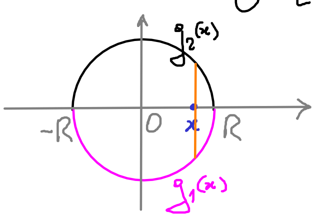
I DOMINI SEMPLICI SONO MISURABILI

DEFINIZIONE: UN SOTTOINSIEME $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ SI DICE SEMPLICE SE AMMETTE LA RAPPRESENTAZIONE $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ e } y \in [g_1(x), g_2(x)] \}$ CON $g_1, g_2 \in C^0([a,b])$.

ESEMPIO: $\overline{B}_R(0,0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-R, R] \text{ e } y \in [-\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-x^2}] \}$



TEOREMA: I DOMINI SEMPLICI SONO MISURABILI

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO, PER SEMPLICITÀ, CHE $g_1(x) \equiv 0$ E CHE $\min_{[a,b]} g_2(x) > 0$. DOBBIAMO VERIFICARE CHE $\chi_\Omega \; (= \mathbb{1}_\Omega)$ È INTEGRABILE.

PONIAMO $c = 0$ E $d = \max_{[a,b]} g_2(x)$ COSICCHÉ

$\Omega \subset Q = [a,b] \times [c,d]$. SAPPIAMO CHE È SUFFICIENTE TROVARE, PER OGNI $\varepsilon \in (0, +\infty)$, UNA PARTIZIONE $\mathcal{D}_\varepsilon$ TALE CHE $S(\mathcal{D}_\varepsilon) - s(\mathcal{D}_\varepsilon) < \varepsilon$.

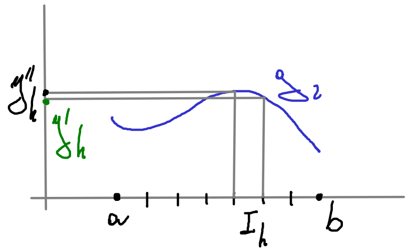
A TAL FINE, PER L'ASSOLUTA CONTINUITÀ DI g_2, PRENDIAMO $x_k = a + k\,\frac{b-a}{z}$ PER $k = 0, \dots, z$ CON z TALE CHE RISULTI $\frac{b-a}{z} < \delta$ COSICCHÉ, POSTO

$y_k' = \min_{I_k} g_2$ E $y_k'' = \max_{I_k} g_2$, RISULTI

$y_k'' - y_k' < \varepsilon$, ESSENDO $I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

SULL'ASSE y PRENDIAMO $\{ y_0 = 0 < \dots < y_s \}$

$= \{0\} \cup \{ y_k', y_k'' : k = 1, \dots, z \}$.



CON LA PARTIZIONE $\mathcal{D}_\varepsilon$ COSÌ INDIVIDUATA, SI HA:

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon) - s(\mathcal{D}_\varepsilon) =$$

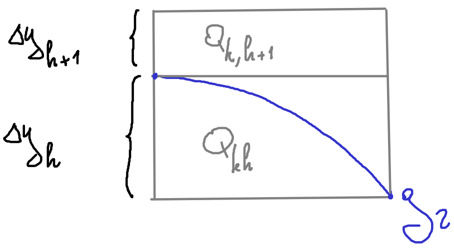
$$= \sum_{k=1}^{z} \sum_{h=1}^{s} \left[\sup_{Q_{kh}} \mathbb{1}_\Omega - \inf_{Q_{kh}} \mathbb{1}_\Omega \right] \Delta x_k \, \Delta y_h$$

$$= \sum_{k=1}^{z} \Delta x_k \sum_{h=1}^{s} \left[\sup_{Q_{kh}} \mathbb{1}_\Omega - \inf_{Q_{kh}} \mathbb{1}_\Omega \right] \Delta y_h$$

$$= \sum_{k=1}^{z} \Delta x_k \sum_{\substack{h=1 \\ Q_{kh} \cap \Gamma \neq \emptyset}}^{s} \left[\sup_{Q_{kh}} \mathbb{1}_\Omega - \inf_{Q_{kh}} \mathbb{1}_\Omega \right] \Delta y_h$$

DOVE Γ DENOTA IL GRAFICO DI $g_2(x)$. DUNQUE

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon) - s(\mathcal{D}_\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{z} \Delta x_k \sum_{\substack{h=1 \\ Q_{kh} \cap \Gamma \neq \emptyset}}^{s} \Delta y_h$$



$$S(\mathcal{D}_\varepsilon) - s(\mathcal{D}_\varepsilon) < \sum_{k=1}^{z} \Delta x_k \cdot 2\varepsilon =$$

$$= 2\varepsilon \sum_{k=1}^{z} \Delta x_k = 2\varepsilon (b-a).$$

PER L'ARBITRARIETÀ DI ε, LA CONDIZIONE È SODDISFATTA.