

14 gennaio 2026

Cognome Nome: _____

Matricola: _____

Fogli aggiunti escluso il presente _____

Docente: _____

1) Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$

Determinare: dominio, simmetrie, intersezioni, positività, studio agli estremi, asintoti, studio della derivata prima. Classificare eventuali punti di discontinuità e non derivabilità. Tracciare il grafico.

2) (Teoria) Formula di Taylor e ipotesi di validità. Utilizzando la formula di Taylor risolvere in seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

3) Calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

4) Definizione di equazione differenziale di ordine n , integrale generale, integrale particolare e integrale singolare.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^{2x} \\ y(0) = 0; y'(0) = 1 \end{cases}$$

5) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange. Dire se è applicabile alla funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{4 - x^2}$$

nell'intervallo $x \in [-1; 1]$, ed eventualmente determinare il punto o i punti che soddisfano il teorema

Soluzione

Esercizio 1

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$$

a) Dominio

$$e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

b) Simmetrie

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{e^{-x}} = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} \neq f(x)$$

Non ci sono simmetrie

c) Positività

$$f(x) > 0 \text{ per } x^2 + 1 > 0 \text{ e } e^x > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Funzione sempre positiva

d) Intersezioni con gli assi

- Asse y: $f(0) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ punto (0; 1)

- Asse x: $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali (somma di quantità positive sempre maggiore di zero)
 \Rightarrow nessuna intersezione.

e) comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = 0$$

in quanto l'esponenziale tende a infinito più rapidamente

f) Studio della derivata prima

$$f'(x) = +2xe^{-x} + (x^2 + 1)(-e^{-x}) = e^{-x}(-x^2 + 2x - 1) = -e^{-x}(x^2 - 2x + 1) = -\frac{(x-1)^2}{e^x}$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ con } f'(x) = 0 \text{ solo per } x = 1, \text{ punto stazionario}$$

La funzione è sempre decrescente ad eccezione del punto $x = 1$, il quale è un punto di flesso a

tangente orizzontale il cui valore è $f(1) = \frac{2}{e}$

g) Studio della derivata seconda

$$f''(x) = e^{-x}(x-1)(x-3)$$

La derivata seconda è positiva, ossia convessa per $x < 1 \cup x > 3$

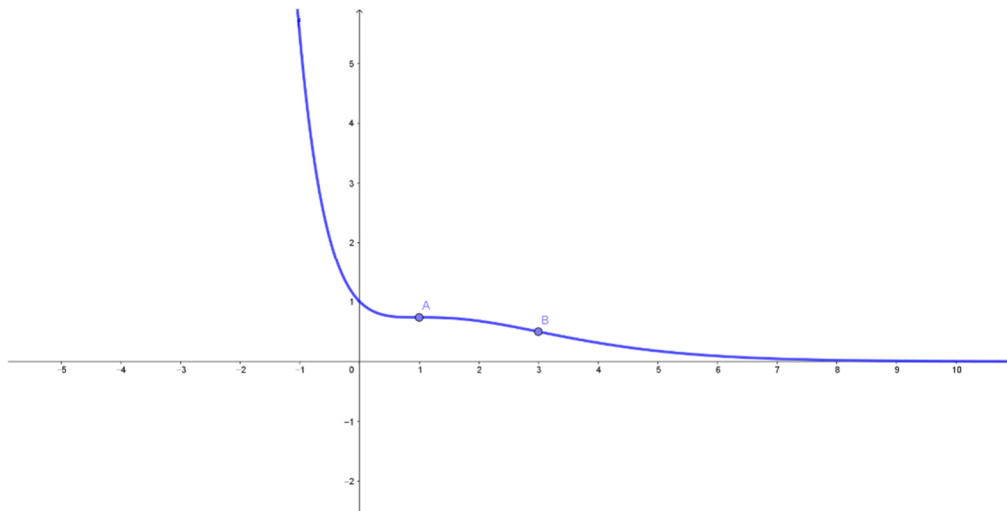
$$f''(x) < 0 \text{ ossia la funzione è concava per } 1 < x < 3$$

$x = 1$ è un punto di flesso a tangente orizzontale $f(1) = e/2$

Il punto $x = 3$ è punto di flesso a tangente obliqua con coefficiente angolare

$$f'(3) = -\frac{(3-1)^2}{e^3} = -\frac{4}{e^3}$$

la funzione assume il valore $f(3) = \frac{10}{e^3}$



Esercizio 2

Utilizzando la formula di Taylor risolvere in seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

Numeratore e denominatore tendono entrambi a 0, quindi è presente una forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Poiché $x_0 = 0$ lo sviluppo di Taylor coincide con quello di Maclaurin.

Lo sviluppo di Maclaurin di $\sin x$ è:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

sostituendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^5}{5!}}{x^5} = \frac{1}{5!}$$

È necessario effettuare lo sviluppo fino al termine di grado x^5 in quanto i termini precedenti si semplificano.

Esercizio 3

Si tratta di un integrale improprio (o integrale generalizzato) nel quale l'estremo superiore è infinito, ossia l'integrale ha una forma del tipo:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Per cui l'intervallo d'integrazione non è limitato.

L'integrale si risolve effettuando il passaggio al limite, ossia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Si calcola innanzitutto l'integrale indefinito che in questo caso si risolve per parti.

Si sceglie $\ln x$ come fattore finito mentre $\frac{1}{x^2}$ come fattore differenziale.

Di conseguenza si ottiene:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

Sostituendo nella precedente:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{1}{\beta} - \left(-\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1} \right) \right] = 1$$

0 0 = 0

$$\boxed{\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1}$$

Esercizio 4

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^{2x} \\ y(0) = 0; y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti, la cui soluzione generale si ottiene come:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$$

dove:

- y_0 è la soluzione dell'equazione omogenea associata;
- \bar{y} è una soluzione particolare dell'equazione completa, che possiamo determinare con il metodo della somiglianza

Si determina la **soluzione** y_0

Consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' - y' - 2y = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Risolvendo:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$$

Quindi la soluzione dell'omogenea è:

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

Si calcola la soluzione particolare \bar{y} (metodo della somiglianza)

Poiché e^{2x} è soluzione della equazione omogenea y_0 , dobbiamo tener conto della molteplicità.

Per cui si ha:

$$\bar{y}(x) = Axe^{2x}$$

Calcolando le derivate:

$$\bar{y}' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}, \quad \bar{y}'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale di partenza:

$$\bar{y}'' - \bar{y}' - 2\bar{y} = (4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - (Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) - 2(Axe^{2x}) = 3Ae^{2x}$$

Dalla quale si determina il valore dell'unico parametro A :

$$3Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Quindi:

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{3}xe^{2x}$$

La soluzione generale sarà:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

Applicando le condizioni iniziali del problema di Cauchy

Condizione $y(0) = 0$

$$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = -C_1}$$

Condizione $y'(0) = 1$

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}xe^{2x} \Rightarrow \boxed{2C_1 - C_2 + \frac{1}{3} = 1}$$

dalle 2 equazioni si ricava:

$$3C_1 + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{2}{9}, C_2 = -\frac{2}{9}}$$

La soluzione finale del problema

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{9}e^{2x} - \frac{2}{9}e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x}}$$

Esercizio 5

Data la funzione

$$f(x) = 2x - \sqrt{4 - x^2}$$

dire se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $x \in [-1; 1]$, ed eventualmente determinare il punto o i punti che lo soddisfano.

Il teorema di Lagrange (o del valore medio) afferma che:

Se f è continua nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo (a, b) , allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

In altre parole, la derivata in x_0 è uguale al coefficiente angolare della retta secante tra $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Si verifica se sono soddisfatte le ipotesi del teorema

Continuità

- $2x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt{4 - x^2}$ è continua per $x \in [-2, 2]$ in quanto perché il radicando deve soddisfare la condizione $4 - x^2 \geq 0$.

Per cui la funzione è continua nell'intervallo $[-1, 1]$.

Derivabilità

Si calcola la derivata prima

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

La funzione è derivabile per $-2 < x < 2$, di conseguenza $f(x)$ è derivabile in $(-1, 1)$

Le ipotesi sono soddisfatte, quindi è possibile applicare il teorema di Lagrange.

Si calcola il valore della funzione agli estremi dell'intervallo $a = -1$ e $b = 1$.

$$f(-1) = 2(-1) - \sqrt{4 - (-1)^2} = -2 - \sqrt{3} = -2 - \sqrt{3}$$

$$f(1) = 2(1) - \sqrt{4 - 1^2} = 2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

Sostituendo nella relazione del teorema di Lagrange

$$2 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2 - \sqrt{3} - (-2 - \sqrt{3})}{1 - (-1)}$$

$$2 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4}{2}$$

$$2 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 2$$

$$\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Quest'ultimo è il punto che soddisfa il teorema di Lagrange.