

Cagliari, 24/01/2025

Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)

MATRICOLA _____

NOME e COGNOME _____

1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino l'ellisse di centro $C(-1; 0)$ e semiassi orizzontale a e verticale b di lunghezza pari a 3 e 2 rispettivamente, nonché la retta passante per i punti $A(-2; 4)$ e $B(1; -2)$.

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra l'ellisse e la retta.

2) Studio di funzione: La morte di Napoleone Bonaparte (12 punti)

Il 5 maggio 1821, durante il suo esilio sull'isola di Sant'Elena, morì Napoleone Bonaparte. La causa ufficiale della sua morte è stata attribuita a un cancro allo stomaco, ma ci sono state molte speculazioni riguardo a un possibile avvelenamento da arsenico. L'arsenico è un metalloide altamente tossico che si trova naturalmente in alcuni minerali e può essere rilasciato nell'ambiente attraverso attività industriali. È noto per essere uno dei veleni più antichi e letali, utilizzato storicamente per avvelenamenti intenzionali. L'arsenico agisce interferendo con vari processi cellulari, in particolare inibendo la produzione di ATP, la principale fonte di energia delle cellule, portando a danni cellulari e alla morte delle cellule. La morte può sopraggiungere in un tempo che può variare da poche ore a diversi giorni.

Si ipotizzi che Napoleone sia stato avvelenato con l'arsenico e si modellizzi la concentrazione di arsenico nel suo sangue (in mg/L) in funzione del tempo (in ore) tramite la seguente funzione:

$$C(t) = kt e^{-\frac{t}{k}}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

- Supponendo che la morte di Napoleone sia sopraggiunta dopo 5 ore, in corrispondenza del momento di massima concentrazione di arsenico, si ricavi il valore di k . (2 punti)
- Si calcoli il valore massimo della concentrazione di arsenico nel sangue. (1 punto)
- Utilizzando il valore di k trovato, studiare la funzione $C(t)$, tracciandone il grafico. (7 punti)
- Ricavare (con uno studio per punti) dopo quanto tempo la concentrazione di veleno nel sangue scende al di sotto di 1 mg/L. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Crescita di una popolazione batterica (8 punti)

Viene coltivata una popolazione batterica in un ambiente con risorse limitate per un periodo di tempo pari a due anni. Si osserva che la velocità di crescita dei batteri può essere stimata dalla seguente funzione:

$$v(t) = \frac{6t + 12}{t^2 + 5t + 4}$$

Dove il tempo è dato in secondi.

- Data una popolazione iniziale di 100 batteri, calcolare il numero di batteri presenti dopo un minuto. (6 punti)
- Calcolare quanti nuovi batteri si formano nel corso del primo anno e quanti nel corso del secondo anno. (2 punti)

4) Statistica: Efficienza di germinazione (5 punti)

In tre campi diversi viene seminato lo stesso tipo di sementi, ottenendo la seguente tabella che mostra il numero di piante germogliate e non per ognuno dei campi:

DATI OSSERVATI	Germogliate	Non germogliate	TOTALE
Campo 1	328	107	435
Campo 2	211	98	309
Campo 3	401	171	572
TOTALE	940	376	1316

- Verificare, tramite un test adeguato, l'ipotesi che i campi presentino la stessa efficienza di germinazione (numero di piante germogliate sul totale). (4 punti)
 - Ricavare l'efficienza di germinazione di ciascun campo ed indicare quello ad efficienza maggiore. (1 punto)
-

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = -1 \quad y_C = 0 \quad a = 3 \rightarrow a^2 = 9 \quad b = 2 \rightarrow b^2 = 4$$
$$x_A = -2 \quad y_A = 4 \quad x_B = 1 \quad y_B = -2$$

SOLUZIONE

Equazione dell'ellisse:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \rightarrow 4x^2 + 9y^2 + 8x - 32 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow y = -2x$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + 8x - 32 = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$5x^2 + x - 4 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = -1 \\ x_{P2} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -x_P + 1$ e, perciò, facendo attenzione a cambiare di segno x_P :

$$\begin{cases} y_{P1} = 2 \\ y_{P2} = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$P_1(-1; 2), P_2\left(\frac{4}{5}; -\frac{8}{5}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$C(t) = kt e^{-\frac{t}{k}} \quad t_{C_{Max}} = 5 \text{ hr} \quad [C] = \frac{mg}{L}$$

a)

Il valore massimo della funzione si ottiene laddove la derivata prima si annulla:

$$C'(t) = k \left[e^{-\frac{t}{k}} + t \left(-\frac{1}{k} \right) e^{-\frac{t}{k}} \right]$$

$$C'(t) = k \left(1 - \frac{t}{k} \right) e^{-\frac{t}{k}}$$

Il problema ci dice che il massimo della funzione viene raggiunto per $t = t_{C_{Max}} = 5 \text{ hr}$, perciò il valore di k sarà calcolato imponendo che la derivata prima si annulli in corrispondenza del suddetto valore della variabile t . Ricordando che un esponenziale con base positiva è sempre strettamente positivo e che il tempo è una variabile necessariamente positiva, si ha:

$$C'(t) = 0 \rightarrow 1 - \frac{t_{C_{Max}}}{k} = 0 \rightarrow 1 - \frac{5}{k} = 0 \rightarrow k = 5$$

Per cui, possiamo finalmente scrivere:

$$C(t) = 5t e^{-\frac{t}{5}}$$

b)

Il valore massimo della concentrazione si avrà dopo 5 ore, perciò, sostituendo questo valore nella funzione $C(t)$ si ha $C = C_{Max}$:

$$C_{Max} = C(t = 5) = 25 e^{-1} = \frac{25}{e} = 9.197 \frac{mg}{L} \approx 9.2 \frac{mg}{L}$$

c)

Lo studio della funzione $C(t)$ dev'essere fatto in considerazione del fatto che sia la variabile indipendente t che quella dipendente C corrispondano a grandezze fisiche positive. Perciò, il grafico della funzione ed i valori ad esso associati interesseranno solo il primo quadrante (ove ascissa ed ordinata sono entrambe positive). Queste considerazioni permettono delle semplificazioni nello studio di funzione, andando ad escludere tutto ciò che riguarda le regioni di spazio esterne al primo quadrante stesso.

$$C(t) = 5t e^{-\frac{t}{5}}$$

- Dominio:

$$D: \forall t \in \mathbb{R} \quad (t \geq 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$C(t) = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow P_0(0; 0)$$

- Intersezioni con l'asse delle ordinate:

$$t = 0 \rightarrow C(t = 0) = 0 \rightarrow P_0(0; 0)$$

- Studio del segno:

$$C(t) > 0 \rightarrow 5t e^{-\frac{t}{5}} > 0$$

$$5t > 0 \rightarrow t > 0$$

$$e^{-\frac{t}{5}} > 0 \rightarrow \forall t \in R$$

$$C(t) > 0 \rightarrow t > 0$$

- Comportamento asintotico:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5t e^{-\frac{t}{5}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t}{e^{\frac{t}{5}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t}{e^{\frac{t}{5}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5}{1 \cdot \frac{1}{5} e^{\frac{t}{5}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{e^{\frac{t}{5}}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

- Studio della derivata prima ed estremi relativi:

$$C'(t) = 5 \left(1 - \frac{t}{5} \right) e^{-\frac{t}{5}}$$

$$C'(t) = 0 \rightarrow 1 - \frac{t}{5} = 0 \rightarrow t = 5$$

$$C(t = 5) \approx 9.2 \rightarrow M(5; 9.2)$$

$$C'(t) > 0$$

$$1 - \frac{t}{5} > 0 \rightarrow 5 - t > 0 \rightarrow -t > -5 \rightarrow t < 5$$

$$e^{-\frac{t}{5}} > 0 \rightarrow \forall t \in R$$

$$C'(t) > 0 \rightarrow t < 5$$

- Studio della derivata seconda e punti di flesso:

$$C'(t) = 5 \left(1 - \frac{t}{5}\right) e^{-\frac{t}{5}} = 5 e^{-\frac{t}{5}} - \frac{t}{5} e^{-\frac{t}{5}}$$

$$C''(t) = -1 \cdot e^{-\frac{t}{5}} + (5 - t) \cdot \left(-\frac{t}{5}\right) e^{-\frac{t}{5}}$$

$$C''(t) = \left(\frac{t}{5} - 2\right) e^{-\frac{t}{5}}$$

$$C''(t) = 0 \rightarrow t = 10 \text{ hr}$$

$$C(t = 10) = 6.767 \frac{\text{mg}}{\text{L}} \approx 6.77 \frac{\text{mg}}{\text{L}}$$

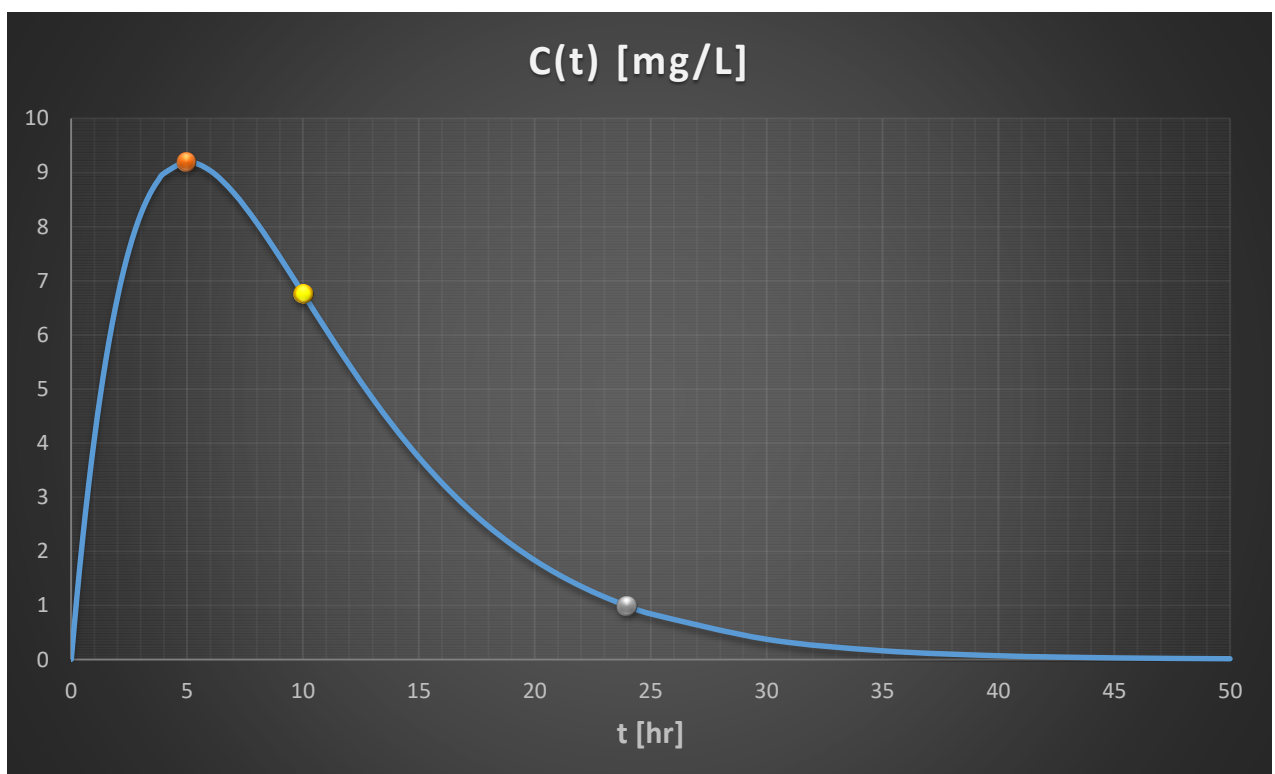
F(10; 6.77)

$$C''(t) > 0$$

$$\left(\frac{t}{5} - 2\right) > 0 \rightarrow t > 10$$

$$e^{-\frac{t}{5}} > 0 \rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$$

$$C''(t) > 0 \rightarrow t > 10$$



d)

Di seguito, viene riportata la tabella relativa allo studio della funzione per punti. La concentrazione scende al di sotto di il valore di 1 mg/L dopo 24 ore.

t [hr]	C(t) [mg/L]
0	0
0.25	1.189
0.5	2.262
0.75	3.228
1	4.094
1.25	4.868
1.5	5.556
1.75	6.166
2	6.703
2.25	7.173
2.5	7.582
2.75	7.933
3	8.232
3.25	8.483
3.5	8.690
3.75	8.857
4	8.987
5	9.197
6	9.036
7	8.631
8	8.076
9	7.438
10	6.767
11	6.094
12	5.443
13	4.828
14	4.257
15	3.734
16	3.261
17	2.837
18	2.459
19	2.125
20	1.832
21	1.575
22	1.351
23	1.156
24	0.988
25	0.842
30	0.372
35	0.160
40	0.067
45	0.028
50	0.011

3) INTEGRALE

DATI

$$N_0 = 100 \text{ batteri}; \quad [t] = \text{s} \quad t_x = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

a)

La funzione che dà il numero di batteri in funzione del tempo è data dall'integrale indefinito di $v(t)$:

$$N(t) = \int v(t) dt$$

Per calcolare l'integrale indefinito della funzione, si deve scomporre la funzione fratta mediante il metodo dei fratti semplici:

$$\int v_p(t) dt = \int \frac{6t + 12}{t^2 + 5t + 4} dt = 6 \int \frac{t + 2}{(t + 1)(t + 4)} dt$$

$$\frac{t + 2}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t + 4} = \frac{(A + B)t + (4A + B)}{(t + 1)(t + 4)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 4A + B = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Perciò:

$$\frac{6t + 12}{t^2 + 5t + 4} = \frac{2}{t + 1} + \frac{3}{t + 4}$$

Perciò:

$$\frac{6t + 12}{t^2 + 5t + 4} = 6 \frac{t + 2}{t^2 + 5t + 4} = 6 \left(\frac{1/3}{t + 1} + \frac{2/3}{t + 4} \right) = \frac{2}{t + 1} + \frac{4}{t + 4}$$

Possiamo così svolgere l'integrale definito per il primo minuto, quindi 60 secondi:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \int_0^{60} v(t) dt = 100 + \int_0^{60} \left(\frac{2}{t + 1} + \frac{4}{t + 4} \right) dt = \\ &= 100 + 2\ln(60 + 1) + 4\ln(60 + 4) - [2\ln(1) + 4\ln(4)] \end{aligned}$$

Quindi:

$$N = 100 + 2\ln(61) + 4\ln(64) - 4\ln(4) = 119 \text{ *batteri*}$$

b)

Allo stesso modo, si può trovare il numero di batteri sviluppati in un anno e nel corso di due anni. Innanzitutto, siccome l'unità di misura temporale utilizzata è il secondo, calcoliamo quanti secondi ci sono in un anno:

$$1 \text{ yr} = 3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s} = 31\,536\,000 \text{ s}$$

$$2 \text{ yr} = 63\,072\,000 \text{ s}$$

Da cui:

$$N(1 \text{ yr}) = 100 + 2\ln(31\,536\,000 + 1) + 4\ln(31\,536\,000 + 4) - 4\ln(4) = 198 \text{ batteri}$$

$$N(2 \text{ yr}) = 100 + 2\ln(63\,072\,000 + 1) + 4\ln(63\,072\,000 + 4) - 4\ln(4) = 202 \text{ batteri}$$

Essendo richiesto solo il numero di nuovi batteri nel corso dell'anno:

$$N_1 = N(1 \text{ yr}) - 100 = 98 \text{ batteri}$$

$$N_2 = N(2 \text{ yr}) - N_1 - 100 = 4 \text{ batteri}$$

Perciò, nel corso del primo anno si sono formati 98 batteri, mentre nel secondo anno si sono formati solo 4 batteri.

Questo risultato ha senso, ricordando che si tratta di un ambiente di crescita a risorse limitate e che la funzione $N(t)$ è di tipo logaritmico.

4) STATISTICA

Il problema fornisce una tabella di dati osservati:

DATI OSSERVATI	Germogliate	Non germogliate	TOTALE
Campo 1	328	107	435
Campo 2	211	98	309
Campo 3	401	171	572
TOTALE	940	376	1316

a)

Si deve verificare l'ipotesi che i campi abbiano la stessa efficienza di germinazione. Per far ciò, dovremo effettuare un test di tipo X^2 che necessita l'elaborazione di una tabella di dati attesi, ipotizzando che l'efficienza sia la stessa per tutti i campi e che essa sia pari ad il valore dato dal seguente rapporto:

$$eff_{attesa} = \frac{\text{Totale piante germogliate}}{\text{Totale piante}} = \frac{940}{1316} = 0.7143 = 71.43\%$$

La tabella dei dati osservati si costruisce ipotizzando di applicare questo valore al numero totale di piante di ciascuno dei campi:

DATI ATTESI	Germogliate	Non germogliate
Campo 1	310.71	124.29
Campo 2	220.71	88.29
Campo 3	408.57	163.43

Prima di applicare la formula per il valore pivot del test, è necessario calcolare il numero di gradi di libertà:

$$gdl = (\text{numero righe} - 1)(\text{numero colonne} - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 2$$

Nella formula del valore pivot bisogna tener conto di tutti i sei elementi della tabella: germogliate e non germogliate, ottenendo:

$$X^2_2 = \sum_1^6 \frac{(n_{attesi} - n_{osservati})^2}{n_{attesi}} = 5.353$$

Confrontando questo valore con quelli tabulati (a destra), si ottiene che l'ipotesi nulla H_0 è rifiutabile con un grado di affidabilità compreso tra il 90% e il 95%.

Test χ^2				
α	0.10	0.05	0.01	0.001
1	2.706	3.841	6.635	10.828
2	4.605	5.991	9.210	13.816

b)

L'efficienza di germinazione è data semplicemente dal rapporto, calcolato per ciascuno dei campi, tra il numero di piante germogliate e quello totale. I risultati che si ottengono sono i seguenti:

EFFICACIA	
Campo 1	75.40%
Campo 2	68.28%
Campo 3	70.10%

Il campo 1 risulta chiaramente quello con la maggiore efficienza di germinazione.