Cagliari, 20/01/2026

Esame di MATEMATICA – CdL in FARMACIA/CTF

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ____

1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino la circonferenza di centro C (-2; 1) e raggio pari a 3, nonché la retta passante per i punti A (2; -1) e B (-1; 5).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza e la retta.

2) Studio di funzione: Crescita e declino di una tecnologia emergente (13 punti)

Il Ciclo di Vita del Prodotto è un modello che descrive le fasi che un prodotto attraversa dalla sua introduzione fino al suo ritiro dal mercato. Queste fasi sono quattro: l'introduzione, in cui il prodotto viene lanciato e le vendite sono inizialmente basse; la crescita, durante la quale le vendite aumentano rapidamente mentre il prodotto guadagna popolarità; la maturità, caratterizzata da una stabilizzazione delle vendite con intensa concorrenza; il declino, quando le vendite diminuiscono poiché il prodotto viene sostituito da nuove innovazioni o cambiamenti nel comportamento dei consumatori. Questo modello aiuta le aziende a pianificare strategie di marketing e gestione delle risorse.

Sia data la seguente funzione, che modellizza il ciclo di vita di un certo prodotto in termini di numero di prodotti venduti (in numero di unità) in funzione del tempo (in anni):

$$N(t) = kt^3e^{-t}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Si ricavi dopo quanto tempo si raggiunge il massimo delle vendite. (2 punti)
b. Si calcoli il valore che deve assumere *k* perché nel nono anno risultino essere state vendute 900 unità. (1 punto)
c. Qual è il numero massimo di vendite annuali raggiunto? (1 punto)
d. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione N*(t)*, tracciandone il grafico. (7 punti)
e. Ricavare (con uno studio per punti) dopo quanto tempo si prevede che il prodotto non venga più acquistato. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Ciclo di vita di un'app (6 punti)

Sia data la seguente funzione, che modellizza il numero di download di una certa applicazione in funzione del tempo (in anni):

$$n(t) = kt^3 e^{-t^4}$$

Dove *k* è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare la formula che permette di calcolare il numero totale di download effettuati fino ad un certo tempo t_x . (4 punti)
b. Ricavare la costante *k* perché il numero totale di download effettuati durante il primo anno dal lancio dell'app sia pari a 1400. (2 punti)

4) Statistica: Confronto tra servizi (6 punti)

Tre diverse aziende introducono sul mercato altrettanti servizi simili.
Sia data la seguente tabella che lega il numero di prodotti venduti al costo di produzione totale del servizio:

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

a) Effettuare un'analisi statistica, verificando il tipo di correlazione tra costo di produzione e il numero di servizi venduti. (4 punti)
b) Visualizzare i dati in tabella in un grafico, sovrapponendoli ad un modello di regressione lineare. (2 punti)

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = -2 \quad y_C = 1 \qquad r = 3 \;\rightarrow\; r^2 = 9$$

$$x_A = 2 \quad y_A = -1 \qquad x_B = -1 \quad y_B = 5$$

SOLUZIONE

Equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow\; y = -2x + 3$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = 1 \\ x_{P2} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -2x_P + 3$:

$$\begin{cases} y_{P1} = 1 \\ y_{P2} = \dfrac{17}{5} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(1;\ 1)\,,\mathrm{P}_2\left(-\frac{1}{5};\ \frac{17}{5}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$N(t) = kt^3\, e^{-t} \qquad t_b = 9 \qquad N(t_b) = N_b = 900$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$N'(t) = k[3t^2e^{-t} - t^3e^{-t}]$$

$$\boldsymbol{N'(t) = kt^2(3-t)e^{-t}}$$

$$N'(t) = 0 \;\;\rightarrow\;\; t = 0;\; t = 3 \;\;\rightarrow\;\; t_{max} = 3\; anni$$

b)

Sapendo il valore di *N*, pari a 900, per un dato valore di *t*, ovvero 9, possiamo calcolare *k*, invertendo la funzione *N(t)*:

$$N_b = k{t_b}^3\, e^{-t_b} \qquad \rightarrow \qquad k = \frac{N_b}{{t_b}^3\, e^{-t_b}} = 10\,000$$

La funzione sarà quindi:

$$N(t) = 10\,000\, t^3\, e^{-t}$$

Con derivata prima:

$$N'(t) = 10\,000\, t^2(3-t)e^{-t}$$

c)

Il numero massimo di vendite raggiunto sarà $N(t_{max})$:

$$N(t_{max}) = k{t_{max}}^3\, e^{-t_{max}} = 13\,443\; unità$$

d)

Lo studio della funzione *N(t)* dev'essere fatto in considerazione del fatto che sia la variabile indipendente *t* che quella dipendente *N* corrispondano a grandezze positive. Perciò, il grafico della funzione ed i valori ad esso associati interesseranno solo il primo quadrante (ove ascissa ed ordinata sono entrambe positive). Queste considerazioni permettono delle semplificazioni nello studio di funzione, andando ad escludere tutto ciò che riguarda le regioni di spazio esterne al primo quadrante stesso.

$$N(t) = 10\,000\, t^3\, e^{-t}$$

- Dominio:

$$D: \forall t \in R \qquad (t \geq 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$N(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0; 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad N(t = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0; 0)$$

- Studio del segno:

$$N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad C > 0$$

$10\,000\,t^3 > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0}$$

- Comportamento asintotico:

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty} kt^3\, e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{kt^3}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{kt^3}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3kt^2}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{6kt}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{6k}{e^t} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$\boldsymbol{N'(t) = 10\,000\, t^2(3 - t)e^{-t}}$$

$N'(t) = 0 \;\rightarrow\; t = 0;\; t = 3$

$N(t = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad P_0(0; 0)$

$N(t = 3) = 13\,443 \quad \rightarrow \quad M(3; 13\,443)$

$$N'(t) > 0$$

$t^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$3 - t > 0 \quad \rightarrow \quad -t > -3 \quad \rightarrow \quad t < 3$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$\boldsymbol{N'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t < 3}$$

- Studio della derivata seconda e punti di flesso:

$N'(t) = k\,[3t^2e^{-t} - t^3e^{-t}]$

$N''(t) = k(6t\,e^{-t} - 3t^2e^{-t} - 3t^2e^{-t} + t^3e^{-t})$

$$\boldsymbol{N''(t) = 10\,000\,t(t^2 - 6t + 6)e^{-t}}$$

$$N''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$$

$$\boldsymbol{F_0(0;\ 0)}$$

$$N''(t) = 0 \rightarrow \quad t^2 - 6t + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} t_1 = 4.732\ anni \\ t_2 = 1.268\ anni \end{cases}$$

$$N(t_1) = 5\,737$$

$$N(t_2) = 9\,334$$

$$\boldsymbol{F_1(4.7;\ 5\,737)}$$

$$\boldsymbol{F_2(1.3;\ 9\,334)}$$

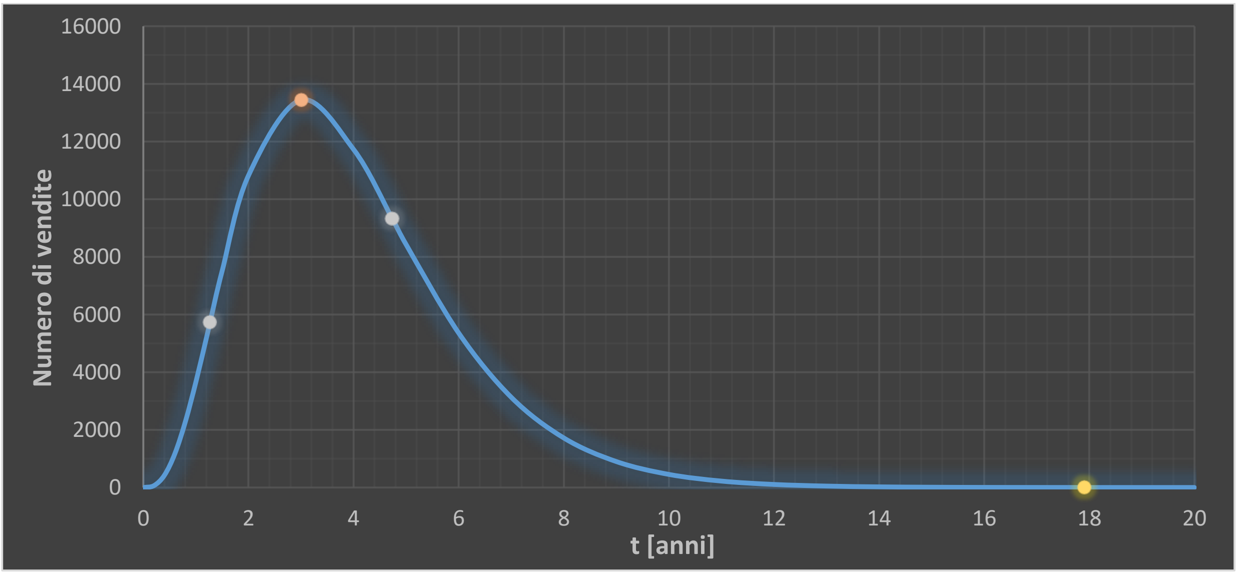
$N''(t) > 0$

$t > 0$

$t^2 - 6t + 6 > 0 \quad \rightarrow \quad t < 3 - \sqrt{3} \cup t > 3 + \sqrt{3}$

$e^{-t} > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$N''(t) > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < t < 3 - \sqrt{3} \cup t > 3 + \sqrt{3}$$



e)

Di seguito, viene riportata la tabella relativa allo studio della funzione per punti. Il numero di vendite scende al di sotto dell'unità dopo quasi 18 anni.

t [anni]	N
0	0.00
0.2	65.50
0.4	429.00
0.6	1185.43
0.8	2300.56
1	3678.79
1.2	5204.64
1.268	**5736.83**
1.5	7530.64
2	10826.82
3	**13442.51**
4	11722.01
4.732	**9333.68**
5	8422.43
6	5354.10
7	3127.76
8	1717.57
9	899.66
10	454.00
11	222.30
12	106.17
13	49.66
14	22.82
15	10.32
16	4.61
17	2.03
17.5	1.35
17.8	1.05
17.9	**0.97**
18	0.89
19	0.38
20	0.16

3) INTEGRALE

DATI

$$n(t) = kt^3\, e^{-t^4} \qquad N_{1°\,anno} = 1\,400$$

a)

Per calcolare il numero di download effettuati fino ad un certo momento t_x, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e t_x :

$$N(t) = \int_0^{t_x} n(t)dt = k\int_0^{t_x} t^3\, e^{-t^4}\ dt = k\left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^{t_x} (-4)t^3\, e^{-t^4}\ dt = -\frac{k}{4}\left[e^{-t^4} + c\right]_0^{t_x}$$

$$N(t) = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - \left(e^{-0^4} + c\right)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} + c - (1 + c)\right] = -\frac{k}{4}\left[e^{-t_x{}^4} - 1\right]$$

$$\boldsymbol{N(t) = \frac{k}{4}\left(1 - e^{-t_x{}^4}\right)}$$

b)

$$N_{1°\,anno} = N(t_x = 1) = N_1 = 1\,400 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{4\,N_1}{e^{-1} - 1} = \frac{4\,N_1}{1 - e^{-1}} \quad \rightarrow \quad k = 8\,859$$

4) STATISTICA

AZIENDA	A	B	C
Costo di produzione	1500 €	1230 €	1190 €
Servizi venduti	733	903	887

a)

X	1500 €	1230 €	1190 €
Y	733	903	887

Avendo un numero limitato di campioni (N = 3), si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N}$$

$$S^2{}_X = \frac{\sum (X_i - X)^2}{N-1} \qquad S^2{}_y = \frac{\sum (Y_i - Y)^2}{N-1}$$

$$S_X = \sqrt{S^2{}_X} \qquad S_Y = \sqrt{S^2{}_Y}$$

Si ottiene:

SERVIZI	Media	Varianza campionaria	Dev Std campionaria
Costo di produzione	1 306.67 €	28 433.33 €	168.62 €
Servizi venduti	841	8 812	93.87

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione:

$$S_{XY} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{N-1} = -15\,500$$

$$\rho_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = -0.979$$

La correlazione è quindi di natura molto forte e le grandezze sono inversamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$y = -0.545\,x + 1\,553$$