

Esercizio 1.

Calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt,$$

con $a, \omega \in \mathbb{R}$, $a > 0$, utilizzando gli strumenti dell'analisi complessa (**8 punti**).

Lo svolgimento dell'esercizio è contenuto nell'Esempio 2.74 delle dispense, con $\beta = -i\omega$.

Esercizio 2.

i) Trovare la soluzione $y = y(t)$, $t \geq 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y(t) = 5t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

utilizzando la trasformata di Laplace (**4 punti**).

ii) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ della funzione $f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e

stabilire se $\hat{f}(\omega)$ è integrabile in \mathbb{R} (**2,5 punti**).

i) Applicando la trasformata di Laplace all'equazione, detta $\mathcal{L}[y(t)](s) = Y(s)$ e ricordando la formula per la trasformata di Laplace delle derivate $\mathcal{L}[y''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[y(t)](s) - sy(0) - y'(0)$ e $\mathcal{L}[y'(t)](s) = s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0)$, e anche la trasformata di Laplace di un segnale polinomiale $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ per $\text{Re}(s) > 0$, si ha

$$s^2Y(s) - 2 + 4sY(s) + 3Y(s) = \frac{5}{s^2},$$

$$\text{da cui } Y(s) = \left(\frac{5}{s^2} + 2\right) \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2s^2 + 5}{s^2(s+3)(s+1)}.$$

Si può scomporre in fratti semplici oppure calcolare i poli della funzione e usare la formula di inversione

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = \sum_{k=1}^3 \text{Res}(Y(s)e^{st}; s_k), \quad y \geq 0.$$

$Y(s)$ ha tre singolarità isolate: $s_1 = 0$ (polo doppio), $s_2 = 1$ e $s_3 = -3$ (poli semplici). Si ha

$$\text{Res}(Y(s)e^{st}; s_1) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \cdot \frac{2s^2 + 5}{s^2(s+3)(s+1)} e^{st} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [(2s^2 + 5)(s+3)^{-1}(s+1)^{-1}e^{st}]'$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [4s(s+3)^{-1}(s+1)^{-1} - (2s^2+5)(s+3)^{-2}(s+1)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - (2s^2+5)(s+3)^{-1}(s+1)^{-2}] e^{st} + (2s^2+5)(s+3)^{-1}(s+1)^{-1} t e^{st} \right\} = -\frac{20}{9} + \frac{5}{3}t \\
\text{Res}(Y(s)e^{st}; s_2) &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{2s^2+5}{s^2(s+3)(s+1)} e^{st} = \frac{7}{2} e^{-t} \\
\text{Res}(Y(s)e^{st}; s_3) &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot \frac{2s^2+5}{s^2(s+3)(s+1)} e^{st} = -\frac{23}{18} e^{-3t}.
\end{aligned}$$

Scomponendo in fratti semplici

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+3}$$

il calcolo è un po' lungo, ma si trova $A = -\frac{20}{9}$, $B = \frac{5}{3}$, $C = \frac{7}{2}$, $D = -\frac{23}{18}$, da cui, antitrasformando,

$$y(t) = H(t) \left[-\frac{20}{9} + \frac{5}{3}t + \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{23}{18}e^{-3t} \right]$$

Volendo, si può verificare il risultato utilizzando la formula risolutiva per l'equazione differenziale lineare del secondo ordine e utilizzando le condizioni iniziali.

ii) Dal calcolo diretto si trova facilmente $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2+i\omega}$, che non sta in $L^1(\mathbb{R})$, come si può verificare facilmente.

Domanda 1.

- i) Definire l'indice di avvolgimento di una curva chiusa regolare a tratti rispetto a un punto non appartenente al sostegno della curva, ed elencare alcune sue proprietà (**2 punti**);
- ii) scrivere la formula integrale di Cauchy in cui compare anche l'indice di avvolgimento della curva e ricavare, da questa, la formula per curve semplici, enunciando il secondo teorema di Cauchy (**1 punto**);
- iii) spiegare come mai la formula integrale di Cauchy sia chiamata anche formula di rappresentazione (**1 punto**);
- iv) ricavare, dal secondo teorema di Cauchy, il Teorema della media (o formula della media) (**2 punti**);
- v) dimostrare che, se una funzione è olomorfa in un aperto, anche la sua derivata lo è (**3 punti**).

Domanda 2.

- i) Enunciare e dimostrare il Teorema di Riemann-Lebesgue (**3 punti**);
- ii) cosa si può dire, come conseguenza del Teorema di Riemann-Lebesgue, riguardo alle funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$? (**1 punto**)
- iii) enunciare e dimostrare il risultato che riguarda la trasformata di Laplace della primitiva (**2,5 punti**).