

Prova scritta di Analisi Matematica 3

Esercizio 1. (8 punti)

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y|x^2 + xy|}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 2. (6 punti)Siano dati $f(x, y, z)$ e il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = u^2 + 2 \\ y = u + v \\ z = w^3 - u. \end{cases}$$

- Esprimere f_u, f_w, f_{uu} e f_{ww} in termini di $f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yy}, f_{yz}$ e f_{zz} .
- Calcolare il determinante jacobiano del cambiamento di coordinate.

Esercizio 3. (9 punti)Sia E la piramide retta avente come base il quadrato di vertici $(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0)$ e vertice $(0, 0, 2)$. Calcolare l'integrale

$$\iiint_E (2 - z) \, dx \, dy \, dz.$$

Suggerimento: integrare per strati.

Esercizio 4. (7 punti)Determinare gli eventuali valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la forma differenziale lineare

$$\omega = (2x - z) \, dx + y \, dy + ax \, dz$$

è esatta ed, eventualmente, calcolare la relativa famiglia delle primitive.