

18 dicembre 2025

Cognome Nome: _____

Matricola: _____

Fogli aggiunti escluso il presente _____

Docente: _____

1) Definizione di equazione differenziale di ordine n , integrale generale, integrale particolare e integrale singolare.

Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y' = \cos(x)$$

2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y = xy' - \frac{(y')^2}{4} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot e^{2n} - \ln(n)^{20} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{9^n + (-1)^{2n} \cdot n^4 + 20^{-n}}$$

~~~~~

## Soluzione

1) Determinare l'integrale generale

$$y'' - y' = \cos x$$

Calcolo dell'integrale dell'equazione omogenea associata

$$y'' - y' = 0$$

ad essa corrisponde l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$$

dalla quale si ricava:

$$\lambda = 0, \lambda = 1$$

per cui la soluzione omogenea:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x$$

Soluzione particolare - Metodo della somiglianza

Il termine noto è  $b(x) = \cos x$ , nel quale  $\gamma \pm \mu i \neq \alpha \pm \beta i$ , per cui non deve essere presa in considerazione la molteplicità.

La soluzione particolare ha la seguente forma:

$$\bar{y} = A \sin x + B \cos x$$

Si calcolano le derivate prima e seconda

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= A \cos x - B \sin x \\ \bar{y}'' &= -A \sin x - B \cos x\end{aligned}$$

Sostituiamo nell'equazione differenziale di partenza

$$\begin{aligned}-A \sin x - B \cos x - A \cos x + B \sin x &= \cos x \\ (B - A) \sin x - (A + B) \cos x &= \cos x\end{aligned}$$

Affinché l'equazione sia soddisfatta deve essere:

$$\begin{cases} B - A = 0 \\ -A - B = 1 \end{cases}$$

Risolvendo

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

Soluzione generale

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$$

2) Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y = xy' - \frac{(y')^2}{4} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione di Clairaut che ammette una soluzione generale e una soluzione singolare.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y = xy' - \frac{(y')^2}{4}$$

differenziando primo e secondo membro si ottiene:

$$y' = y' + xy'' - \frac{1}{4}2y'y'' \Rightarrow xy'' - \frac{1}{4}2y'y'' = 0$$

ossia:

$$y'' \left( x - \frac{y'}{2} \right) = 0$$

L'equazione è soddisfatta per  $y'' = 0$  e  $\left( x - \frac{y'}{2} \right) = 0$

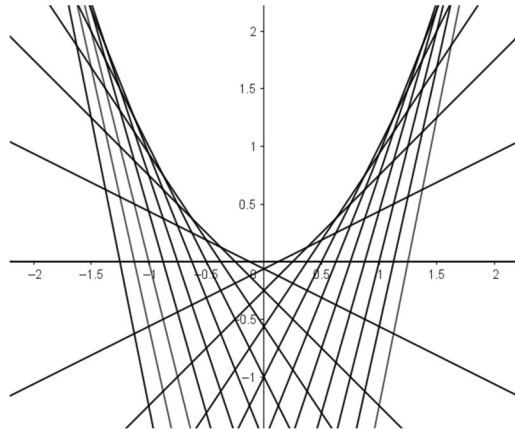
### Caso 1

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = C$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza si ottiene la soluzione generale

$$y = Cx - \frac{C^2}{4}$$

Questa soluzione rappresenta una famiglia di rette al variare della costante C



### Caso 2

$$x - \frac{y'}{2} = 0$$

Si risolve in forma parametrica, posto  $y' = t$  e sostituendo nella precedente equazione e nell'equazione differenziale si ottiene:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{2} \\ y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{t}{2} \\ y(t) = \frac{t^2}{4} \end{cases}$$

In questo caso la soluzione può essere espressa anche in forma cartesiana

$$y = x^2$$

Questa soluzione rappresenta la curva involuppo, ossia la curva tangente alla famiglia di rette al variare di C.

Determiniamo la soluzione particolare che soddisfa la condizione  $y(1) = 1$

Sostituendo nella soluzione generale

$$y = Cx - \frac{C^2}{4}$$

Si ricava il valore di C

$$1 = C - \frac{C^2}{4} \Rightarrow C^2 - 4C + 4 = 0 \Rightarrow (C - 2)^2 = 0 \Rightarrow C = 2$$

L'integrale particolare ha equazione

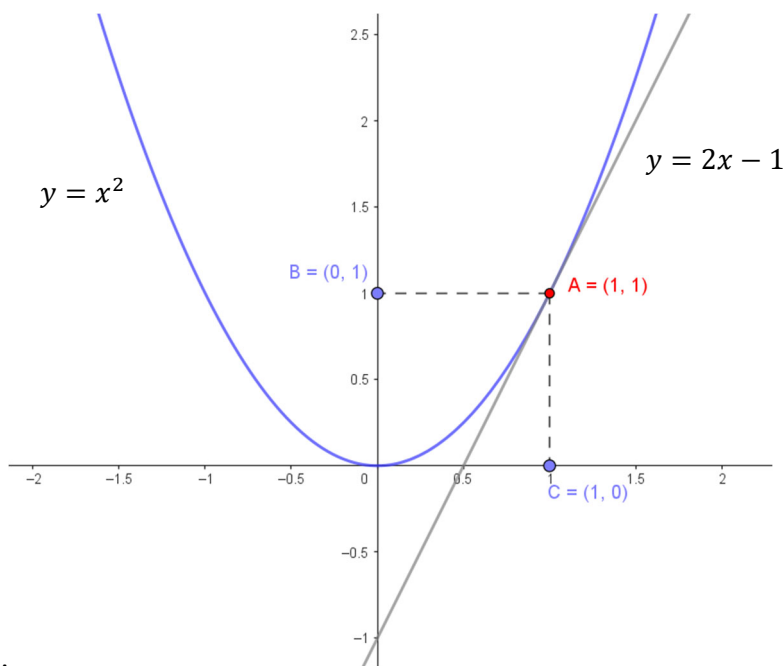
$$y = 2x - 1$$

La condizione  $y(1) = 1$  soddisfa anche l'integrale singolare  $y = x^2$ , infatti sostituendo si ottiene un'identità  $1=1$ .

Il problema di Cauchy ammette 2 soluzioni

$$y = 2x - 1 \quad e \quad y = x^2$$

Nella figura seguente è mostrata la rappresentazione grafica delle due soluzioni del problema



3) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot e^{2n} - \ln(n)^{20} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{9^n + (-1)^{2n} \cdot n^4 + 20^{-n}}$$

Possiamo trascurare:

- $\ln(n)^{20}$  e  $(-1)^{2n} \cdot n^4$ , in quanto infiniti di ordine inferiore rispetto agli altri termini
- $\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$  tende a zero perchè esponenziale con base  $0 < \frac{1}{4} < 1$
- $20^{-n}$  in quanto tende a zero

Per cui il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot e^{2n}}{9^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{e^{2n}}{9^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{e}{3}\right)^{2n} = \boxed{0}$$

Il limite tende a zero indipendentemente dal termine  $(-1)^n$  perchè l'esponenziale ha base minore di uno.

18 dicembre 2025

Cognome Nome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Fogli aggiunti escluso il presente \_\_\_\_\_

Docente: \_\_\_\_\_

1) Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = (2x + 1)e^x$$

2) Formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del primo ordine e dimostrazione.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2(n!) - 4^{2n} + 3n(n+1)!}{(-1)^n 4^n + (n+2)!}$$

~~~~~

Soluzione

1) Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = (2x + 1)e^x$$

a) Soluzione dell'equazione omogenea

$$y'' + y = 0$$

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

b) Scelta della soluzione particolare (somialianza)

Il termine noto è $b(x) = (2x + 1)e^x$, cioè, un polinomio di grado 1, moltiplicato per e^x .

Poiché e^x non è soluzione dell'omogenea, poniamo:

$$\bar{y} = (Ax + B)e^x$$

Si calcolano le derivate

$$y'_p = (Ax + B)e^x + Ae^x = (Ax + A + B)e^x$$

$$y''_p = (Ax + A + B)e^x + Ae^x = (Ax + 2A + B)e^x$$

e si sostituiscono nell'equazione differenziale di partenza

$$(Ax + 2A + B)e^x + (Ax + B)e^x = (2x + 1)e^x$$

$$(2Ax + 2A + 2B)e^x = (2x + 1)e^x$$

Confrontando i coefficienti tra primo e secondo membro:

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases}$$

Si ricava

$$A = 1, B = -\frac{1}{2}$$

ossia la soluzione particolare

$$\bar{y} = e^x \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

L'integrale generale

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare la cui forma generale è la seguente

$$y' + \alpha(x)y = b(x)$$

l'integrale generale è dato dalla formula:

$$y(x) = e^{-\int \alpha(x) dx} \left(\int e^{\int \alpha(x) dx} b(x) dx + C \right)$$

applicandola all'equazione differenziale si ottiene:

$$y(x) = e^{-\int 2 dx} \left(\int e^{\int 2 dx} e^{-x} dx + C \right)$$

$$y(x) = e^{-2x} \left(\int e^{2x} e^{-x} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\int e^x dx + C \right) = e^{-2x} [e^x + C]$$

$$y(x) = e^{-2x} [e^x + C]$$

Applicando le condizioni iniziali $y(0) = 0$ si ottiene

$$0 = e^0 [e^0 + C] \Rightarrow C = -1$$

La soluzione del problema sarà:

$$y(x) = e^{-2x} [e^x - 1]$$

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2(n!) - 4^{2n} + 3n(n+1)!}{(-1)^n 4^n + (n+2)!}$$

Possiamo trascurare:

- 4^{2n} e $(-1)^n 4^n$, in quanto infiniti di ordine inferiore rispetto agli altri termini

Per cui il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2(n!) + 3n(n+1)!}{(n+2)!}$$

Sviluppando i fattoriali

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2(n!) + 3n(n+1)n!}{(n+2)(n+1)n!}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[n^2 + 3n(n+1)]n!}{(n+2)(n+1)n!}$$

Semplificando $n!$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[n^2 + 3n(n+1)]}{(n+2)(n+1)}$$

trascurando gli infiniti di ordine superiore

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[n^2 + 3n(n+1)]}{(n+2)(n+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n^2}{n^2} = \boxed{4}$$