Corso di Laurea Magistrale in Matematica Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - Soluzioni (19/01/2026)
(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.
i) Calcolare l'integrale $\int_\Gamma f(z)\,dz$, *dove* $f(z) = \frac{1}{(3z-1)^2}$ *e dove* Γ *è la curva (percorsa in senso antiorario) costituita (nell'ordine) dall'unione del segmento di estremi l'origine* O *e il punto* $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, *dall'arco di circonferenza ci centro* O *e raggio 2 congiungente* z_0 *e il punto* $z_1 = 2e^{i\pi}$, *e dal tratto di asse reale dal punto* z_1 *all'origine. Trovare il risultato in due modi diversi, uno dei quali deve essere il calcolo diretto lungo la curva assegnata (**8 punti**).*

La funzione $f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{3\}$; la curva Γ è chiusa e, come si evince da una rappresentazione grafica, l'unico punto singolare isolato (polo doppio) della funzione integranda ($z_s = \frac{1}{3}$) è esterno ad essa. Pertanto, per il Teorema di Cauchy l'integrale richiesto vale zero.
Per fare il calcolo diretto, parametrizziamo le curve: $\gamma_1(t) = te^{i\frac{\pi}{4}}$, $t \in [0, 2]$ (o, anche $\gamma_1(t) = t + it$, $t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$); $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$; $\gamma_3(t) = te^{i\pi}$, $t \in [2, 0]$. Si ha

$$\int_{\gamma_1} (3z-1)^{-2}\,dz = \int_0^2 \left(3te^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right)^{-2} e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt = -\frac{1}{3}\left[\left(3te^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right)^{-1}\right]_0^2 = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6e^{i\frac{\pi}{4}} - 1} + 1\right]$$

$$\int_{\gamma_2} (3z-1)^{-2}\,dz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(6e^{it} - 1\right)^{-2} 2ie^{it}\,dt = -\frac{1}{3}\left[\left(6e^{it} - 1\right)^{-1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6e^{i\pi} - 1} - \frac{1}{6e^{i\frac{\pi}{4}} - 1}\right]$$

$$\int_{\gamma_3} (3z-1)^{-2}\,dz = \int_2^0 \left(3te^{i\pi} - 1\right)^{-2} e^{i\pi}\,dt = -\frac{1}{3}\left[\left(3te^{i\pi} - 1\right)^{-1}\right]_2^0 = -\frac{1}{3}\left[-1 - \frac{1}{6e^{i\pi} - 1}\right].$$

Sommando i tre integrali si trova zero.

Esercizio 2.
i) Calcolare, se possibile, l'antitrasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-3x^2}$ *(**1,5 punti**);*
ii) calcolare la trasformata di Laplace delle funzioni $f(t) = \sin(\omega t)$ *e* $g(t) = \cos(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$ *(**1,5 punti**);*
iii) utilizzando la trasformata di Laplace, trovare la soluzione $y(t)$, $t \geq 0$, *del problema di Cauchy* $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = 4 + \sin t \\ y(0) = 0 \end{cases}$ *(**4 punti**).*

i) La funzione da antitrasformare è una gaussiana. Sapendo che la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana, e che la formula della trasformata di Fourier della funzione di Gauss è data da $\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$, $a > 0$, si ricava

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}}\,\mathcal{F}\left[e^{-a\,t^2}\right](\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Sfruttando la linearità di $\mathcal{F}$ ed essendo, in questo caso, $\frac{1}{4a} = 3$ e, quindi $a = \frac{1}{12}$, si trova

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{12}t^2}\right](\omega) = e^{-3\omega^2},$$

da cui, applicando la formula di inversione

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-3x^2}\right](t) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}\, e^{-\frac{1}{12}t^2}.$$

Eventualmente, avendo osservato che $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, si può usare anche la definizione di antitrasformata:

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)](t) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-3\omega^2}\right](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\omega^2+i\omega t}\, d\omega.$$

Osservando che è un integrale del tipo $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2+\beta x}\, dx$, $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{C}$, si può procedere come fatto a lezione per quella tipologia di integrali: osservato che $\left(\sqrt{3}\omega - i\frac{t}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 3\omega^2 - i\omega t - \frac{t^2}{12}$, si ha

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{t^2}{12}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{3}\omega - i\frac{t}{2\sqrt{3}}\right)^2}\, d\omega.$$

Posto $\sqrt{3}\omega - i\frac{t}{2\sqrt{3}} = z$, si trova

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\, e^{-\frac{t^2}{12}} \int_{\gamma} e^{-z^2}\, dz,$$

dove γ è una curva nel piano complesso, precisamente la retta orizzontale passante per il punto $-i\frac{t_0}{2\sqrt{3}}$, t_0 fissato. Come fatto a lezione, si dimostra che l'integrale di e^{-z^2} lungo quella curva vale $\sqrt{\pi}$, quindi $\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)](t) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}\, e^{-\frac{1}{12}t^2}$, che è lo stesso risultato trovato prima.

ii) Come fatto a lezione, sfruttando la formula di Eulero per $e^{i\omega t}$ e per $e^{-i\omega t}$, sommando e sottraendo membro a membro, usando la linearità dell'operatore di Laplace e ricordando la trasformata di Laplace della funzione esponenziale $\mathcal{L}\left[e^{at}\right](t) = \frac{1}{s-a}$ per $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$, si trova $\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ e $\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$. In alternativa, si può partire dalle espressioni del $\sin(\omega t)$ e del $\cos(\omega t)$:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Applicando l'operatore di Laplace si trova

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left[e^{i\omega t}\right] - \mathcal{L}\left[e^{-i\omega t}\right]\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right),$$

dove entrambe le trasformate sono definite in $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$. Si ricava

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\,.$$

Analogamente, nello stesso semipiano di convergenza,

$$\mathcal{L}\big[\cos(\omega t)\big] = \frac{1}{2}\,\big(\mathcal{L}\big[e^{i\omega t}\big] + \mathcal{L}\big[e^{-i\omega t}\big]\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\,.$$

Ancora, si può trovare il risultato anche usando direttamente la definizione di trasformata e facendo il calcolo diretto.

iii) Passando alla trasformata e sfruttando il risultato del punto ii) con $\omega = 1$ si trova

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{1}{s^2 + 1},$$

cioé

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+2)} + \frac{1}{(s+2)(s^2+1)}.$$

Per antitrasformare si potrebbe scomporre in fratti semplici oppure usare la formula che coinvolge i residui. Col primo modo, il primo termine diventa

$$\frac{4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2}$$

e il secondo

$$\frac{1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{A + Bs}{s^2+1} + \frac{C}{s+2}$$

con $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = \frac{1}{5}$. Pertanto

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{2+s}{5(s^2+1)} + \frac{1}{5(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1}.$$

Applicando $\mathcal{L}^{-1}$ si trova

$$y(t) = H(t)\left[2 - \frac{9}{5}\,e^{-2t} + \frac{2}{5}\,\sin t + \frac{1}{5}\,\cos t\right].$$

Domanda 1.
*i) Enunciare il Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe (**1,5 punti**);*
*ii) dimostrare il Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe (**3,5 punti**);*
*iii) ricavare la formula integrale di Cauchy per le derivate (o seconda formula integrale di Cauchy), specificando i risultati e/o i teoremi utilizzati per ricavarla (**3 punti**).*

Domanda 2.
*i) Definire quando una funzione $f(t)$ si dice trasformabile secondo Fourier e antitrasformabile secondo Fourier, e mostrare, se esiste, una condizione sufficiente di Fourier-trasformabilità e di Fourier-antitrasformabilità (**2 punti**);*
*ii) enunciare e dimostrare le varie proprietà della trasformata di Fourier (proprietà di riscalamento, di coniugio, ecc.) (**2,5 punti**);*
*iii) enunciare e dimostrare le analoghe proprietà della trasformata di Laplace (se esistono), dopo aver definito la trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ (**2 punti**).*