

28 gennaio 2026

Cognome Nome: _____

Matricola: _____

Fogli aggiunti escluso il presente _____

Docente: _____

1) Data la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Determinare: dominio, simmetrie, intersezioni, positività, studio agli estremi, asintoti, studio della derivata prima. Classificare eventuali punti di discontinuità e non derivabilità. Tracciare il grafico.

2) (Teoria) Definizione di funzione infinitesima e confronto fra funzioni infinitesime. Utilizzando il confronto fra infinitesimi calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x) + \sin(3x) + x^2}{e^{2x} + x \operatorname{tg}(x) - \cos x}$$

3) Calcolare l'area compresa tra la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

e l'asse delle x , nell'intervallo $x \in [-1, 0]$

4) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

5) (Teoria) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle. Dire se è applicabile alla funzione

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \text{ nell'intervallo } [-1, 1]$$

ed eventualmente determinare il punto o i punti che soddisfano il teorema

Svolgimento

Esercizio 1

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

a) Dominio

La funzione $\arctg(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tuttavia, in questo caso abbiamo come argomento della funzione una frazione per cui occorre imporre il denominatore diverso da zero, ossia:

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

in definitiva il dominio sarà $\forall x \in \mathbb{R}: x \neq -1$

b) Simmetrie

Il dominio non è simmetrico per cui la funzione non ammette simmetrie

c) Intersezioni con gli assi

- Asse x

$$f(x) = 0 \Rightarrow \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Punto: $(1, 0)$

- Asse y

$$f(0) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Punto: $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$

d) Studio agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \arctg\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \arctg\left(\frac{-2}{0^+}\right) = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg\left(\frac{x}{x}\right) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg\left(\frac{x}{x}\right) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$y = \frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale

$x = -1$ punto di discontinuità di prima specie (salto)

e) Studio della derivata prima

$$f'(x) = \frac{\frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2}}{1 + \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} \frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)} = \frac{2}{2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Non esistono punti stazionari in quanto il numeratore è sempre diverso da zero.

$f'(x) > 0$ sempre perché numeratore e denominatore sono sempre positivi.

f) Derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

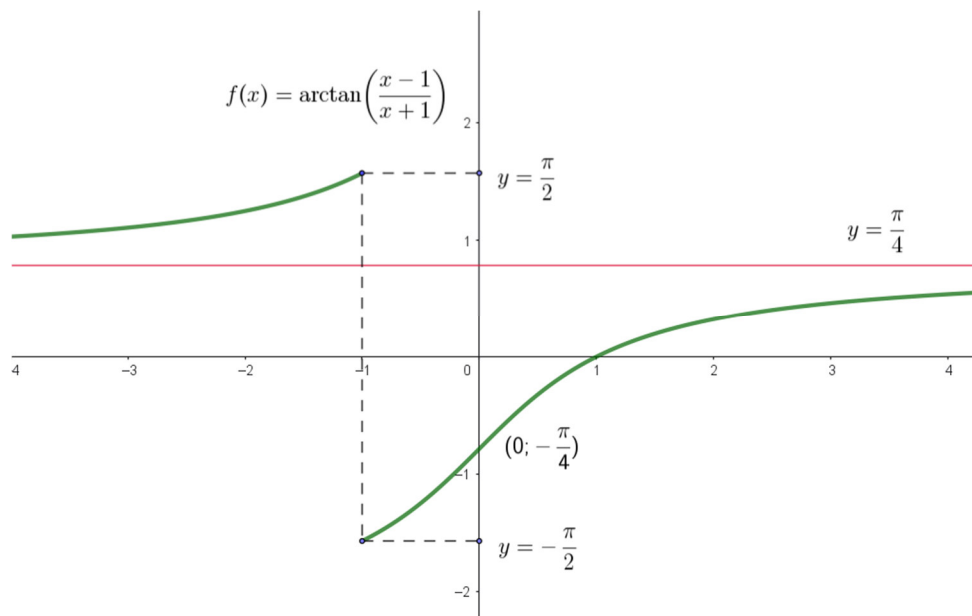
$f''(x) > 0$ per $x < 0$, la funzione è convessa

$f''(x) < 0$ per $x > 0$, la funzione è concava

Punto di flesso per

$$x = 0 \Rightarrow \left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$$

g) Grafico della funzione



Esercizio 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x) + \sin(3x) + x^2}{e^{2x} + x \operatorname{tg}(x) - \cos x}$$

Al denominatore si aggiunge e toglie 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x) + \sin(3x) + x^2}{e^{2x} + x \operatorname{tg}(x) - \cos x + 1 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x) + \sin(3x) + x^2}{e^{2x} - 1 + x \operatorname{tg}(x) + 1 - \cos x}$$

Al numeratore

$\ln(1+5x) \sim 5x$ infinitesimo del primo ordine

$\sin(3x) \sim 3x$ infinitesimo del primo ordine

x^2 infinitesimo del II ordine. Posso trascurarlo rispetto agli altri 2 termini

Al denominatore

$e^{2x} - 1 \sim 2x$ infinitesimo del primo ordine

$x \operatorname{tg}(x) \sim x^2$ infinitesimo del II ordine

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ infinitesimo del II ordine.

Posso trascurare gli ultimi due termini in quanto sono infinitesimi di ordine superiore.

Per cui si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x) + \sin(3x) + x^2}{e^{2x} - 1 + x \operatorname{tg}(x) + 1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + 3x}{2x} = \frac{8x}{2x} = \boxed{4}$$

Esercizio 3

Per poter calcolare l'area compresa tra la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ e l'asse delle x

occorre studiare il segno della funzione

$$f(x) > 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 + 2x - 3} > 0$$

Il segno della funzione dipende dal segno del denominatore, il quale è negativo per

$$-3 < x < 0 \cup x > 1$$

La funzione è negativa nell'intervallo d'integrazione, $x \in [-1, 0]$, per cui l'area sarà data da:

$$\text{Area} = - \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

L'integrale si risolve scomponendo la frazione in fratti semplici

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$
$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

affinché l'equazione sia soddisfatta deve essere:

$$1 = A(x+3) + B(x-1)$$

dalla quale si ricava:

$$A = \frac{1}{4} \text{ e } B = -\frac{1}{4}$$

Per cui

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right)$$

$$Area = - \int_{-1}^0 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} dx = - \frac{1}{4} [\ln|x-1| - \ln|x+3|]_{-1}^0$$

$$Area = - \frac{1}{4} \left[\ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \right]_{-1}^0 = - \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{-1}{3} \right| - \ln \left| \frac{-2}{2} \right| \right) = - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{4} \ln 3}$$

Esercizio 4

Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli

Per Bernoulli dividiamo tutto per y^3

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{y}{x y^3} = x^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{1}{x y^2} = x^2$$

Poniamo $z = y^{-2}$ e differenziamo

$$z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y^{-3}y' = -\frac{1}{2}z'$$

Sostituzione nell'equazione

$$-\frac{1}{2}z' + xz = x^2 \Rightarrow \boxed{z' - \frac{2}{x}z = -2x^2}$$

In questo modo si ottiene un'equazione differenziale in z . Applicando la formula risolutiva

$$z(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int -2x^2 \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right]$$

$$z(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[\int -2x^2 \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right]$$

$$z(x) = e^{2\ln x} \left[\int -2x^2 \cdot e^{-2\ln x} dx + C \right] = e^{\ln x^2} \left[\int -2x^2 \cdot e^{\ln x^{-2}} dx + C \right]$$

Nell'integrale non è stato considerato il valore assoluto in quanto si sta studiando il problema di Cauchy nel punto $x = 1 > 0$

$$z(x) = x^2 \left[\int -2x^2 \cdot x^{-2} dx + C \right] = x^2 \left[\int -2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} dx + C \right] = x^2 \left[\int -2 dx + C \right]$$

$$\boxed{z(x) = x^2(-2x + C)}$$

Ma poiché $z = y^{-2}$ si ricava:

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2(-2x + C)}}$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(1) = 1$ si ricava

$$1 = \frac{1}{\sqrt{C-2}} \Rightarrow C - 2 = 1 \Rightarrow C = 3$$

N.b. si considera solo la parte positiva in quanto la $y = 1 > 0$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 2x^3}}$$

Esercizio 5

Vogliamo verificare se il Teorema di Rolle è applicabile alla funzione

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \text{ nell'intervallo } [-1,1]$$

Condizioni del teorema di Rolle

Il teorema di Rolle afferma che:

Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in $x \in (a, b)$ e $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Quindi dobbiamo verificare tre condizioni:

- a) Continuità $x \in [-1,1]$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

Il logaritmo è definito per $x^2 + 1 > 0$, sempre vero in quanto l'argomento è formato dalla somma quantità sempre positive.

La funzione è continua su tutto \mathbb{R} e in particolare su $x \in [-1,1]$

- b) Derivabilità su $x \in (-1,1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Anche la derivata prima è definita su tutto \mathbb{R} e in particolare su $x \in (-1,1)$

- c) Valori agli estremi

$$f(-1) = \ln((-1)^2 + 1) = \ln(2)$$

$$f(1) = \ln(1^2 + 1) = \ln(2)$$

Quindi $f(-1) = f(1)$

Tutte e tre le condizioni sono soddisfatte, quindi il Teorema di Rolle è applicabile.

Determiniamo il punto che soddisfa il teorema $f'(x_0) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x_0 = 0$ appartiene all'intervallo $(-1,1)$ ed è il punto che soddisfa il teorema di Rolle.

28 gennaio 2026

Cognome Nome: _____

Matricola: _____

Fogli aggiunti escluso il presente _____

Docente: _____

1) Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

Determinare: dominio, simmetrie, intersezioni, positività, studio agli estremi, asintoti, studio della derivata prima. Classificare eventuali punti di discontinuità e non derivabilità. Tracciare il grafico.

2) Studiare la convergenza della successione

$$a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

3) Calcolare e discuterne la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

4) (Teoria) Definizione di: equazione differenziale di ordine n , integrale generale, integrale particolare e singolare. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = (2x - 1)e^x$$

5) (Teoria) Definizione di funzione continua e derivabile in un punto x_0

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- studiare la continuità e la derivabilità in $x = 0$.
- verificare se è possibile applicare il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 1]$ ed eventualmente determinare il punto o i punti che lo soddisfano.

Svolgimento

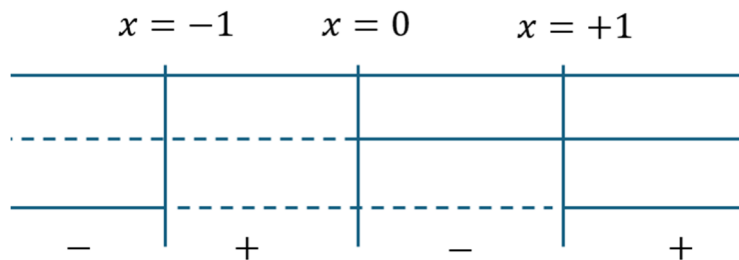
Esercizio 1

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x}$$

a) Dominio

Trattandosi di una radice con indice pari occorre imporre il radicando maggiore o uguale a zero, ossia

$$x^3 - x \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) \geq 0$$



dalla quale si ricava che la funzione è definita per

$$x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

b) Simmetrie

Non esistono simmetrie in quanto il dominio non è simmetrico

c) Intersezioni con gli assi

- Asse x:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1$$

Tutti i punti al dominio

Punti: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$

- Asse y:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \sqrt{0 - 0} = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

d) Positività

La funzione è sempre non negativa perché radice con indice pari:

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in D$$

Studio agli estremi

$f(-1) = f(0) = f(1)$ calcolati in precedenza al punto (c)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x} = \sqrt{+\infty - \infty}$ si tratta di una forma indeterminata ma trascurando gli infiniti di

ordine inferiore si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali e verticali.

Non esistono asintoti obliqui in quanto

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x}}{x} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{x} = +\infty$$

In quanto il numeratore ha ordine di infinito maggiore rispetto al denominatore

e) Studio della derivata prima

$$f(x) = (x^3 - x)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 - 1)}{2\sqrt{x^3 - x}}$$

La derivata prima è definita in tutti i punti del dominio ad eccezione di quelli che annullano il denominatore, ossia:

$$x^3 - x \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq -1, x_2 \neq 0, x_3 \neq 1.$$

Questi sono punti a tangente verticale in quanto la derivata prima tende a infinito.

Segno della derivata

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}} \geq 0$$

Denominatore sempre > 0 ; vanno esclusi i punti $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

Numeratore si annulla per: $3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

solo il punto $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ appartiene al dominio, il punto $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ deve essere scartato

Positività della derivata prima

Denominatore sempre > 0 , questo significa che il segno della frazione dipende dal segno del numeratore.

Numeratore zero: $3x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \cup x > +\frac{1}{\sqrt{3}}$

La funzione è crescente per $\boxed{-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \cup x > 1}$

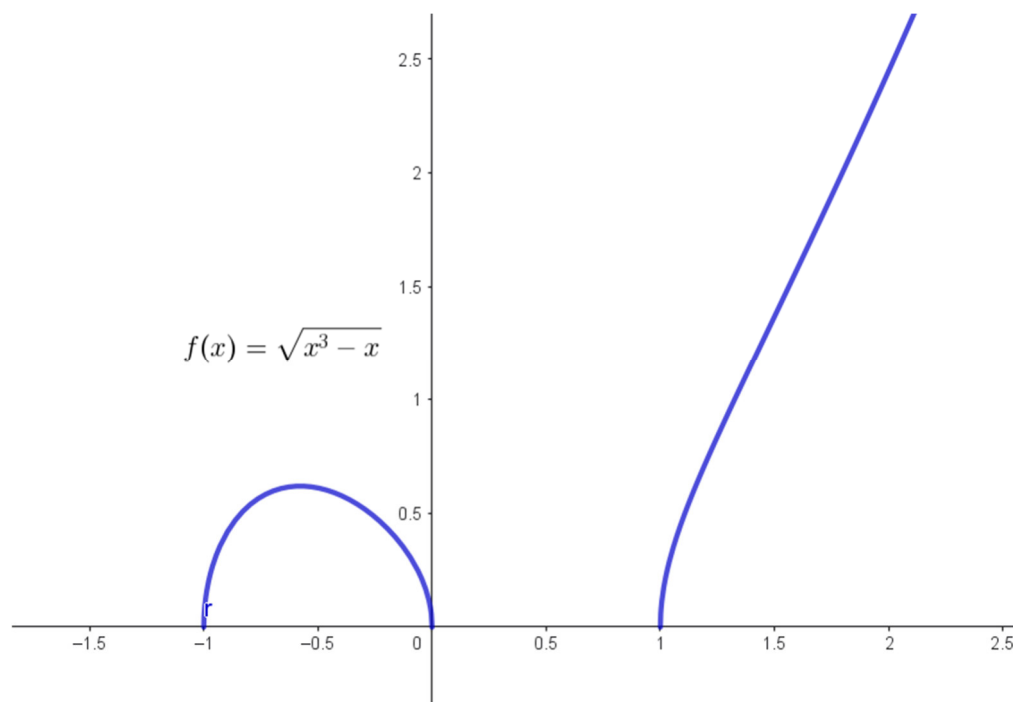
$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di massimo relativo nel quale la funzione assume il valore

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ sono punti di minimo relativo e assoluto.

La funzione non ammette massimo assoluto.

f) Grafico



Per $x \rightarrow +\infty$ la funzione è asintoticamente equivalente a $x^{3/2}$ e la concavità è rivolta verso l'alto, per cui per $x > 1$ è presente un flesso.

Esercizio 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n) \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n^2 + 1 - n^2)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + n} = \frac{1}{2}$$

N. b. Per $n \rightarrow +\infty$, si ha che $\sqrt{n^2 + 1} \sim n$, non si considera il valore assoluto perché n assume valori positivi

Esercizio 3

Si tratta di un integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} x e^{-x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} [-(x+1)e^{-x}]_0^{\beta} =$$
$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} -(\beta+1)e^{-\beta} + (0+1)e^{-0} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} -\frac{(\beta+1)}{e^{\beta}} + (0+1)e^{-0} = 0 + 1 = 1$$
$$\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1}$$

Esercizio 4

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale:

$$y'' - 4y' + 4y = (2x - 1)e^x$$

Equazione omogenea

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ con molteplicità doppia}$$

Soluzione dell'omogenea

$$\boxed{y_0 = (C_1 + C_2x)e^{2x}}$$

Soluzione particolare

Il termine noto $b(x) = (2x - 1)e^x$

Poiché $\gamma = 1$ non è radice dell'omogenea, la soluzione particolare ha la seguente forma:

$$\bar{y} = (Ax + B)e^x$$

Deriviamo 2 volte:

$$\bar{y}' = (Ax + A + B)e^x, \quad \bar{y}'' = (Ax + 2A + B)e^x$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{y}'' - 4\bar{y}' + 4\bar{y} &= (Ax + 2A + B - 4(Ax + A + B) + 4(Ax + B))e^x \\ &= (Ax + (-2A + B))e^x \end{aligned}$$

Confrontando con $(2x - 1)e^x$ si ricavano i coefficienti A e B :

$$A = 2, -2A + B = -1 \Rightarrow B = 3$$

Soluzione Particolare

$$\boxed{\bar{y} = (2x + 3)e^x}$$

Soluzione generale completa

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (2x + 3)e^x}$$

Esercizio 5

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a) Verifichiamo la continuità in $x = 0$ e calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

È una forma indeterminata $0 \cdot (-\infty)$ che possiamo riscrivere come:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = 0$$

In quanto $\ln x$, tende a infinito più lentamente rispetto al denominatore $1/x^2$.

La funzione è continua.

b) Verifichiamo la derivabilità in $x = 0$

Definiamo la derivata:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \ln h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \ln h$$

Ancora una forma $0 \cdot (-\infty)$ che possiamo riscrivere come

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \ln h = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln h}{1/h} = 0$$

$\ln h$ ha ordine di infinito inferiore rispetto al denominatore $1/h$.

Quindi f è derivabile in 0 con:

$$f'(0) = 0$$

Applicazione del Teorema di Lagrange

Teorema di Lagrange: se f è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) , allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange per cui si può determinare il punto x_0 che soddisfa il teorema

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1^2 \ln 1 - 0}{1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x^2 \ln x) = 2x \ln x + x$$

Per cui applicando il teorema si ottiene

$$2x \ln x + x = 0 \Rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = e^{-1/2}$$

$x_0 = e^{-1/2}$ è l'unico punto che soddisfa il teorema in quanto appartiene all'intervallo $(0; 1)$