Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 05/02/2026

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.
Calcolare l'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{-i\omega t}\, dt$, con $a, \omega \in \mathbb{R}$, $a > 0$, utilizzando gli strumenti dell'analisi complessa (**8 punti**).

Esercizio 2.

i) Trovare la soluzione $y = y(t)$, $t \geq 0$, del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 4y' + 3y(t) = 5t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ utilizzando la trasformata di Laplace (**4 punti**).

ii) Calcolare la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ della funzione $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, e stabilire se $\widehat{f}(\omega)$ è integrabile in $\mathbb{R}$ (**2,5 punti**).

Domanda 1.
i) Definire l'indice di avvolgimento di una curva chiusa regolare a tratti rispetto a un punto non appartenente al sostegno della curva, ed elencare alcune sue proprietà (**2 punti**);
ii) scrivere la formula integrale di Cauchy in cui compare anche l'indice di avvolgimento della curva e ricavare, da questa, la formula per curve semplici, enunciando il secondo teorema di Cauchy (o formula integrale di Cauchy) (**1 punto**);
iii) spiegare come mai la formula integrale di Cauchy sia chiamata anche formula di rappresentazione (**1 punto**);
iv) ricavare, dal secondo teorema di Cauchy, il Teorema della media (o formula della media) (**2 punti**);
v) dimostrare che, se una funzione è olomorfa in un aperto, anche la sua derivata lo é (**3 punti**).

Domanda 2.
i) Enunciare e dimostrare il Teorema di Riemann-Lebesgue (**3 punti**);
ii) cosa si può dire, come conseguenza del Teorema di Riemann-Lebesgue, riguardo alle funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$? (**1 punto**)
iii) enunciare e dimostrare il risultato che riguarda la trasformata di Laplace della primitiva (**2,5 punti**).