Prova Scritta di Analisi Matematica 3 19.01.2026

1. Lungo gli assi coordinati ($x=0$ o $y=0$) la funzione tende chiaramente a zero. Esaminiamo le restanti rette per l'origine $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx|x^2+mx^2|}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m|1+m|}{1+m^2}x = 0 \quad \forall m.$$

Cerchiamo di dimostrare che il limite è proprio zero mediante il teorema del confronto.

$$0 \le \left| \frac{y|x^2+xy|}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x||y||x+y|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2+y^2}{2}\,\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{|x+y|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

dove è stata utilizzata la disuguaglianza $|x||y| \le \frac{x^2+y^2}{2}$ e la continuità in $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = \frac{|x+y|}{2}$. Quindi il limite <u>esiste</u> e vale zero.

Alternativamente, si può studiare il limite passando alle coordinate polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

Il limite diventa

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 |\cos\theta| \sin\theta \, |\cos\theta + \sin\theta|}{\rho^2} =$$

$$\lim_{\rho \to 0} \rho |\cos\theta| \sin\theta \, |\cos\theta + \sin\theta| = 0 \quad \forall\theta.$$

Per poter concludere che il limite proposto è effettivamente zero si deve provare che l'ultimo limite è verificato <u>uniformemente</u> rispetto a θ. Questo segue dalle relazioni

$$\left| \rho |\cos\theta| \sin\theta \, |\cos\theta + \sin\theta| \right| = \rho |\cos\theta| |\sin\theta| |\cos\theta + \sin\theta|$$

$$\leq \rho \underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1} \underbrace{|\sin\theta|}_{\leq 1} \underbrace{(|\cos\theta| + |\sin\theta|)}_{\leq 2} \leq 2\rho \to 0 \quad \rho \to 0.$$

2. a) Grazie alla regola della catena troviamo

$$f_u = 2u f_x + f_y - f_z$$

$$f_w = 0 \cdot f_x + 0 \cdot f_y + 3w^2 f_z = 3w^2 f_z$$

Prova Scritta di Analisi Matematica 3 19.01.2026 Sol. 3

$$f_{uu} = 2f_x + 2u\left(2u f_{xx} + f_{xy} - f_{xz}\right)$$
$$+ \quad 2u f_{xy} + f_{yy} - f_{yz}$$
$$- \quad 2u f_{xz} - f_{yz} + f_{zz}$$
$$= 2f_x + 4u^2 f_{xx} + 4u f_{xy} - 4u f_{xz} + f_{yy} - 2f_{yz} + f_{zz}$$

$$f_{ww} = 6w f_z + 3w^2\left(0 \cdot f_{xz} + 0 \cdot f_{yz} + 3w^2 f_{zz}\right)$$
$$= 6w f_z + 9w^4 f_{zz}.$$

b) La matrice jacobiana è pari a

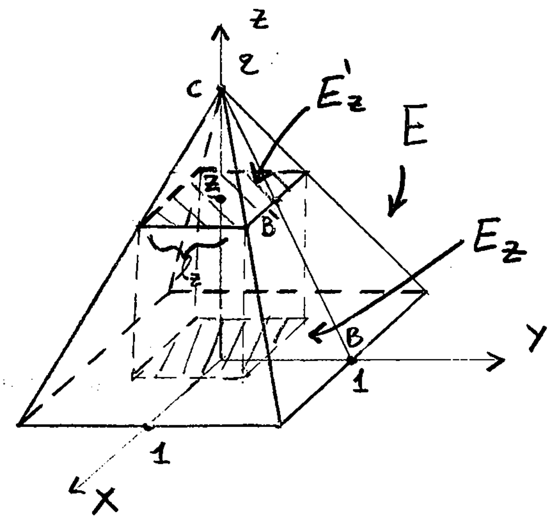
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3w^2 \end{pmatrix}$$

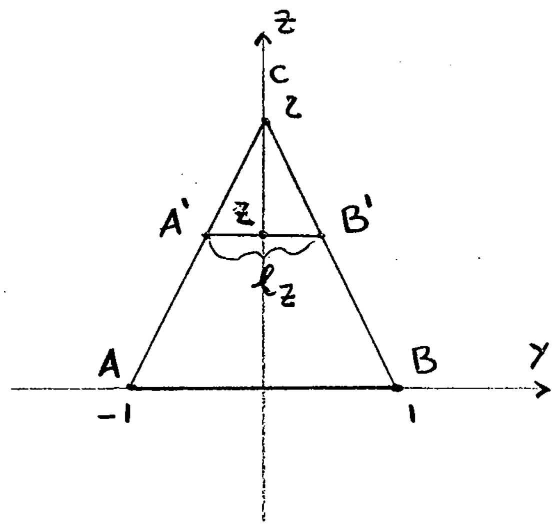
da cui si ricava subito il determinante jacobiano

$$\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 2u \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3w^2 \end{vmatrix} = 6uw^2.$$

Prova Scritta di Analisi Matematica 3 19.01.2026 Sol. 4

3. La piramide E è raffigurata sul disegno.





Integrando per strati rispetto a z abbiamo

$$\iiint_E (2-z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dz \iint_{E_z} (2-z)\,dx\,dy$$

Perchè la funzione integranda non dipende da x,y

$$= \int_0^2 (2-z)\,dz \iint_{E_z} dx\,dy = \int_0^2 (2-z)\, m(E_z)\,dz$$

$$= \int_0^2 (2-z)\, m(E'_z)\,dz$$

dove $m(E'_z) = m(E_z)$ sono le aree (identiche) della sezione E'_z e la sua proiezione E_z.
Essendo E'_z un quadrato con lato dipendente da z, basterà trovare quest'ultimo per ricavare l'area cercata. Sia l_z questo lato, dal secondo disegno, sfruttando la similitudine dei triangoli

Prova scritta di Analisi Matematica 3 19.01.2026 Sol. 5

$A \subset B$ e $A' \subset B'$ abbiamo

$$\frac{\ell_z}{2} = \frac{2-z}{2}$$

cioè $\ell_z = 2 - z$ e $m(E_z) = m(E_z') = (2-z)^2$.

Tornando all'integrale, concludiamo

$$\iiint_E (2-z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 (2-z)\, m(E_z')\,dz$$

$$= \int_0^2 (2-z)^3\,dz$$

$$= -\frac{(2-z)^4}{4}\Big|_0^2 = 4.$$

4. Affinchè sia esatta, ω deve essere necessariamente chiusa. Imponiamo quindi le condizioni di chiusura.

$$\begin{array}{lcl} (2x-z)_y = (y)_x & & 0 = 0 \\ (2x-z)_z = (ax)_x & \rightsquigarrow & -1 = a \\ (y)_z = (ax)_y & & 0 = 0 \end{array}$$

da cui si ricava $a=-1$. Essendo poi il dominio di ω ($\mathbb{R}^3$) un aperto semplicemente connesso, ω è esatta se e solo se è chiusa e cioè se e solo se $a=-1$.

Determiniamo le primitive di ω in corrispondenza di $a=-1$. Una funzione differenziabile f è una primitiva di ω se e solo se $df=\omega$, cioè se

$$\begin{cases} f_x = 2x - z \\ f_y = y \\ f_z = -x \end{cases}, \qquad \begin{cases} f = x^2 - xz + \varphi(y,z) \\ \varphi_y = y \\ -x + \varphi_z = -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_y = y \\ \varphi_z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{y^2}{2} + \psi(z) \\ \psi' = 0 \end{cases}, \qquad \psi(z) = c \in \mathbb{R}$$

da cui, procedendo a ritroso,

$$f(x,y,z) = x^2 - xz + \frac{y^2}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$