Problema 1.

Sia $f : X \to Y$ una funzione, e sia $\mathcal{F} \subseteq P(Y)$. Si provi che

$$f^{-1}\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\right) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} f^{-1}(A)$$

Problema 2.

Dato un intero $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0, \pm 1$, sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione

$$n \mapsto \begin{cases} np & \text{se } p \text{ non divide } n \\ n & \text{se } p \text{ divide } n \end{cases}$$

Dire, giustificando la risposta, se f è iniettiva e/o suriettiva.

Problema 3.

Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale la seguente identità:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Problema 4.

Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}^*$ si ha che

$$(\sqrt{3} - i)^n \in \mathbb{R}$$

Problema 5.

Definire in $\mathbb{N}^*$ la seguente relazione

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}^* : a = b^k$$

- Dimostrare che R definisce un ordine parziale su $\mathbb{N}^*$
- Dire se R definisce un ordine totale

Problema 6.

Dato il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 5x \equiv_{11} 2 \\ 3x \equiv_7 2 \end{cases}$$

- scrivere un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni) per il quale si possa applicare il Teorema Cinese del Resto
- utilizzando il sistema equivalente calcolare la soluzione generale e dire quali soluzioni comprese tra 0 e 500 sono dei numeri primi