

---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA  
**Metodi Matematici della Fisica - A.A. 2024/2025**  
QUARTO APPELLO - 14/07/2025

---

**Esercizio 1.** Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{3z + 1}{z(z - 1)^3}$$

- individua le singolarità al finito e il comportamento nel punto all'infinito, e calcola i relativi residui
- calcola l'integrale della funzione  $f(z)$  lungo una circonferenza di raggio 2, e mostra che il risultato non cambia se il verso di percorrenza è orario o antiorario
- ricava i primi 3 termini della serie di Taylor-Laurent intorno a  $z = 1$ .

**Esercizio 2.** Considerando il prolungamento periodico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < -\pi/2 \\ +1 & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

- ricava la serie di Fourier in termini di seni e coseni
- calcola il valore della serie in  $x = \pi/2$
- ricava la somma della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

**Esercizio 3.** Sapendo che  $\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ , calcola la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-2|t|} \cos(t) \\ f(t) &= e^{-3|t|} \sin(2t) \end{aligned}$$

**Esercizio 4.** Considera la seguente famiglia di matrici ( $\eta \in \mathbb{C}$ )

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \eta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determina i valori di  $\eta$  tali che  $A$  sia diagonalizzabile
- Determina i valori di  $\eta$  tali che  $A$  abbia un sistema ortonormale completo