

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Docente: Claudia Anedda

Analisi Superiore 1 - 23/01/2026

(Analisi complessa e trasformate)

Esercizio 1.

Calcolare l'integrale $\int_{\Gamma} f(z) dz$, dove $f(z) = \frac{1}{(3z-1)^2}$ e dove Γ è la curva (percorsa in senso antiorario) costituita (nell'ordine) dall'unione del segmento di estremi l'origine O e il punto $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, dall'arco di circonferenza di centro O e raggio 2 congiungente z_0 e il punto $z_1 = 2e^{i\pi}$, e dal tratto di asse reale dal punto z_1 all'origine. Trovare il risultato in due modi diversi, uno dei quali deve essere il calcolo diretto lungo la curva assegnata (**8 punti**).

Esercizio 2.

- i) Calcolare, se possibile, l'antitrasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-3x^2}$ (**1,5 punti**);
- ii) calcolare la trasformata di Laplace delle funzioni $f(t) = \sin(\omega t)$ e $g(t) = \cos(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$ (**1,5 punti**);
- iii) utilizzando la trasformata di Laplace, trovare la soluzione $y(t)$, $t \geq 0$, del problema di

Cauchy $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = 4 + \sin t \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (**4 punti**).

Domanda 1.

- i) Enunciare il Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe (**1,5 punti**);
- ii) dimostrare il Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe (**3,5 punti**);
- iii) ricavare la formula integrale di Cauchy per le derivate (o seconda formula integrale di Cauchy), specificando i risultati e/o i teoremi utilizzati per ricavarla (**3 punti**).

Domanda 2.

- i) Definire quando una funzione $f(t)$ si dice trasformabile secondo Fourier e antitrasformabile secondo Fourier, e mostrare, se esiste, una condizione sufficiente di Fourier-trasformabilità e di Fourier-antitrasformabilità (**2 punti**);
- ii) enunciare e dimostrare le varie proprietà della trasformata di Fourier (proprietà di riscalamento, di coniugio, ecc.) (**2,5 punti**);
- iii) enunciare e dimostrare le analoghe proprietà della trasformata di Laplace (se esistono), dopo aver definito la trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ (**2,5 punti**).