Prova Scritta di Analisi Matematica 3 05.02.2026 Sol. 1

1. Calcoliamo le derivate prime e seconde di $f(x,y)$.

$$f_x = \frac{y}{1+x^2y^2}, \quad f_y = \frac{x}{1+x^2y^2}, \quad f_{xx} = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}, \quad f_{yy} = -\frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$$

a) La direzione di massima crescita è data dal gradiente di f normalizzato (quando non è nullo), mentre la massima crescita è esattamente pari alla norma del gradiente. Dunque, in questo caso abbiamo $Df(2,0) = (0,2)$. Per cui la direzione di massima crescita è $(0,1)$ e la massima crescita 2.

b) Dalla formula del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(2,0) = \left(Df(2,0), \lambda\right) = \left((0,2), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\sqrt{2}.$$

c) L'equazione cartesiana del piano tangente in $(2,0)$ è la seguente

$$z = f(2,0) + f_x(2,0)(x-2) + f_y(2,0)\,y$$

$$= 0 + 0\cdot(x-2) + 2y$$

cioè $z = 2y$.

d) La matrice hessiana in $(2,0)$ vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, lo sviluppo richiesto è

$$\operatorname{arctg}(xy) = f(x,y) = f(2,0) + \left(Df(2,0), ((x-2), y) \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} \right) + o\left((x-2)^2+y^2\right) \quad (x,y) \to (2,0).$$

$$= 0 + 2y + \frac{1}{2}\left(2(x-2)y \right) + o\left((x-2)^2+y^2\right)$$

$$= xy + o\left((x-2)^2+y^2\right).$$

2. Le derivate prime di $f(x,y)$ sono:

$$f_x = \frac{2x}{x^2+1}, \quad f_y = -2y e^{y^2}.$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema:

$$Df(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \\ -2y e^{y^2} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

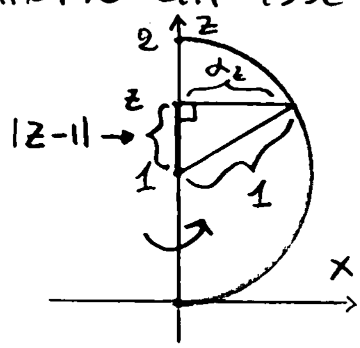
Dunque l'unico punto stazionario è l'origine. Calcoliamo e valutiamo l'hessiana in $(0,0)$.

$$f_{xx} = 2\,\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, \quad f_{yy} = -2e^{y^2}(1+2y^2), \quad f_{xy} = 0$$

da cui $D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Dato che $D^2 f(0,0)$ ha gli autovalori (2 e -2) di segno opposto, si tratta di una matrice indefinita e quindi $(0,0)$ è un punto di Sella.

3. E è la palla di raggio 1 centrata in $(0,0,1)$.
L'integrale può essere calcolato passando alle coordinate cilindriche oppure a quelle sferiche.
Metodo 1 (coordinate cilindriche).
Immaginando E ottenuta dalla rotazione attorno all'asse z del semicerchio della figura,



avremo che $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (rotazione attorno all'asse z), $0 \leq z \leq 2$ e per z fissato (ragionando sul triangolo rettangolo in figura) $0 \leq \rho \leq d_z = \sqrt{1-(z-1)^2}$. Dunque in coordinate cilindriche la sfera è descritta da

$$T: \quad \begin{aligned} &0 \leq \theta \leq 2\pi \\ &0 \leq z \leq 2 \\ &0 \leq \rho \leq \sqrt{1-(z-1)^2} \end{aligned}$$

Si noti che l'ultima relazione si può ricavare anche analiticamente da $x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$, infatti, scritta in coordinate cilindriche, diventa

$$\rho^2 + (z-1)^2 \leq 1 \quad \text{cioè} \quad \rho \leq \sqrt{1-(z-1)^2}.$$

Notando che T è un dominio normale rispetto al piano θz, possiamo ora trasformare l'integrale e integrare per segmenti. $dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$

$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T \rho^2 \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2} d\theta\, dz \int_0^{\sqrt{1-(z-1)^2}} \rho^3\, d\rho$$

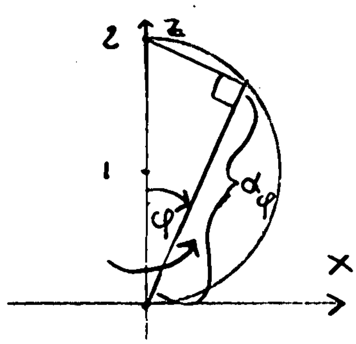
$\theta \quad z$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2} \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{1-(z-1)^2}} d\theta\, dz = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2} \left(1-(z-1)^2\right)^2 d\theta\, dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} (2z - z^2)^2\, dz = \frac{\pi}{2}\int_0^{2} (4z^2 - 4z^3 + z^4)\, dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3}z^3 - z^4 + \frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{15}\pi .$$

Metodo 2 (coordinate sferiche).
Ragionando similmente al caso precedente,



avremo $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$ e, per φ fissato (ragionando sul triangolo rettangolo in figura) $0 \le \rho \le d_\varphi = 2\cos\varphi$. Cioè, in coordinate sferiche

$$T: \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi \end{array}$$

Anche in questo caso la terza relazione segue anche analiticamente. Infatti $x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$ in coordinate sferiche diventa

$$\rho^2 \sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi - 2\rho\cos\varphi + 1 \le 1$$

che semplificata diventa $\rho \le 2\cos\varphi$.

Trasformando l'integrale ($dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$) e integrando per segmenti, abbiamo

$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T \rho^2\sin^2\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{2\pi} d\varphi\,d\theta \int_0^{2\cos\varphi} \rho^4 \sin^3\varphi\,d\rho = \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{1}{5}\rho^5\Big|_0^{2\cos\varphi} \sin^3\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/2} 32\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^5\varphi\,(-1+\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi)$$

$$= \frac{64}{5}\pi \int_0^{\pi/2} (\cos^7\varphi - \cos^5\varphi)\,d(\cos\varphi)$$

$$= \frac{64}{5}\pi\left(\frac{\cos^8\varphi}{8} - \frac{\cos^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{64}{5}\pi\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{8}{15}\pi.$$

Metodo 3 (Traslazione + Coordinate sferiche).

Questo è il metodo migliore. Trasliamo il centro della palla nell'origine e poi applichiamo le coordinate sferiche*. Le equazioni della traslazione sono

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = w + 1 \end{cases}$$

Il determinante jacobiano vale $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$,

dunque $dx\,dy\,dz = du\,dv\,dw$ e

$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B (u^2+v^2)\,du\,dv\,dw$$

dove però B è ora unitaria e centrata nell'origine.

In coordinate sferiche B è descritta banalmente da $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Quindi

$$\iiint_B (u^2+v^2)\,du\,dv\,dw = \int_{0_\rho}^{1}\int_{0_\varphi}^{\pi}\int_{0_\theta}^{2\pi} \rho^2 \sin^2\varphi\, \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \rho^4\, d\rho \int_0^\pi (\cos^2\varphi - 1)\, d(\cos\varphi) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 \cdot \left(\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right)\Big|_0^\pi \cdot 2\pi$$

$$= \frac{8}{15}\pi.$$

---

* Ciò equivale a considerare le coordinate sferiche modificate $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = 1 + \rho\cos\varphi \end{cases}$

4.

a) Essendo $\varphi(-4\pi) = (-4\pi, 0, -4\pi) \neq (4\pi, 0, 4\pi) = \varphi(4\pi)$, la curva <u>non è chiusa</u>. Inoltre φ <u>è semplice</u> in quanto iniettiva: $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) = (t_1 \cos t_1, t_1 \sin t_1, t_1) \neq (t_2 \cos t_2, t_2 \sin t_2, t_2) = \varphi(t_2)$.

$$\varphi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

$$|\varphi'(t)| = \sqrt{2 + t^2} \geq 2 > 0 \quad \forall t,$$

quindi la curva è regolare.

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

b) L' elemento di lunghezza vale

$$ds = |\varphi'(t)|\, dt = \sqrt{2+t^2}\, dt, \text{ dunque}$$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_{-4\pi}^{4\pi} \sqrt{2+t^2}\, dt$$

$$\int_\gamma z\, ds = \int_{-4\pi}^{4\pi} t\sqrt{2+t^2}\, dt = \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{1}{2}\sqrt{2+t^2}\, d(2+t^2)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,(2+t^2)^{3/2} \Big|_{-4\pi}^{4\pi} = 0.$$