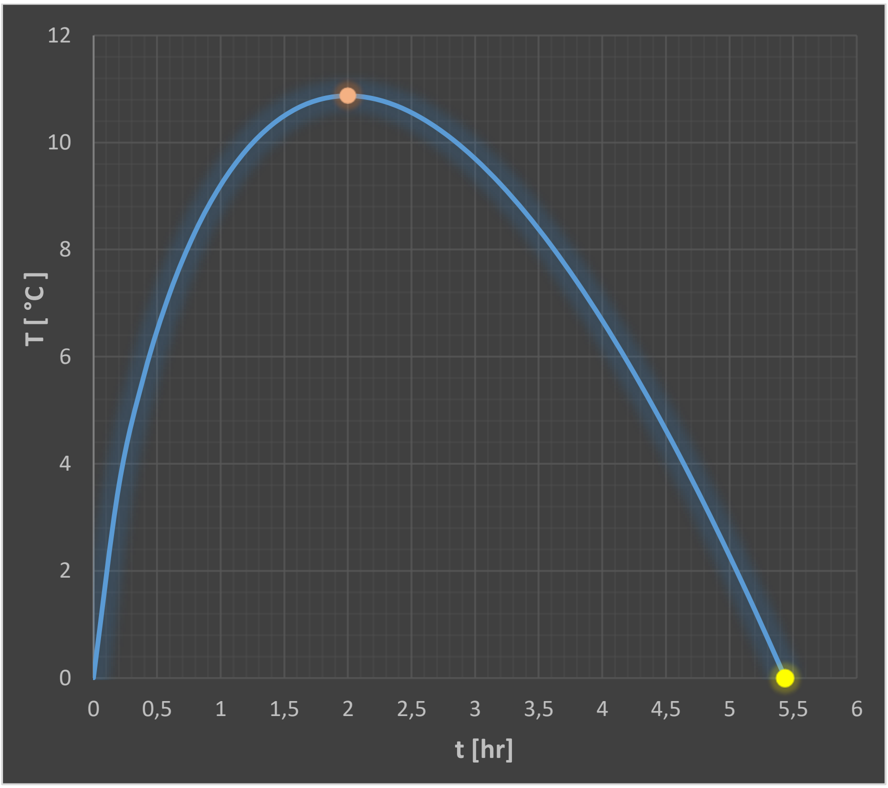
$T''(t) > 0 \quad \rightarrow \quad \nexists t \in [0; 2e]$

<u>La derivata seconda è sempre negativa all'interno del dominio. Perciò la funzione sarà sempre a concavità negativa.</u>

- Studio per punti:

$$T(t) = -2e\, t\, \ln\left(\frac{t}{2e}\right) \quad con\ \ 0 \leq t \leq 2e$$

t [hr]	N
0	0
0.2	3.59
0.4	5.67
0.6	7.19
0.8	8.33
1	9.20
1.2	9.86
1.4	10.33
1.6	10.64
1.8	10.82
2	**10.87**
2.2	10.82
2.4	10.67
2.6	10.43
2.8	10.10
3	9.70
3.2	9.22
3.4	8.68
3.6	8.07
3.8	7.40
4	6.67
4.2	5.89
4.4	5.06
4.6	4.18
4.8	3.25
5	2.28
5.2	1.26
5.4	0.20
5.437	**0**



3) INTEGRALE

$$v(t) = \frac{2t+2}{t^2+5t+6}$$

a)

Per calcolare il numero di batteri sviluppati fino ad un certo momento t_x, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e t_x e tener conto della popolazione iniziale N_0 che è data in <u>milioni di unità</u>:

$$N(t) = N_0 + \int_0^{t_x} v(t)\,dt$$

$$\frac{2t+2}{t^2+5t+6} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+3} = \frac{(A+B)t+3A+2B}{(t+2)(t+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+2B=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=4 \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{4}{t+3} - \frac{2}{t+2}$$

$$N(t) = N_0 + \int_0^{t_x} v(t)\,dt = N_0 + \int_0^{t_x} \left(\frac{4}{t+3} - \frac{2}{t+2}\right)\,dt =$$

$$= N_0 + [4\ln(t+3) - 2\ln(t+2) + c]_0^{t_x}$$

$$N(t) = N_0 + 4\ln(t_x+3) - 2\ln(t_x+2) - 4\ln 3 + 2\ln 2$$

$$\boldsymbol{N(t) = N_0 + 4\ln(t_x+3) - 2\ln(t_x+2) - 3}$$

In alternativa:

$$N(t) = N_0 + 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] + 2\ln\frac{2}{9}$$

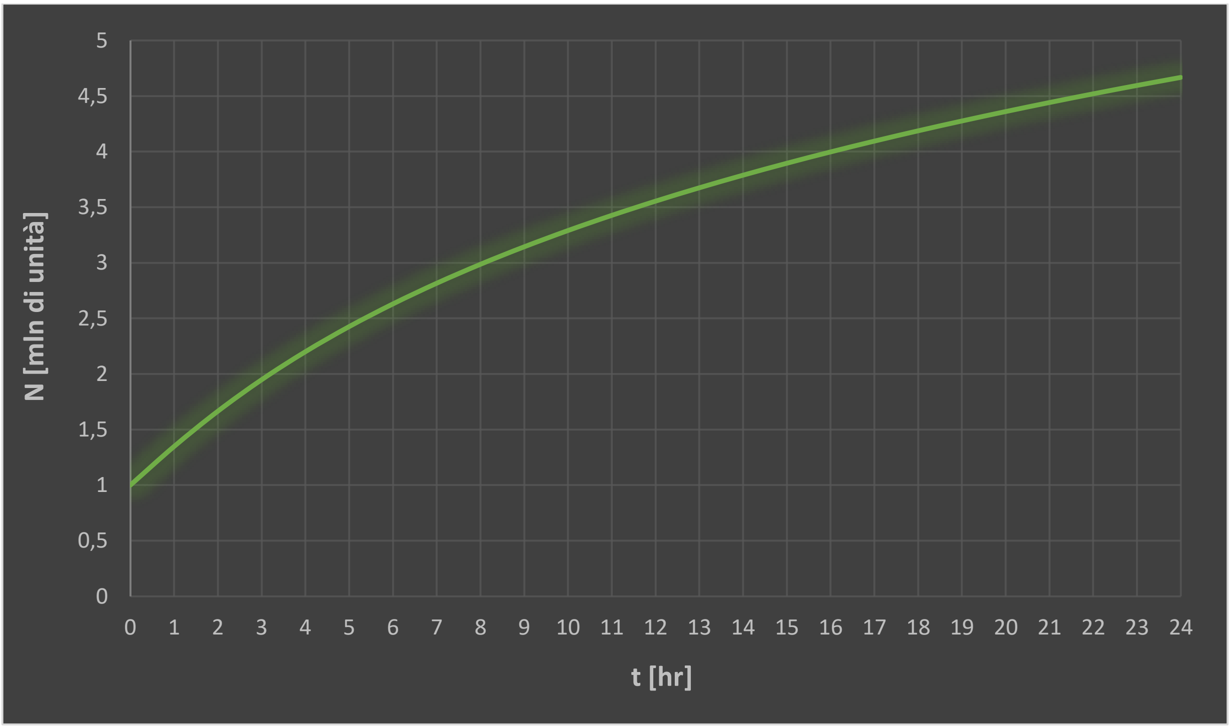
$$\boldsymbol{N(t) = N_0 + 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] - 3}$$

b)

Se il numero iniziale di batteri è pari ad un milione, ricordando che *N* è dato in milioni di unità:

$$\boldsymbol{N(t) = 1 + 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] - 3 = 2\ln\left[\frac{(t_x+3)^2}{t_x+2}\right] - 2}$$

t [hr]	N [mln]
0	1.00
4	2.20
8	2.99
12	3.55
16	4.00
20	4.36
24	4.67



4) STATISTICA

Paesi	Italia	Spagna	Grecia
Popolazione [mln]	58.76	48.37	10.36
Tasso di natalità	1.25	1.19	1.43

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

Dati	Media	Varianza campionaria	Dev Std campionaria
Popolazione [mln]	39.16	649.21	25.48
Tasso di natalità	1.29	0.0156	0.125

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N - 1} = -2.87$$

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = -0.901$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono inversamente correlate (il tasso di natalità sembrerebbe essere maggiore nei Paesi con popolazione minore).

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = -0.004\, x + 1.46}$$