

---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA  
**Metodi Matematici della Fisica - A.A. 2024/2025**  
SECONDA PROVA PARZIALE - 05/06/2025

---

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

- determinare la trasformata di Fourier  $g(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$
- determinare l'antitrasformata di Fourier della funzione  $e^{-i\omega a} g(\omega)$  (con  $a$  reale)

**Esercizio 2.** Sia dato uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione 3 sul campo complesso. Sia  $\{|e_i\rangle\}$  con  $i = 1, 2, 3$ , la base ortonormale canonica di  $V$  e sia dato un operatore  $A$  definito dalla sua azione sulla base,

$$\begin{aligned} A|e_1\rangle &= 3\gamma|e_3\rangle \\ A|e_2\rangle &= i\beta|e_1\rangle + 2i|e_3\rangle \\ A|e_3\rangle &= i|e_1\rangle + \alpha|e_2\rangle \end{aligned}$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  (porre le fasi a zero).

- Determinare la rappresentazione matriciale dell'operatore  $A$  nella base  $\{|e_i\rangle\}$
- Determinare  $\alpha, \beta, \gamma$  in modo che la matrice  $A$  sia Hermitiana.
- Determinare autovalori e autovettori normalizzati, verificare l'ortogonalità degli autovettori.
- Determinare la matrice che esegue il cambiamento di base e verificarne l'unitarietà.

**Esercizio 3.** Si consideri l'operatore

$$P = -ib \frac{d}{dx}$$

che agisce nello spazio delle funzioni  $L^2(0, b)$ .

- Determinare gli autovalori e una base completa di autovettori  $u_n(x)$  di  $P$  in  $L^2(0, b)$  con condizioni al contorno antiperiodiche  $u(0) = -u(b)$  e normalizzare le autofunzioni.
- Dopo aver posto  $b = \pi$ , data la funzione

$$f(x) = A$$

determinare i coefficienti del suo sviluppo nella base delle autofunzioni dell'operatore  $P$  e verificare la relazione di completezza, servendovi del risultato noto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$