Cagliari, 26/01/2026

Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ____

1) Tavola di verità (3 punti)

Si costruisca la tavola di verità, completa di tutti i passaggi, relativa alla seguente espressione logica:

$$(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}}) \leftrightarrow \boldsymbol{B}$$

2) Studio di funzione: La melatonina (12 punti)

La melatonina è un ormone prodotto naturalmente dalla ghiandola pineale nel cervello, noto per il suo ruolo fondamentale nella regolazione del ciclo sonno-veglia. Quando la luce diminuisce, il corpo aumenta la produzione di melatonina, segnalando che è ora di dormire. Al contrario, la sua produzione diminuisce con l'esposizione alla luce, aiutando il risveglio. Oltre al suo ruolo nel sonno, la melatonina ha proprietà antiossidanti e influenza il sistema immunitario. È disponibile anche sotto forma di integratore, spesso utilizzato per contrastare il jet lag o problemi di insonnia.

Viene assunta da un adulto un integratore a base di melatonina ed a rilascio immediato. Si ipotizzi che questa venga assorbita dall'organismo secondo la seguente funzione che indica la quantità di melatonina nel sangue (in mg) in funzione del tempo (in ore) e a partire dal momento dell'assunzione:

$$Q(t) = \frac{kt}{t^2 + 1}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare dopo quanto tempo dall'assunzione si ha la quantità massima di melatonina nell'organismo. (3 punti)
b. Sapendo che la pastiglia contiene 5 mg di melatonina, calcolare il valore di *k*. (1 punto)
c. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione data. (6 punti)
d. Effettuando uno studio per punti, tracciare il grafico dettagliato della funzione *Q(t)* e ricavare dopo quanto tempo la quantità di melatonina nel sangue scende al di sotto di 1 mg. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Crescita di una popolazione batterica (8 punti)

Viene coltivata una popolazione batterica in un ambiente con risorse limitate per un periodo di tempo pari a due anni. Si osserva che la velocità di crescita dei batteri può essere stimata dalla seguente funzione:

$$v(t) = \frac{6t + 12}{t^2 + 5t + 4}$$

Dove il tempo è dato in secondi.

a. Data una popolazione iniziale di 100 batteri, calcolare il numero di batteri presenti dopo un minuto. (6 punti)
b. Calcolare quanti nuovi batteri si formano nel corso del primo anno e quanti nel corso del secondo anno. (2 punti)

4) Statistica: Tasso di omicidi nelle capitali europee (7 punti)

Si vuole effettuare una statistica sul tasso di omicidi nelle grandi capitali europee (con una popolazione uguale o superiore al milione di abitanti).

Facendo riferimento a dati relativi all'anno 2020, si ottiene la seguente tabella che lega la popolazione di tre grandi città (in milioni di abitanti) al numero di omicidi registrati in quell'anno:

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	26	39	23

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra la popolazione ed il numero di omicidi registrati. (3 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)
c) Utilizzando un test adeguato, verificare l'ipotesi che il tasso di omicidi di una grande capitale europea sia di 4 omicidi per milione di abitanti. (2 punti)

Valori di riferimento per i test di ipotesi

Test T				
α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599
3	2.353	3.182	5.841	12.924
4	2.132	2.776	4.604	8.610
5	2.015	2.571	4.032	6.869
6	1.943	2.447	3.707	5.959
7	1.895	2.365	3.499	5.408
8	1.860	2.306	3.355	5.041
9	1.833	2.262	3.250	4.781
10	1.812	2.228	3.169	4.587
11	1.796	2.201	3.106	4.437
12	1.782	2.179	3.055	4.318
13	1.771	2.160	3.012	4.221
14	1.761	2.145	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.845	3.850
21	1.721	2.080	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.807	3.768
24	1.711	2.064	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.779	3.707
27	1.703	2.052	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.750	3.646
39	1.685	2.023	2.708	3.558
49	1.677	2.010	2.680	3.500
59	1.671	2.001	2.662	3.463
69	1.667	1.995	2.649	3.437
79	1.664	1.990	2.640	3.418
89	1.662	1.987	2.632	3.403
99	1.660	1.984	2.626	3.392

Test Z				
α	0.10	0.05	0.01	0.001
	1.645	1.960	2.576	3.291

Test χ^2				
α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	2.706	3.841	6.635	10.828
2	4.605	5.991	9.210	13.816
3	6.251	7.815	11.345	16.266
4	7.779	9.488	13.277	18.467
5	9.236	11.070	15.086	20.515
6	10.645	12.592	16.812	22.458
7	12.017	14.067	18.475	24.322
8	13.362	15.507	20.090	26.124
9	14.684	16.919	21.666	27.877
10	15.987	18.307	23.209	29.588
11	17.275	19.675	24.725	31.264
12	18.549	21.026	26.217	32.909
13	19.812	22.362	27.688	34.528
14	21.064	23.685	29.141	36.123
15	22.307	24.996	30.578	37.697
16	23.542	26.296	32.000	39.252
17	24.769	27.587	33.409	40.790
18	25.989	28.869	34.805	42.312
19	27.204	30.144	36.191	43.820
20	28.412	31.410	37.566	45.315
21	29.615	32.671	38.932	46.797
22	30.813	33.924	40.289	48.268
23	32.007	35.172	41.638	49.728
24	33.196	36.415	42.980	51.179
25	34.382	37.652	44.314	52.620
26	35.563	38.885	45.642	54.052
27	36.741	40.113	46.963	55.476
28	37.916	41.337	48.278	56.892
29	39.087	42.557	49.588	58.301
30	40.256	43.773	50.892	59.703

$$Z^* = \frac{|x - \mu|}{\sigma}\sqrt{n} \qquad T^*_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}$$

$$\chi^2_{(n-1)(m-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i^{expected} - f_i^{observed}\right)^2}{f_i^{expected}}$$

Retta di regressione lineare (generica): $m = \frac{\sigma_{XY}}{{\sigma_X}^2}$ $\quad q = \bar{y} - m\bar{x}$

SOLUZIONI

1) TAVOLE DI VERITÀ

$$(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}}) \leftrightarrow \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\overline{\boldsymbol{B}}$	$\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$	$\boldsymbol{B}$	$(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}}) \leftrightarrow \boldsymbol{B}$
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$Q(t) = \frac{k\,t}{t^2+1} \qquad Q_M = 5\,mg \qquad Q_S = 1\,mg$$

a)

$$Q'(t) = k\,\frac{t^2+1-t\,(2t)}{(t^2+1)^2} = k\,\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = k\,\frac{(1+t)(1-t)}{(t^2+1)^2}$$

$$Q'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad = (1+t)(1-t) = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t_M = 1\,hr}$$

b)

$$Q_M = Q(t = t_M) = Q(1) = 5 \quad \rightarrow \quad \frac{k \cdot 1}{1^2+1} = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 10}$$

c)

$$\boldsymbol{Q(t) = \frac{10\,t}{t^2+1} \qquad con\ t \geq 0}$$

- DOMINIO

$$t^2+1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{D:\ t \geq 0}$$

- INTERSEZIONI ASSE X

$$Q(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A(0;0)}$$

- INTERSEZIONI ASSE Y

$t = 0 \quad \rightarrow \quad Q_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B \equiv A(0;0)}$

- STUDIO DEL SEGNO

$$Q(t) > 0$$

$N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$
$D(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t^2 + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$Q(t) > 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t > 0}$$

- LIMITI – COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{10\,t}{t^2+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t^2}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\right) = 0^+$$

- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA ED ESTREMI RELATIVI

$$\boldsymbol{Q'(t) = \ 10\,\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}}$$

$Q'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad (1+t)(1-t) = 0$

$t_1 = 1$

$t_2 = -1$ FUORI DOMINIO

$Q'(t) \geq 0$

$N'(t) \geq 0 \quad \rightarrow \quad 1 - t^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \rightarrow \quad 0 \leq t \leq 1$

$D'(t) \geq 0 \quad \rightarrow \quad (t^2+1)^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$\boldsymbol{Q'(t) \geq 0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{0 \leq t \leq 1} \quad \rightarrow \quad \textit{Punto di Massimo } \boldsymbol{M(1;5)}$

- SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA E PUNTI DI FLESSO

$$Q''(t) = 10\,\frac{-2t\,(t^2+1)^2 - (1-t^2)\cdot 2t \cdot 2(t^2+1)}{(t^2+1)^4} = 20\,t\,\frac{t^2-3}{(t^2+1)^3}$$

$$Q''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2t + 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$F_1 \equiv A(0;0) \qquad F_2\left(\sqrt{3};\ \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = F_2(1.732;\ 4.33)$$

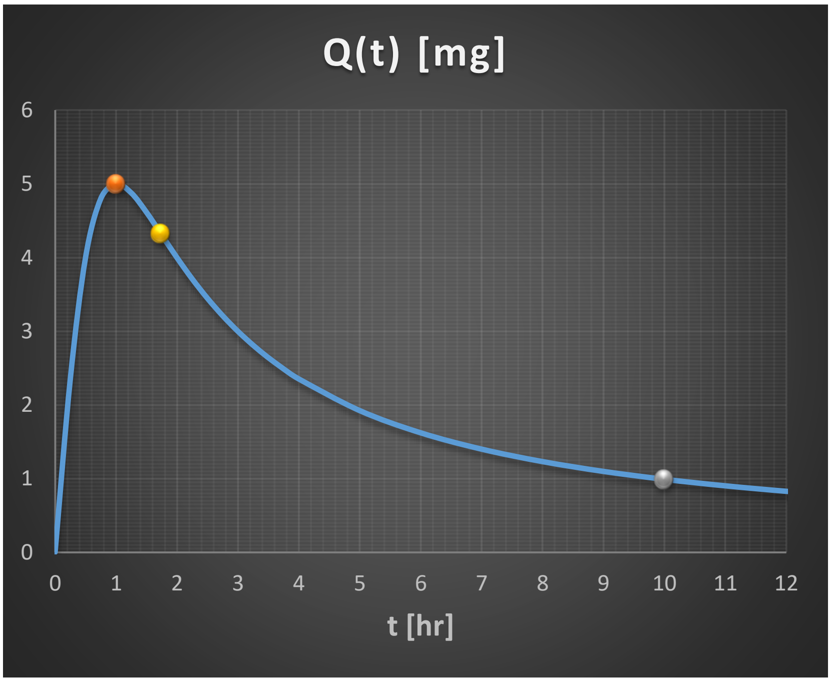
$Q''(t) > 0$

$$\begin{cases} 20\,t > 0 \\ t^2 - 3 > 0 \\ (t^2+1)^3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < -\sqrt{3} \cup t > \sqrt{3} \\ \forall t \in R \end{cases} \rightarrow -\sqrt{3} < t < 0 \cup t > \sqrt{3} \rightarrow \boldsymbol{t > \sqrt{3}}$$

d)

$$\boldsymbol{Q(t) = 10\,\frac{t}{t^2+1}} \qquad \boldsymbol{con\ t \geq 0} \qquad Q_S = 1\,mg$$

t [hr]	Q(t) [mg]
0	0.00
0.25	2.35
0.5	4.00
0.75	4.80
1	5.00
1.25	4.88
1.5	4.62
1.732	4.33
1.75	4.31
2	4.00
2.25	3.71
2.5	3.45
2.75	3.21
3	3.00
3.25	2.81
3.5	2.64
3.75	2.49
4	2.35
5	1.92
6	1.62
7	1.40
8	1.23
9	1.10
10	0.99
11	0.90
12	0.83



$$Q_S = 1\,mg \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t_S \approx 10\ hr}$$

3) INTEGRALE

DATI

N_0 = 100 batteri; [t] = s t_x = 1 min = 60 s

a)

La funzione che dà il numero di batteri in funzione del tempo è data dall'integrale indefinito di *v (t)*:

$$N(t) = \int v(t)\, dt$$

Per calcolare l'integrale indefinito della funzione, si deve scomporre la funzione fratta mediante il metodo dei fratti semplici:

$$\int v(t)\, dt = \int \frac{6t + 12}{t^2 + 5t + 4} dt = 6 \int \frac{t + 2}{(t + 1)(t + 4)} dt$$

$$\frac{t + 2}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t + 4} = \frac{(A + B)t + (4A + B)}{(t + 1)(t + 4)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 4A + B = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Perciò:

$$\frac{6t + 12}{t^2 + 5t + 4} = 6 \frac{t + 2}{t^2 + 5t + 4} = 6\left(\frac{1/3}{t + 1} + \frac{2/3}{t + 4}\right) = \frac{2}{t + 1} + \frac{4}{t + 4}$$

Possiamo così svolgere l'integrale definito per il primo minuto, quindi 60 secondi:

$$N = N_0 + \int_0^{60} v(t)\, dt = 100 + \int_0^{60} \left(\frac{2}{t + 1} + \frac{4}{t + 4}\right) dt =$$

$$= 100 + 2\ln(60 + 1) + 4\ln(60 + 4) - [2\ln(1) + 4\ln(4)]$$

Quindi:

$$N = 100 + 2\ln(61) + 4\ln(64) - 4\ln(4) = 119\ batteri$$

b)

Allo stesso modo, si può trovare il numero di batteri sviluppati in un anno e nel corso di due anni. Innanzitutto, siccome l'unità di misura temporale utilizzata è il secondo, calcoliamo quanti secondi ci sono in un anno:

$1\ yr = 3600 \cdot 24 \cdot 365\ s = 31\ 536\ 000\ s$
$2\ yr = 63\ 072\ 000\ s$

Da cui:

$$N(1\ yr) = 100 + 2\ln(31\ 536\ 000 + 1) + 4\ln(31\ 536\ 000 + 4) - 4\ln(4) = 198\ batteri$$

$$N(2\ yr) = 100 + 2\ln(63\ 072\ 000 + 1) + 4\ln(63\ 072\ 000 + 4) - 4\ln(4) = 202\ batteri$$

Essendo richiesto solo il numero di <u>nuovi</u> batteri nel corso dell'anno:

$$N_1 = N(1\ yr) - 100 = 98\ batteri$$

$$N_2 = N(2\ yr) - N_1 - 100 = 4\ batteri$$

Perciò, nel corso del primo anno si sono formati 98 batteri, mentre nel secondo anno si sono formati solo 4 batteri.

Questo risultato ha senso, ricordando che si tratta di un ambiente di crescita a risorse limitate e che la funzione N(t) è di tipo logaritmico.

4) STATISTICA

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	26	39	23

a)

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario.

Si ottiene:

Dati	Media	Varianza campionaria	Dev. Std campionaria
Popolazione (mln ab.)	4.24	4.76	2.18
Omicidi	29.33	72.33	8.50

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1} = 17.96$$

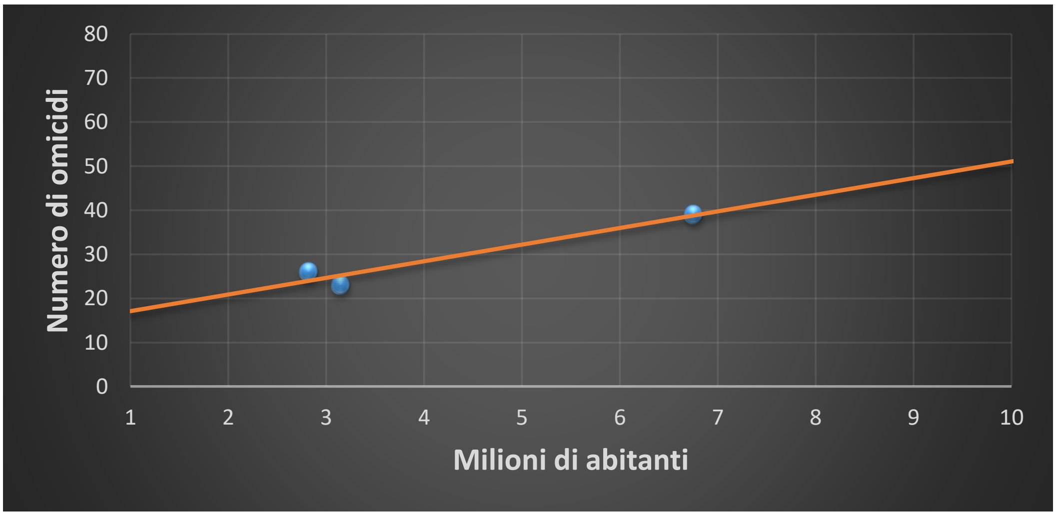
$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 0.968$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono direttamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = 3.774\, x + 13.32}$$



c)

Il test fa riferimento al tasso di omicidi per milione di abitanti, quindi si dovrà ottenere la relativa serie di dati mediante il rapporto tra il numero di omicidi e la popolazione:

Città	Roma	Madrid	Atene
Popolazione (mln ab.)	2.823	6.756	3.153
Omicidi	26	39	23
Tasso di omicidi per milione di abitanti	9.21	5.77	7.29

Il test da effettuare dipende sostanzialmente dal numero di campioni considerati che, in questo caso è pari a *n = 3* . Per questo motivo, dovrà essere effettuato un test di tipo *t-Student* con gradi di libertà pari a $\nu = n - 1 = 2$ e dovrà essere utilizzata la seguente quantità pivotale:

$$\boxed{T^*_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}}$$

E' necessario quindi calcolare media e deviazione standard campionaria della serie di dati ottenuta:

Media	7.43
Varianza C	2.967
Dev Std C	1.722
Pivot T*	**3.445**

Test T

α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599

Confrontando il valore ottenuto con quelli tabulati per $\nu = 2$, si ottiene che l'ipotesi nulla H_0 secondo la quale il tasso di omicidi sia pari a **4** è negabile al 90% ma non al 95%.