
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
CORSO DI LAUREA IN FISICA
Metodi Matematici della Fisica - A.A. 2024/2025
APPELLO STRAORDINARIO - 01/12/2025

Esercizio 1. Calcola con metodi complessi il seguente integrale, seguendo i passaggi indicati:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta + \cos \theta}$$

- individua, con opportuno cambio di variabile, la funzione complessa $f(z)$ da utilizzare
- trova le singolarità di $f(z)$ al finito e calcola i residui rilevanti per l'integrale I
- scrivi i primi due termini della serie di Taylor-Laurent intorno ai punti singolari, specificando il raggio di convergenza

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x) = |x| - \pi \quad \text{per} \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

- scrivi lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$ nell'intervallo indicato
- considerando $f(0)$, calcola il valore della serie notevole che ne deriva

Esercizio 3. Utilizzando le proprietà note, determina l'antitrasformata di Fourier delle seguenti funzioni

- $F(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - a^2}$
- $F(\omega) = \omega e^{-\omega^2}$

Esercizio 4. Indicando con $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle$ una terna ortonormale in \mathbb{C}^3 , l'operatore A è definito da:

$$\begin{aligned} A|v_1\rangle &= |v_1\rangle, \\ A\left(\frac{|v_2\rangle + |v_3\rangle}{\sqrt{2}}\right) &= |v_2\rangle, \\ A\left(\frac{|v_2\rangle - |v_3\rangle}{\sqrt{2}}\right) &= |v_3\rangle. \end{aligned}$$

- Scrivi A in forma matriciale e determina di che matrice si tratta
- Ricava autovalori e autovettori normalizzati di A
- Determina l'espressione matriciale di A^n con $n \in \mathbb{N}$