

---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA  
**Metodi Matematici della Fisica - A.A. 2024/2025**  
SESTO APPELLO - 06/02/2026

---

**Esercizio 1.** Calcola con metodi complessi il seguente integrale, seguendo i passaggi indicati:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 - 4 \sin \theta} d\theta$$

- individua, con opportuno cambio di variabile, la funzione complessa  $f(z)$  da utilizzare
- trova le singolarità di  $f(z)$  al finito e calcola i residui rilevanti per l'integrale  $I$
- scrivi i primi due termini della serie di Taylor-Laurent intorno alle singolarità considerate

**Esercizio 2.** Data la funzione

$$f(x) = x^3 \quad \text{per } -\pi \leq x \leq \pi,$$

- scrivi lo sviluppo in serie di Fourier di  $f(x)$  nell'intervallo indicato
- considerando  $f(\pi/2)$ , e sfruttando la serie di Leibniz  $\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ , calcola il valore dell'altra serie notevole che compare nello sviluppo

**Esercizio 3.** Determina le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni:

- $f(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+3)}$
- $f(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}$

**Esercizio 4.** Indicando con  $|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle$  una terna ortonormale in  $\mathbb{C}^3$ , l'operatore  $A$  è definito da:

$$\begin{aligned} A|e_1\rangle &= 2|e_1\rangle, \\ A|e_2\rangle &= |e_2\rangle + i|e_3\rangle, \\ A|e_3\rangle &= i|e_2\rangle + |e_3\rangle. \end{aligned}$$

- Scrivi  $A$  in forma matriciale
- Trova gli autovalori  $\lambda_{1,2,3}$  e i relativi autovettori  $|v_{1,2,3}\rangle$
- Considera il vettore  $|w\rangle = 3|e_1\rangle + 2|e_2\rangle - i|e_3\rangle$  e calcola  $A|w\rangle$  sia per azione diretta sia esprimendo  $|w\rangle$  come combinazione lineare di  $|v_{1,2,3}\rangle$  (verificando che si ottiene lo stesso risultato)