

## Controlli Automatici

# Schemi avanzati per il controllo di processo. Parte seconda.

**Prof. Alessandro Pisano**

**apisano@unica.it**

## Controllo in avanti («feedforward»)

Sostanziali miglioramenti nelle prestazioni di sistemi di controllo ad anello singolo o in cascata possono essere ottenuti adottando degli schemi modificati, in cui in ingresso al processo vengono sovrapposti dei contributi aggiuntivi determinati secondo architetture **a ciclo aperto**.

Tali contributi aggiuntivi sono essenzialmente di due tipi:

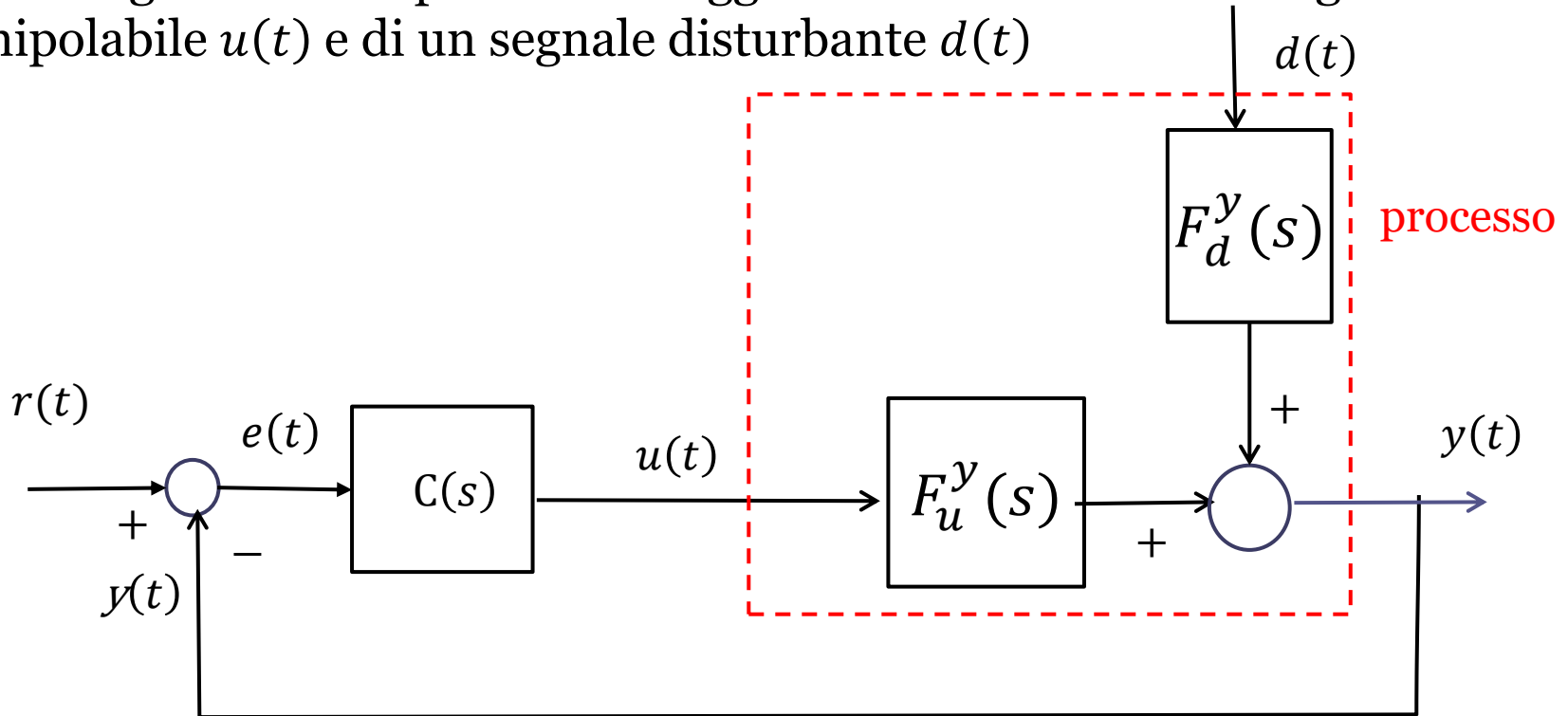
Dipendenti dal set-point

Dipendenti dal disturbo

Chiaramente, la possibilità di generare il contributo dipendente dal disturbo presuppone che quest'ultimo sia misurabile, una ipotesi che risulta soddisfatta in alcuni scenari concreti

## Schema generale

Partiamo dalla rappresentazione generale di un sistema di controllo ad anello singolo in cui il processo è soggetto all'influenza di un ingresso manipolabile  $u(t)$  e di un segnale disturbante  $d(t)$

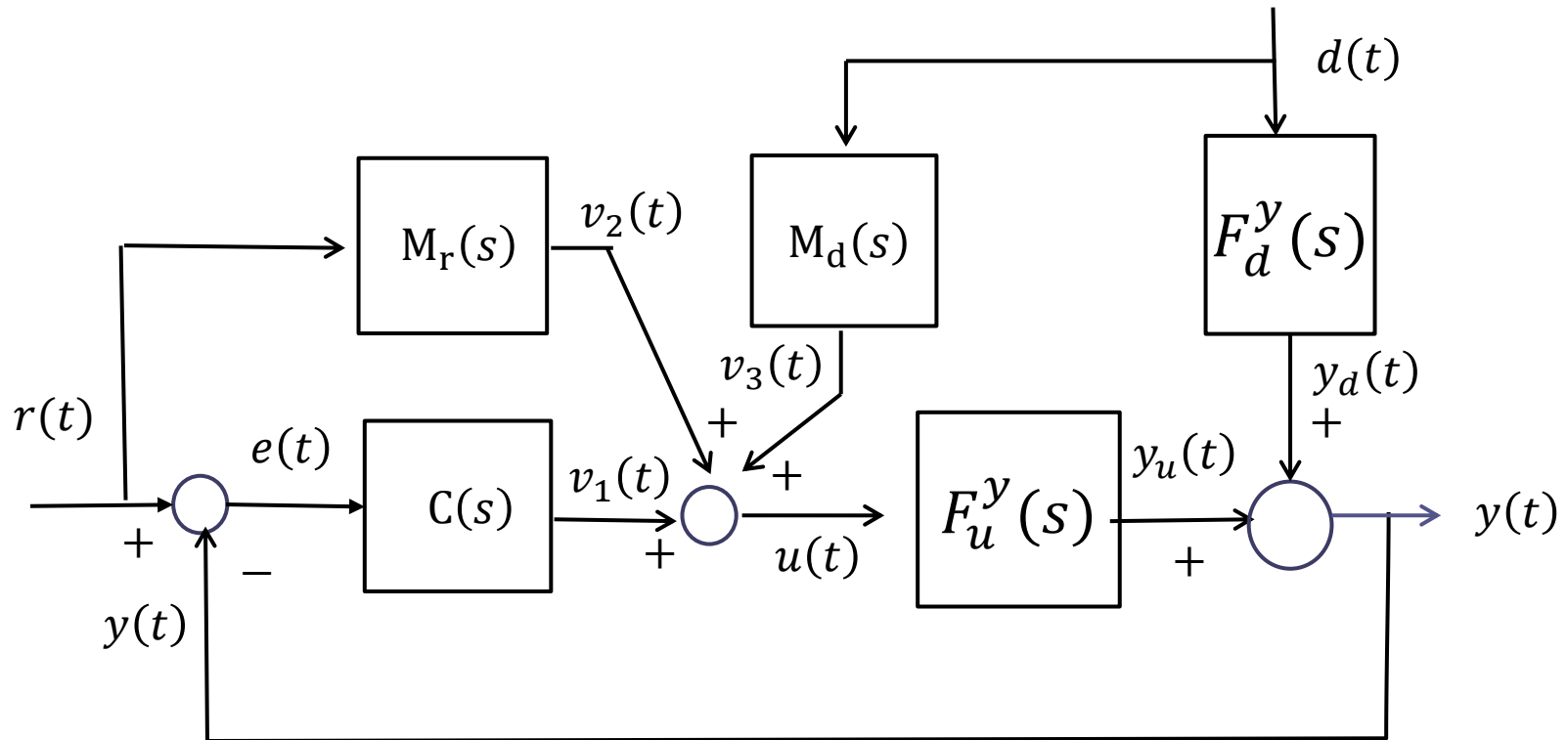


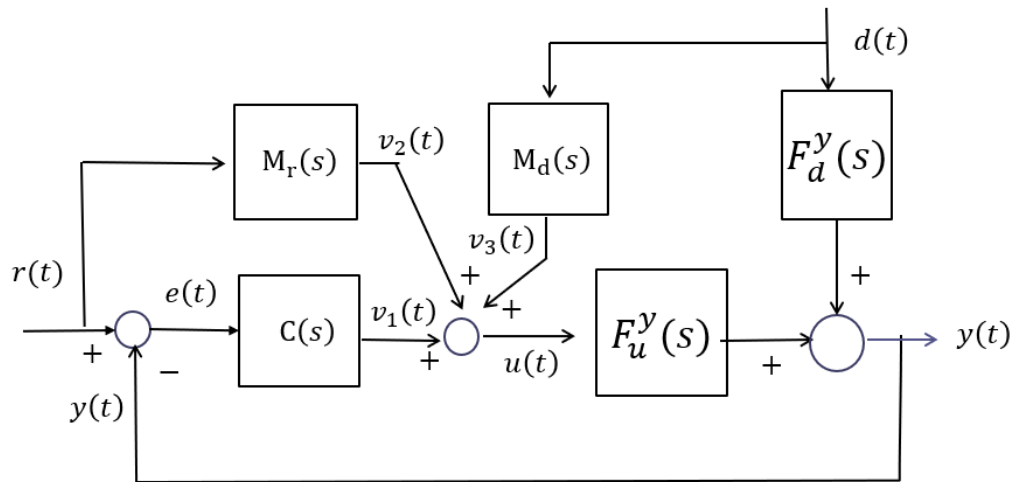
$$F_d^y(s) = \frac{N_{F_d^y}(s)}{D_{F_d^y}(s)}$$

$$F_u^y(s) = \frac{N_{F_u^y}(s)}{D_{F_u^y}(s)}$$

Espressione estesa di  $F_d^y(s)$  ed  $F_u^y(s)$  in cui compaiono esplicitamente i relativi termini a numeratore e a denominatore

L'implementazione del controllo in avanti (detto anche «in andata») si traduce nel seguente schema modificato. I contributi  $v_2(t)$  e  $v_3(t)$  sono costruiti filtrando rispettivamente il set point ed il disturbo con degli opportuni filtri aventi FdT  $M_r(s)$  ed  $M_d(s)$





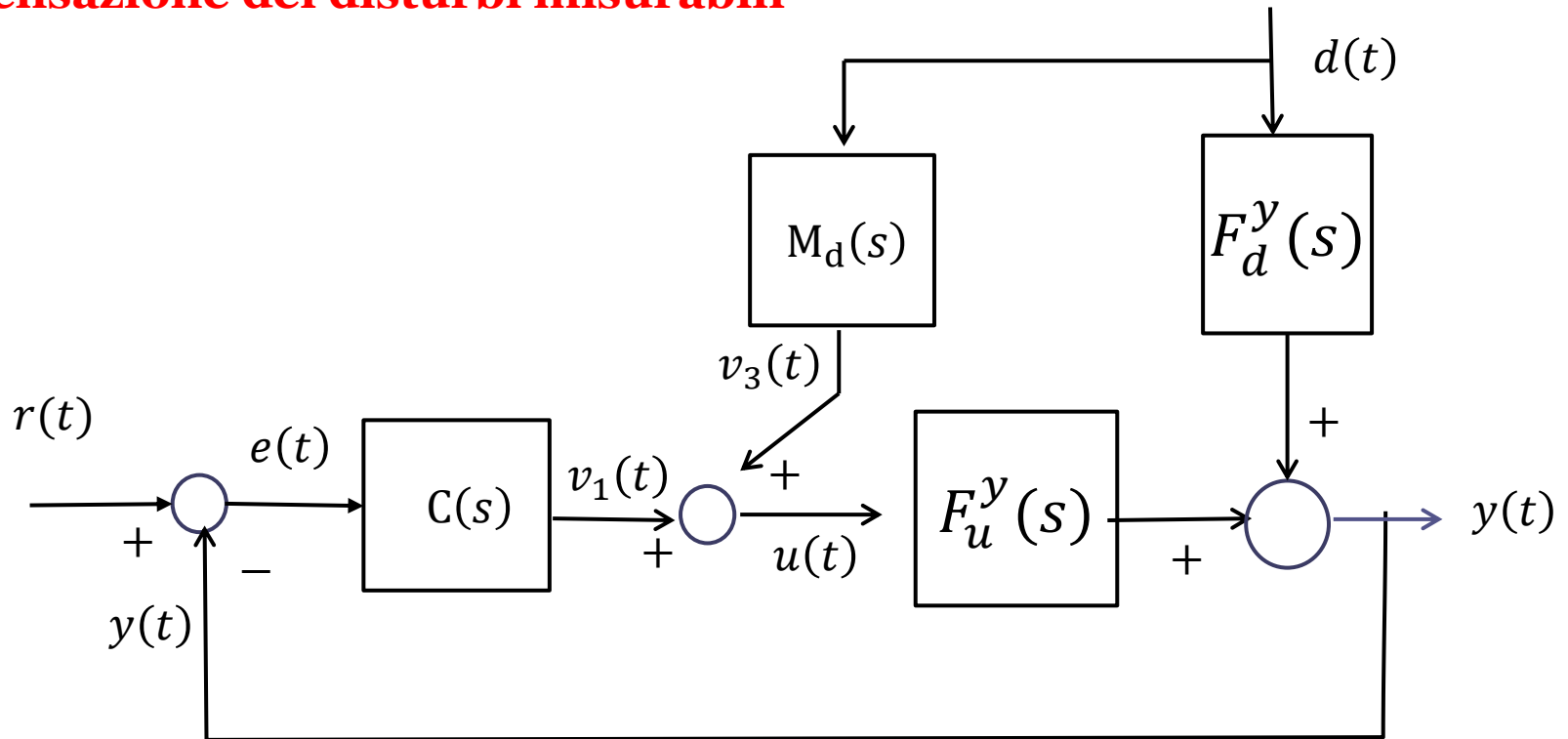
L'azione in andata è da intendersi come complementare a quella generata dal sistema in retroazione. Essa è di tipo **predittivo** in quanto interviene al manifestarsi di una causa (la variazione del set-point o la presenza del disturbo) e non del suo effetto (il relativo errore  $e(t)$ ).

Come vedremo, il progetto dei filtri  $M_d(s)$  ed  $M_r(s)$  richiede la conoscenza esatta del modello matematico del processo, e come tale la sintesi di un sistema di controllo feedforward è piuttosto sensibile ad errori nella modellazione del processo.

Discutiamo singolarmente il progetto dei due filtri. Le due azioni, considerate singolarmente, prendono il nome di:

- Compensazione dei disturbi misurabili
- Anticipo del set-point

## Compensazione dei disturbi misurabili



La FdT **a ciclo chiuso** fra il disturbo e l'uscita è la seguente:

$$W_d^y(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{F_d^y(s) + M_d(s)F_u^y(s)}{1 + C(s)F_u^y(s)}$$

La FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita è la seguente:

$$W_d^y(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{F_d^y(s) + M_d(s)F_u^y(s)}{1 + C(s)F_u^y(s)}$$

Scegliendo pertanto il filtro come segue

$$M_d(s) = -\frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)} = -\frac{N_{F_d^y}(s) D_{F_u^y}(s)}{D_{F_d^y}(s) N_{F_u^y}(s)}$$

si annulla completamente l'effetto del disturbo sul comportamento dell'uscita

Il filtro deve essere **asintoticamente stabile** e **fisicamente realizzabile**.

Se il grado relativo della FdT ingresso-uscita  $F_u^y(s)$  è maggiore del grado relativo della FdT disturbo-uscita  $F_d^y(s)$  il compensatore  $M_d(s)$  non è fisicamente realizzabile. Ciò avviene anche se la FdT ingresso uscita  $F_u^y(s)$  include un termine di ritardo maggiore di quello (eventualmente) incluso nella FdT disturbo-uscita  $F_d^y(s)$ .

In questi casi il filtro di compensazione del disturbo misurabile deve essere reso fisicamente realizzabile mediante una sua **approssimazione** (ad esempio mediante l'inserimento di poli aggiuntivi in alta frequenza).

Quando la non realizzabilità del filtro è dovuta ad un grado relativo negativo, ci si può riferire alla seguente versione approssimata:

$$\widehat{M}_d(s) = M_d(s) \frac{1}{(\tau s + 1)^h} \quad h = G_{rel}\{F_u^y(s)\} - G_{rel}\{F_d^y(s)\}$$

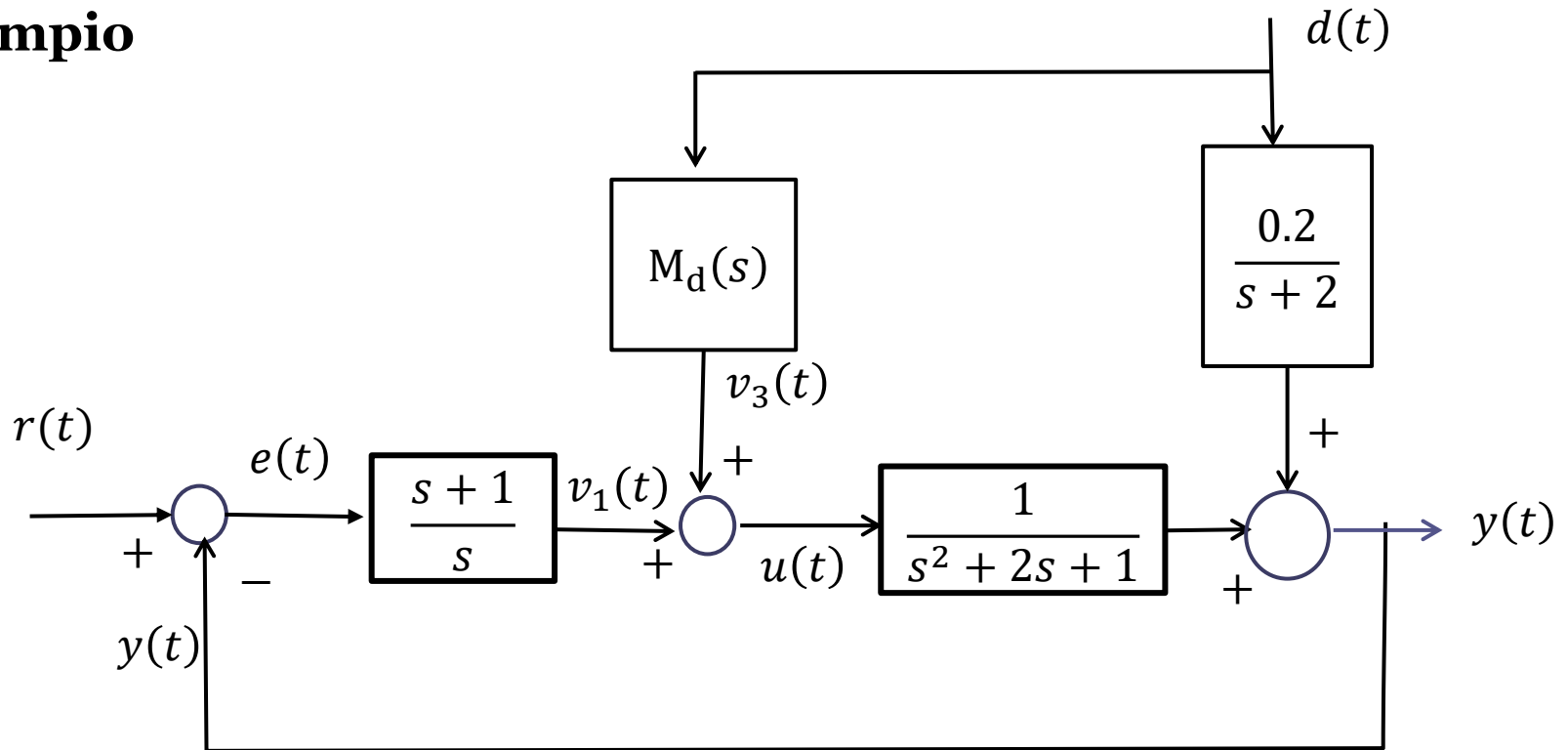
Il criterio di scelta per il valore di  $\tau$  è fare in modo che diagrammi di Bode del compensatore ideale  $M_d(s)$  e della sua versione approssimata  $\widehat{M}_d(s)$  devono coincidere **nella banda del disturbo**

Quando invece  $M_d(s)$  contiene un termine di anticipo del tipo  $e^{\delta s}$  l'unica strada percorribile è ignorare il termine di anticipo rimuovendolo dalla  $M_d(s)$ .

Se il disturbo è un segnale **lentamente variabile**, il filtro di compensazione del disturbo può essere approssimato mediante un **guadagno**

$$\widehat{M}_d(s) = M_d(0)$$

## Esempio



Il segnale disturbante  $d(t)$  ha componenti spettrali significative nella banda  $[0, \omega_d]$   $rad/s$  con  $\omega_d = 1 rad/s$

Progettare il filtro di compensazione del disturbo

## Filtro di compensazione del disturbo

$$F_d^y(s) = \frac{0.2}{s+2} \quad F_u^y(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$M_d(s) = -\frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)} = -\frac{0.2}{s+2} \cdot \frac{s^2+2s+1}{1} = -\frac{0.2s^2+0.4s+0.2}{s+2}$$



Il filtro è non fisicamente realizzabile perché il grado relativo della FdT  $F_u^y(s)$  fra l'ingresso manipolabile e l'uscita è superiore rispetto al grado relativo della FdT a ciclo aperto  $F_d^y(s)$  fra il disturbo e l'uscita uscita

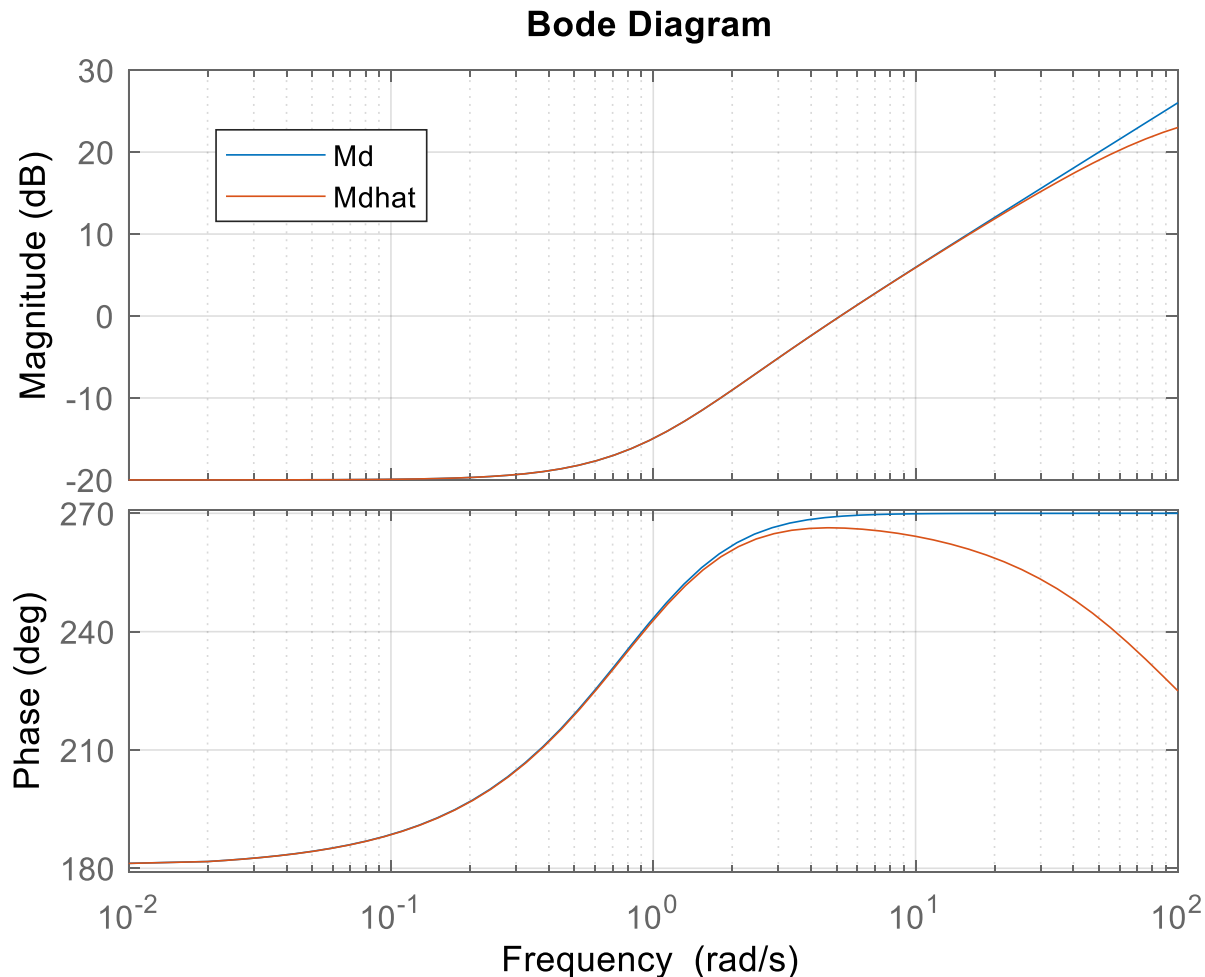
**Filtro approssimato** con l'aggiunta di un polo in alta frequenza

$$\widehat{M}_d(s) = -\frac{0.2s^2+0.4s+0.2}{(s+2)(\tau s+1)} = -\frac{0.2s^2+0.4s+0.2}{\tau s^2+(2\tau+1)s+2}$$

$$\tau = \frac{1}{100\omega_d} = 0.01s$$

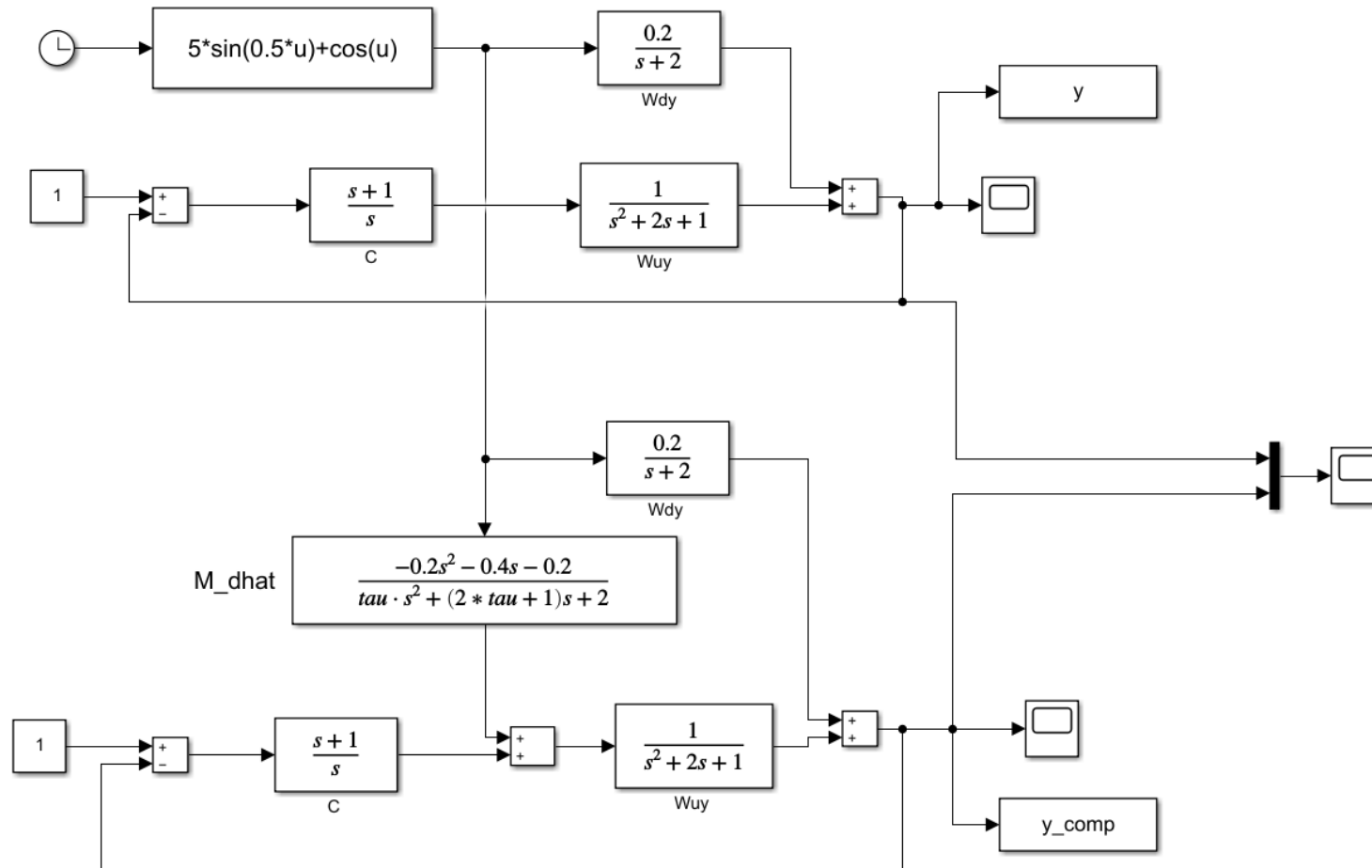
Due decadi più in alta frequenza rispetto alla banda  $\omega_d$  del disturbo

Verifichiamo che con tale scelta per la costante di tempo  $\tau$  i diagrammi di Bode del filtro e della sua versione approssimata sono sovrapposti nella banda del disturbo

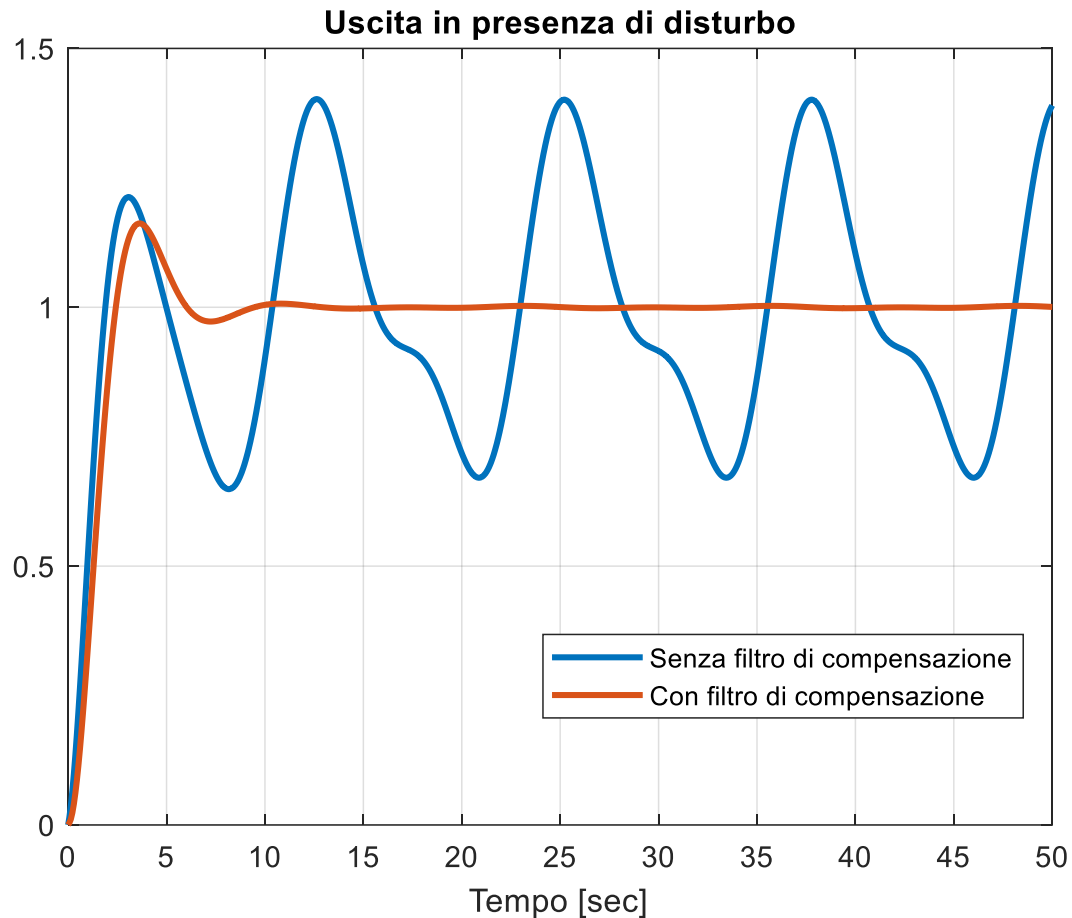


Il filtro approssimato  $\hat{M}_d(s)$  fornirà pertanto una risposta analoga a quella del filtro ideale non realizzabile  $M_d(s)$  in corrispondenza di segnali in ingresso aventi componenti spettrali nella banda  $[0, 1] \text{ rad/s}$

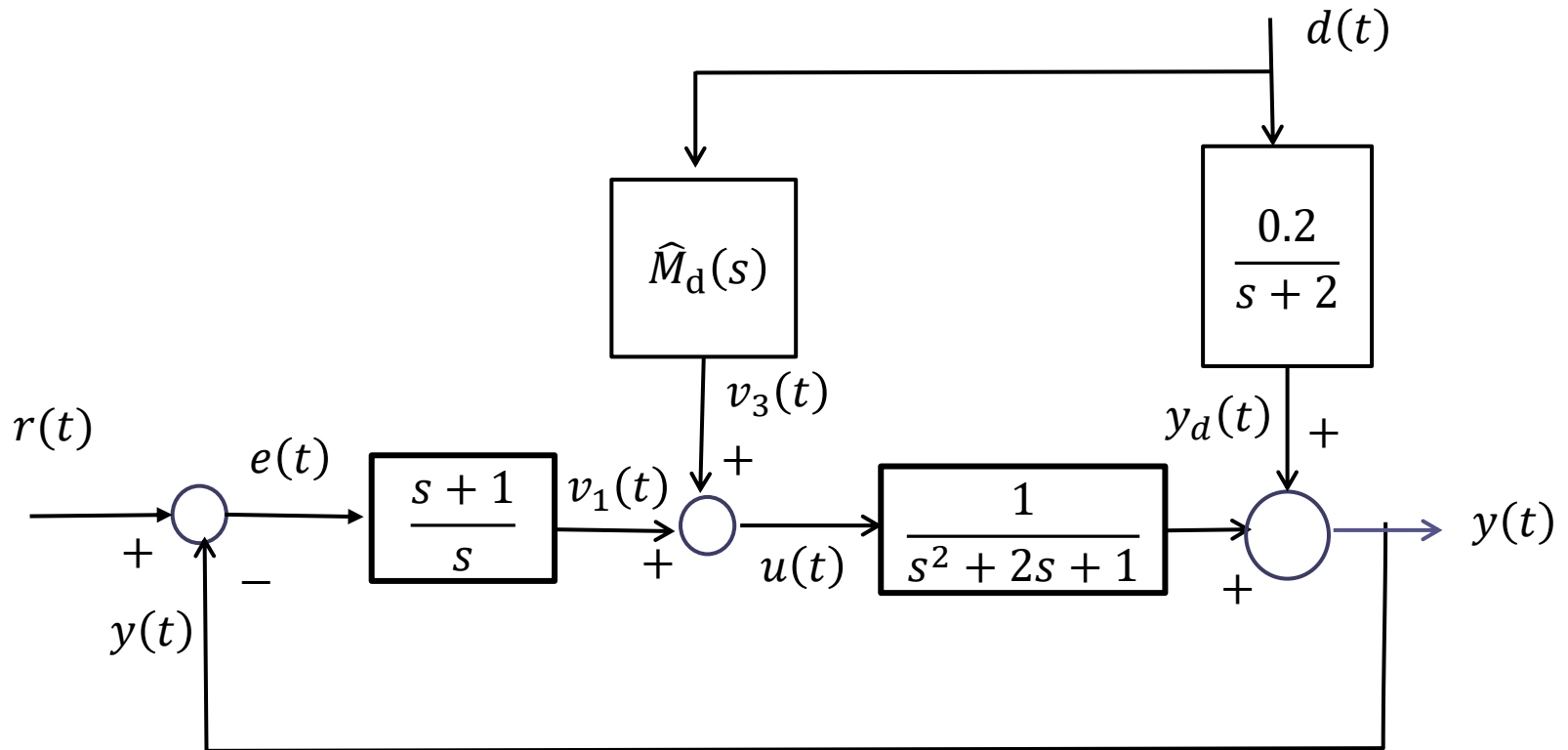
Testiamo in simulazione le prestazioni del sistema di controllo con e senza il filtro di compensazione del disturbo misurabile. Si ponga  $d(t) = 5 \sin(0.5t) + \cos(t)$



**Files** `CompDisturbiMisurabili_a.slx`  
`CompDisturbiMisurabili_a_script.m`



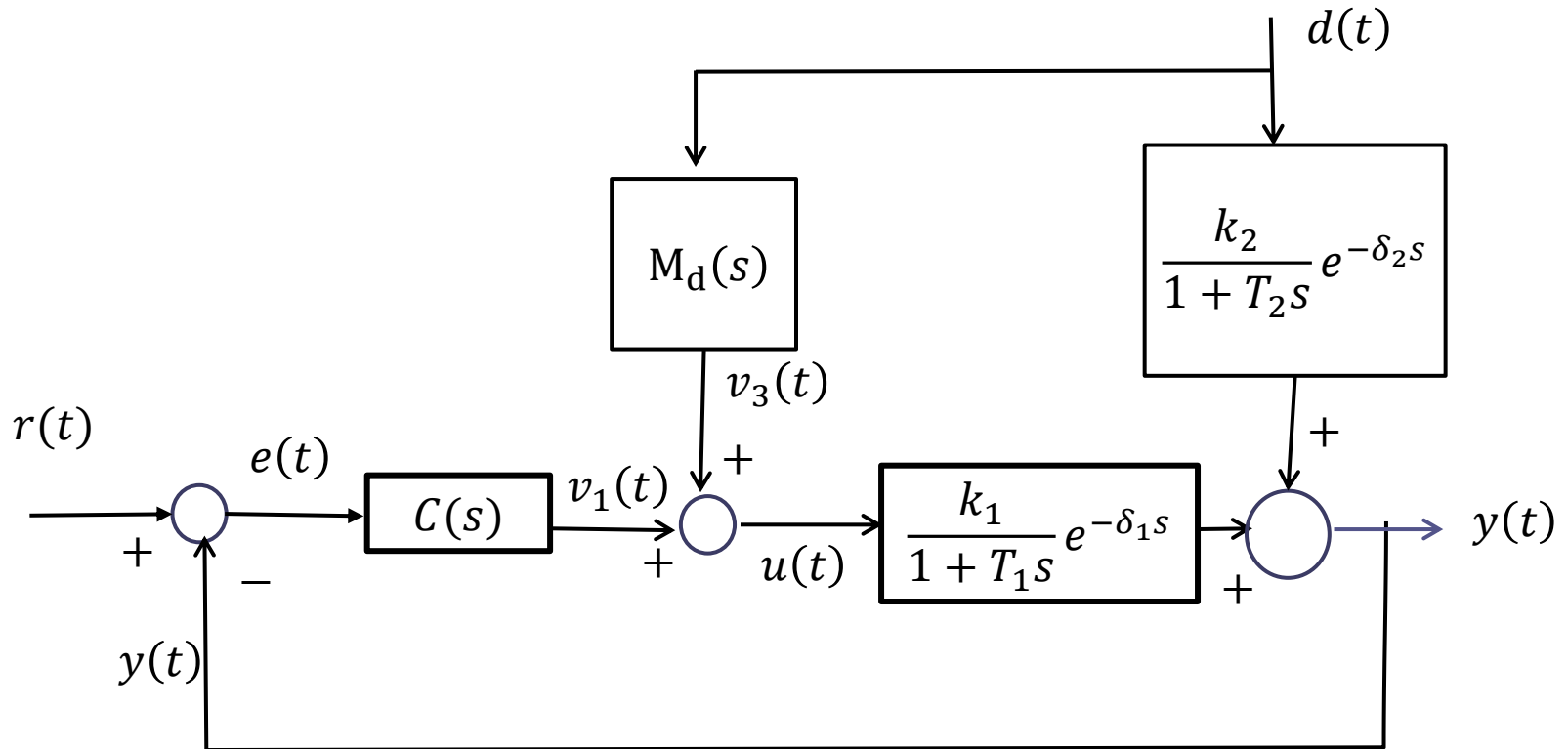
Nel sistema di controllo **con il filtro di compensazione** del disturbo, l'effetto del disturbo sull'uscita è completamente rimosso e si ottiene la medesima risposta che si otterrebbe in assenza di disturbo.



**Interpretazione:** il filtro di compensazione del disturbo genera un segnale  $v_3(t)$  che, propagandosi attraverso il processo  $\frac{1}{s^2+2s+1}$ , dà luogo ad un segnale di uscita uguale ed opposto ad  $y_d(t)$ , di fatto annullando completamente ogni effetto del disturbo sull'uscita.

# Esempio

Compensazione dei disturbi misurabili nel caso in cui le FdT ingresso-uscita e disturbo uscita sono entrambe di tipo FOPDT



## Filtro di compensazione del disturbo

$$F_u^y(s) = \frac{k_1}{1 + T_1 s} e^{-\delta_1 s}$$

$$F_d^y(s) = \frac{k_2}{1 + T_2 s} e^{-\delta_2 s}$$

$$M_d(s) = -\frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)} = -\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} e^{-(\delta_2 - \delta_1)s}$$



Il filtro  $M_d(s)$  è **fisicamente realizzabile solo se  $\delta_2 \geq \delta_1$**

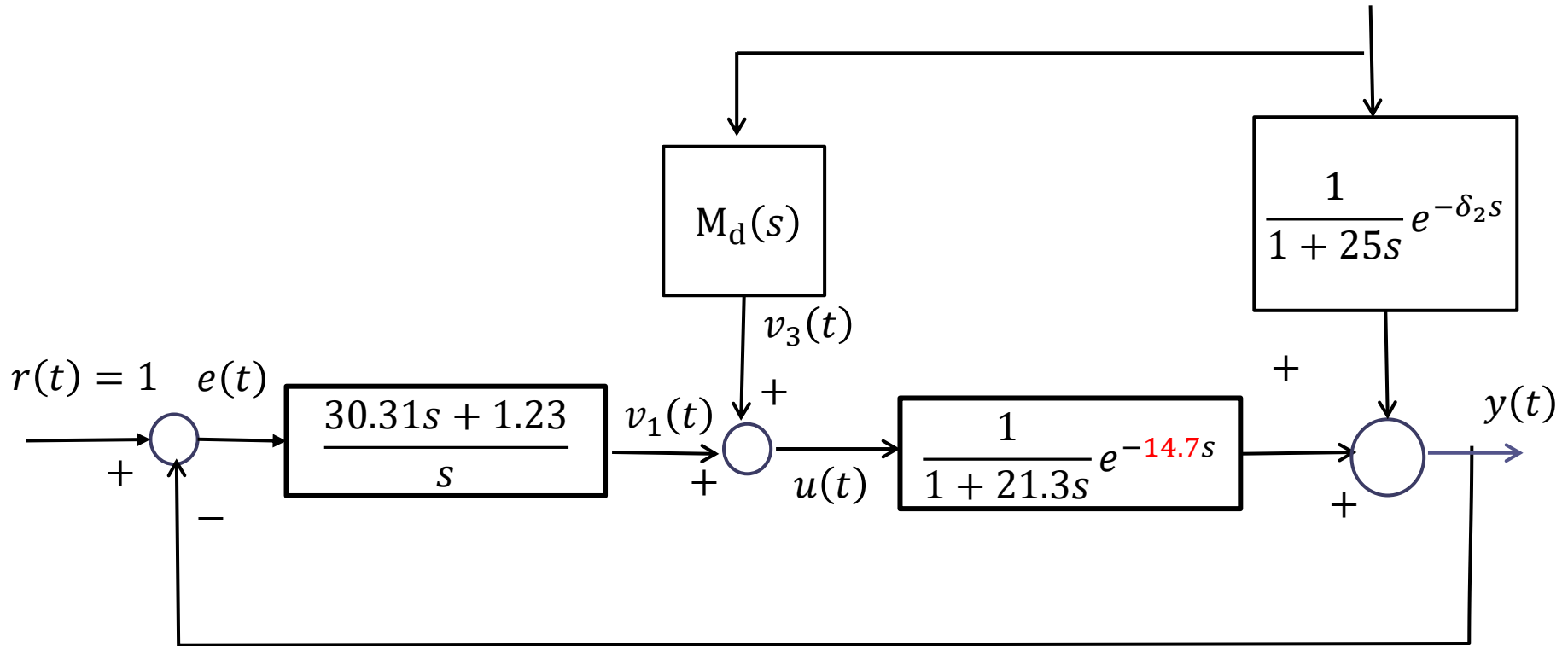
Nel caso in cui  $\delta_1 > \delta_2$  si deve implementare il filtro approssimato

$$\widehat{M}_d(s) = -\frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$$

che sarà in grado di garantire unicamente una compensazione approssimata del disturbo, tanto più scadente al crescere della differenza  $\delta_1 - \delta_2$

Consideriamo il seguente esempio numerico

$$d(t) = 5 \sin(0.5t) + \cos(t)$$



in corrispondenza di 4 valori distinti per il ritardo  $\delta_2$

$$\delta_2 = 35s$$

$$\delta_2 = 20s$$

$$\delta_2 = 14s$$

$$\delta_2 = 13s$$

$$\delta_2 = 35s$$

$$\delta_2 = 20s$$

$$\delta_2 = 14s$$

$$\delta_2 = 13s$$

I primi due valori considerati per il ritardo  $\delta_2$  sono maggiori del ritardo  $\delta_1 = 14.7$  della FdT ingresso-uscita, e come risultato il filtro di compensazione del disturbo è fisicamente realizzabile ed assume la forma

$$M_d(s) = -\frac{1 + 21.35s}{1 + 25s} e^{-(\delta_2 - 14.7)s}$$

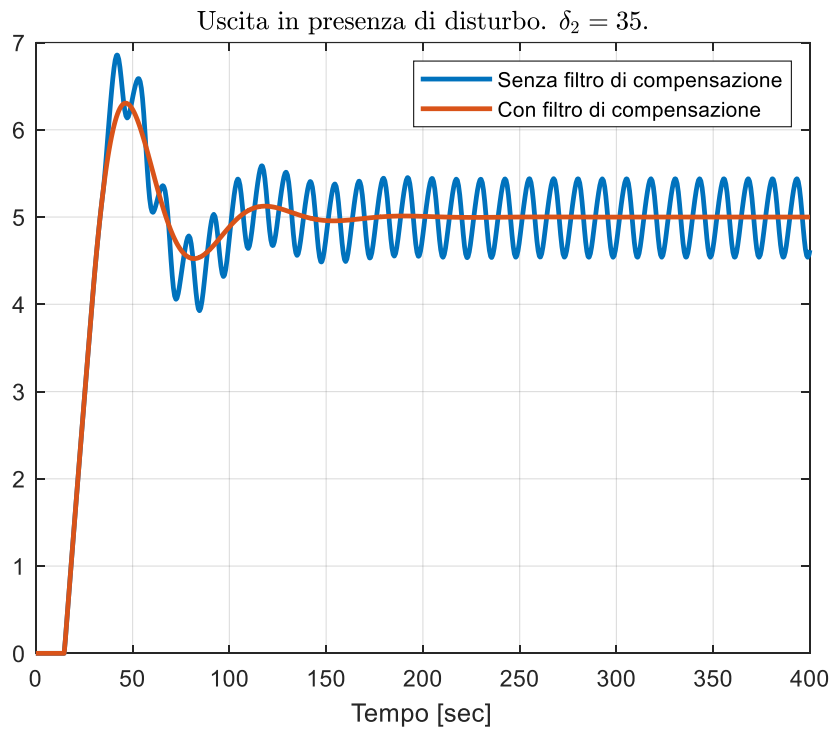
In entrambi i casi ci attendiamo una compensazione esatta del disturbo

Gli ultimi due valori considerati per il ritardo  $\delta_2$  sono invece inferiori del ritardo  $\delta_1 = 14.7$  della FdT ingresso-uscita, e come risultato il filtro di compensazione del disturbo risulta non fisicamente realizzabile e deve essere approssimato come segue

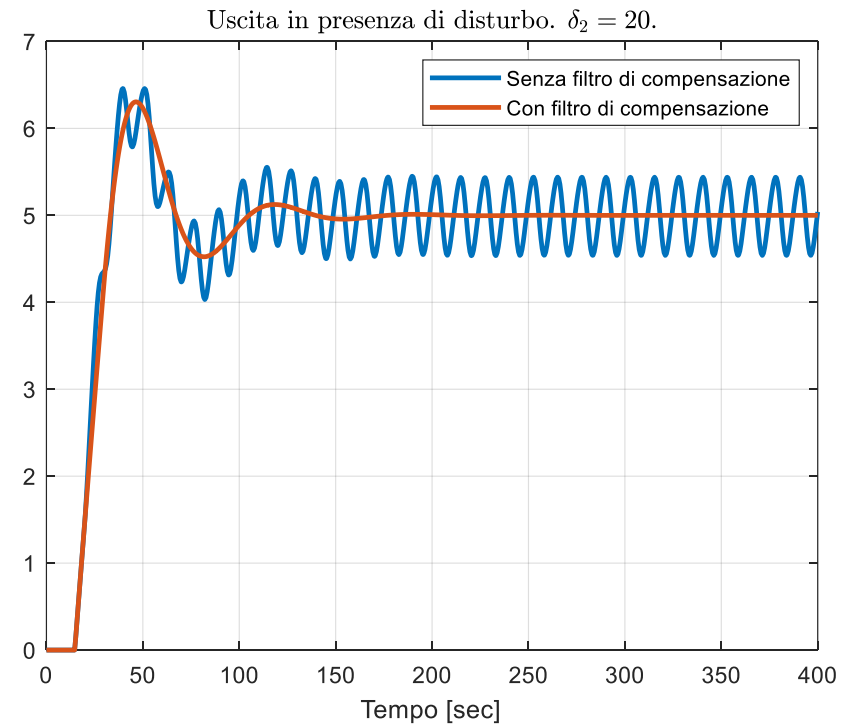
$$\hat{M}_d(s) = -\frac{1 + 21.35s}{1 + 25s}$$

Ci si attende una compensazione approssimata del disturbo, più scadente quando  $\delta_2 = 13s$  in quanto si sta rimuovendo dalla FdT del filtro un termine di anticipo di ampiezza maggiore.

$$\delta_2 = 35s$$

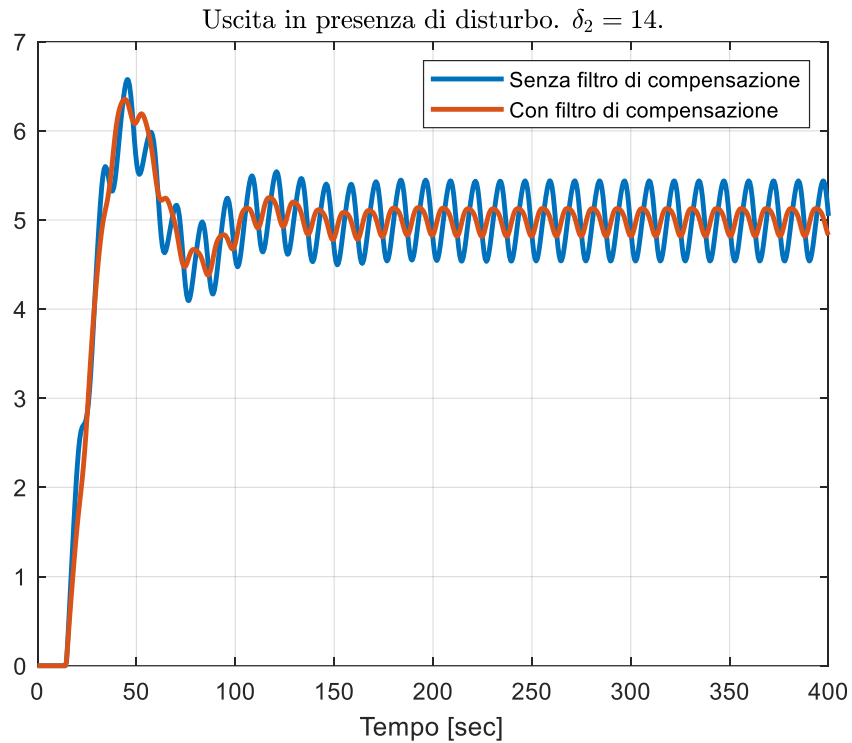


$$\delta_2 = 20s$$

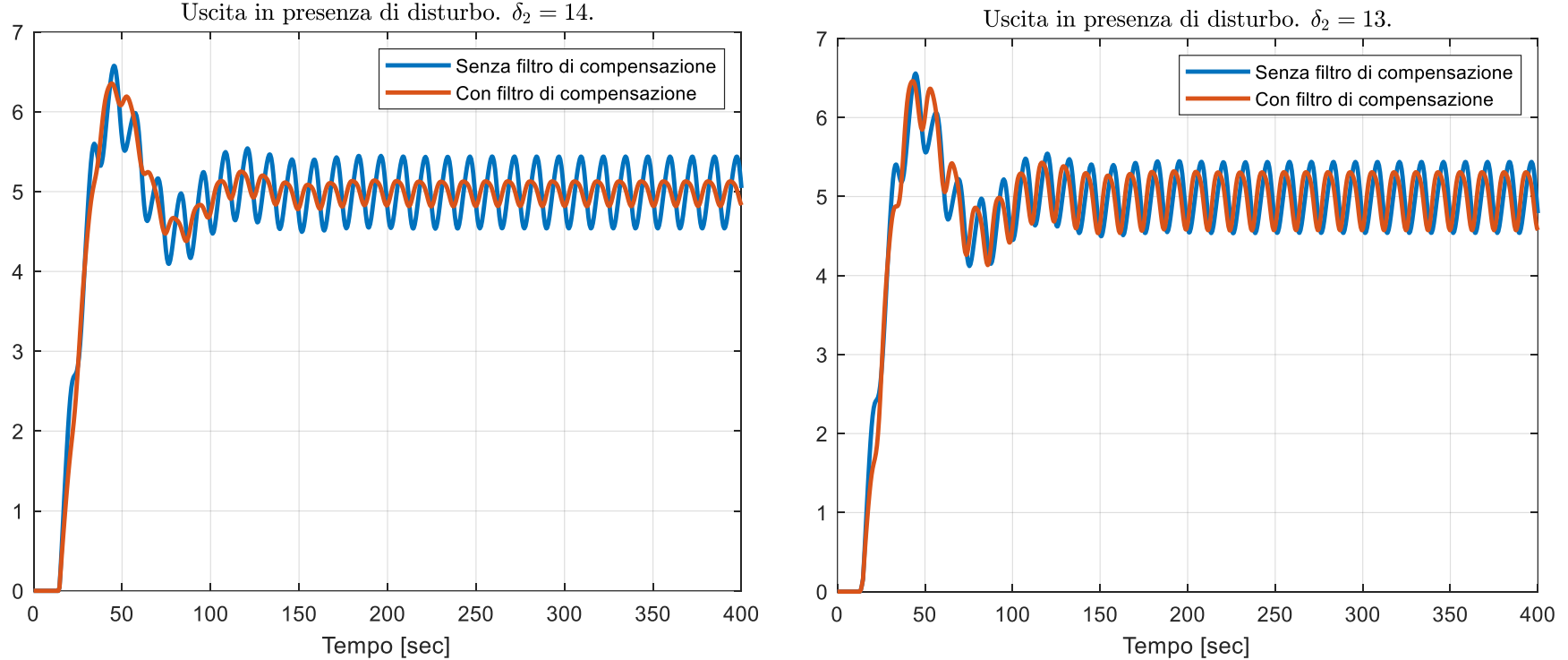


compensazione esatta del disturbo

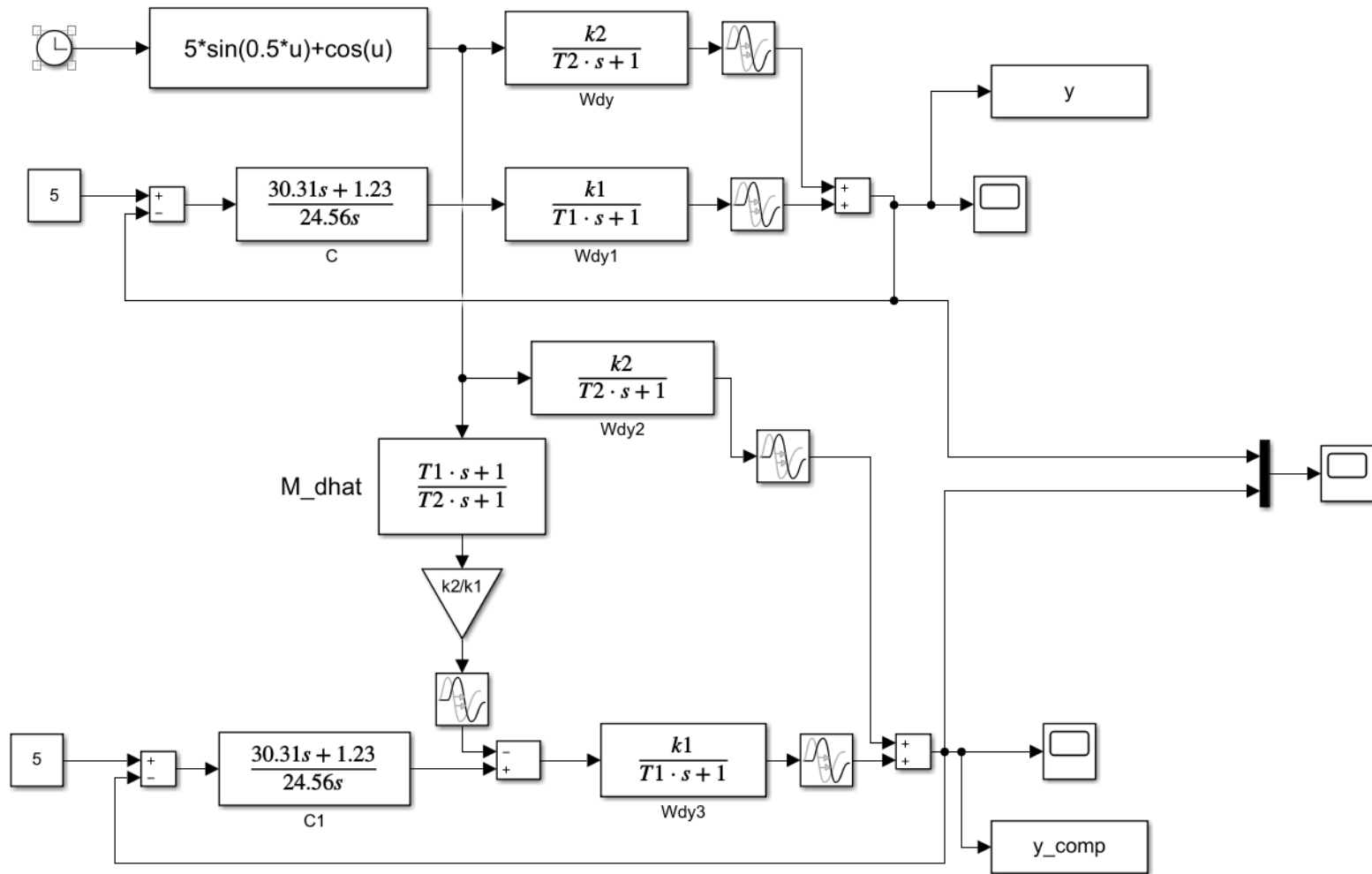
$$\delta_2 = 14s$$



$$\delta_2 = 13s$$

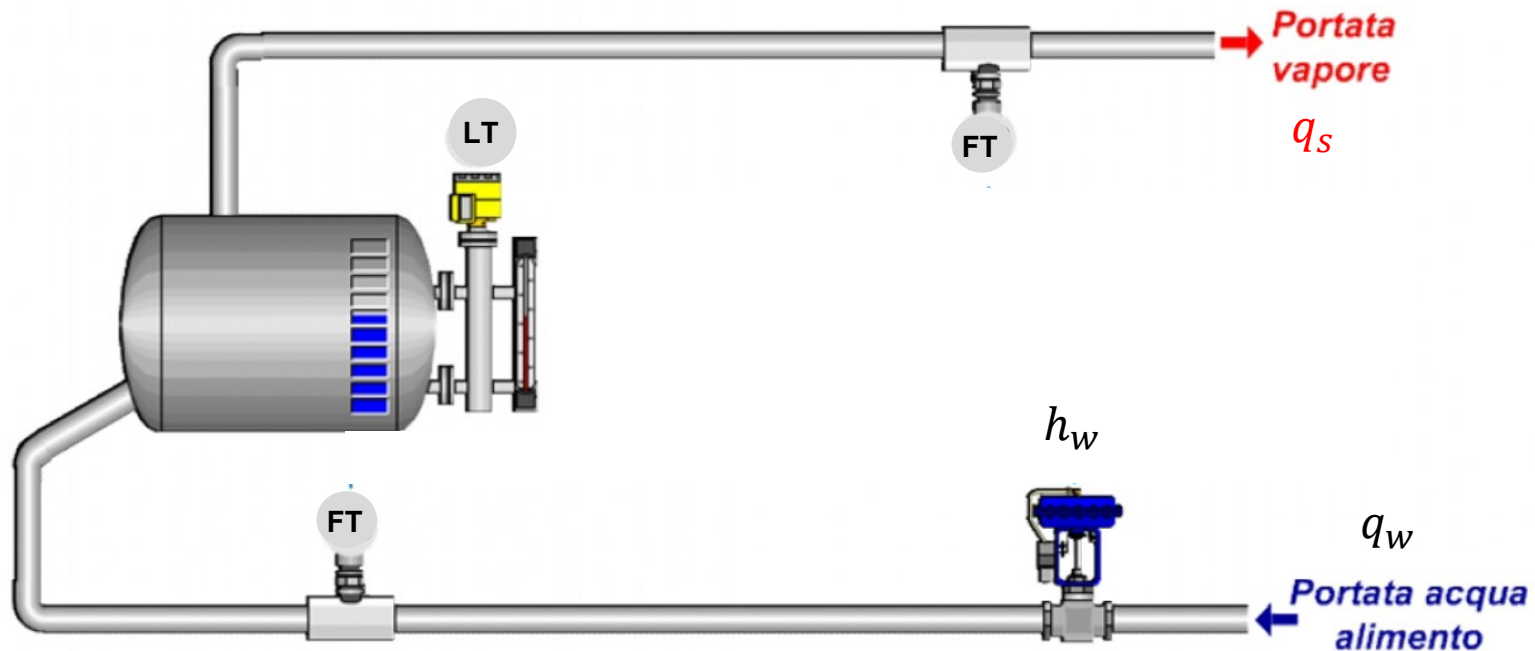


compensazione approssimata del disturbo, più scadente quando  $\delta_2 = 13s$



**Files** `CompDisturbiMisurabili_b.slx`  
`CompDisturbiMisurabili_b_script.m`

## La regolazione di livello «a 3 elementi» nei generatori di vapore



La regolazione di livello “a tre elementi” nel corpo cilindrico dei generatori di vapore è un esempio classico di regolazione che accoppia il controllo in cascata con la compensazione dei disturbi misurabili.

$q_w$  portata massica acqua di alimento

$q_s$  portata massica del vapore

$\ell$  livello nel corpo cilindrico

$h_w$  comando della valvola di adduzione dell'acqua di alimento

ABB MEASUREMENT & ANALYTICS | APPLICATION NOTE

# Drum level control using a ControlMaster PID controller

## Three-element drum level control system



Precision control of drum level from a preconfigured control strategy

Measurement made easy

System classification	Load change capabilities	
	Magnitude	Rate
Single-element	Moderate	Slow
Two-element	Moderate	Moderate
Three-element	Wide	Fast

Anello singolo

Controllo in cascata

Controllo in cascata con compensazione del disturbo  $q_s$

Il processo è modellato dal seguente bilancio di massa

$$\rho A \frac{d\ell}{dt} = q_w(t) - q_s(t)$$

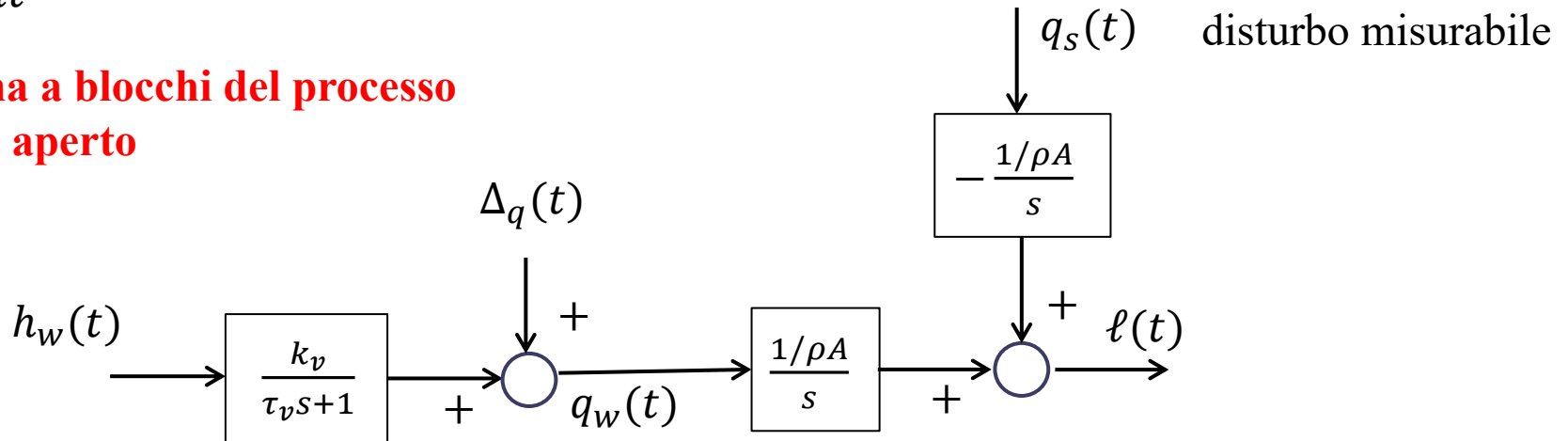
$\rho$  = densità dell'acqua

$A$  = sezione orizzontale del serbatoio alla quota  $\ell^{des}$

al quale si abbina la dinamica della valvola di adduzione dell'acqua di alimento

$$\tau_v \frac{dq_w}{dt} + q_w(t) = k_v h_w(t)$$

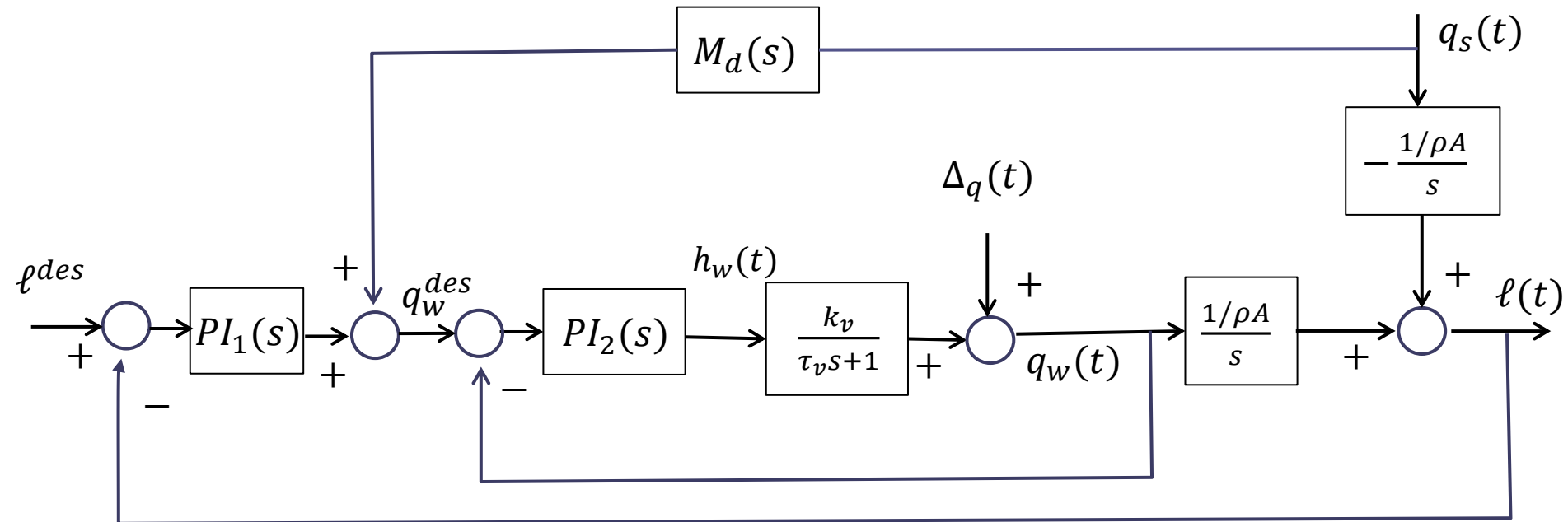
### Schema a blocchi del processo a ciclo aperto



$\Delta_q(t)$

Disturbo sulla portata dovuto a variazioni di pressione sulla linea e non linearità nel comportamento dinamico della valvola

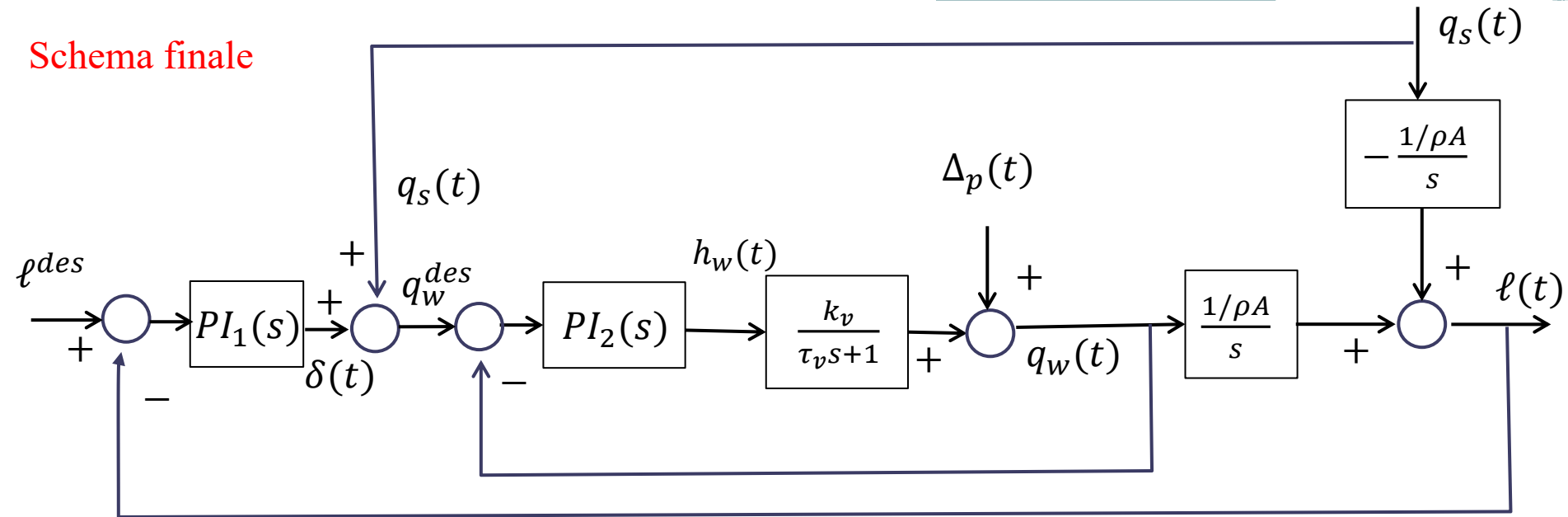
Il processo è regolato mediante la seguente architettura, che prevede un sistema di **controllo in cascata** con anello primario di livello ed anello secondario di portata abbinato alla **compensazione del disturbo misurabile** rappresentato dalla portata del vapore uscente



$$M_d(s) = -\frac{\frac{1}{\rho A}}{\frac{1}{\rho A}} = 1$$

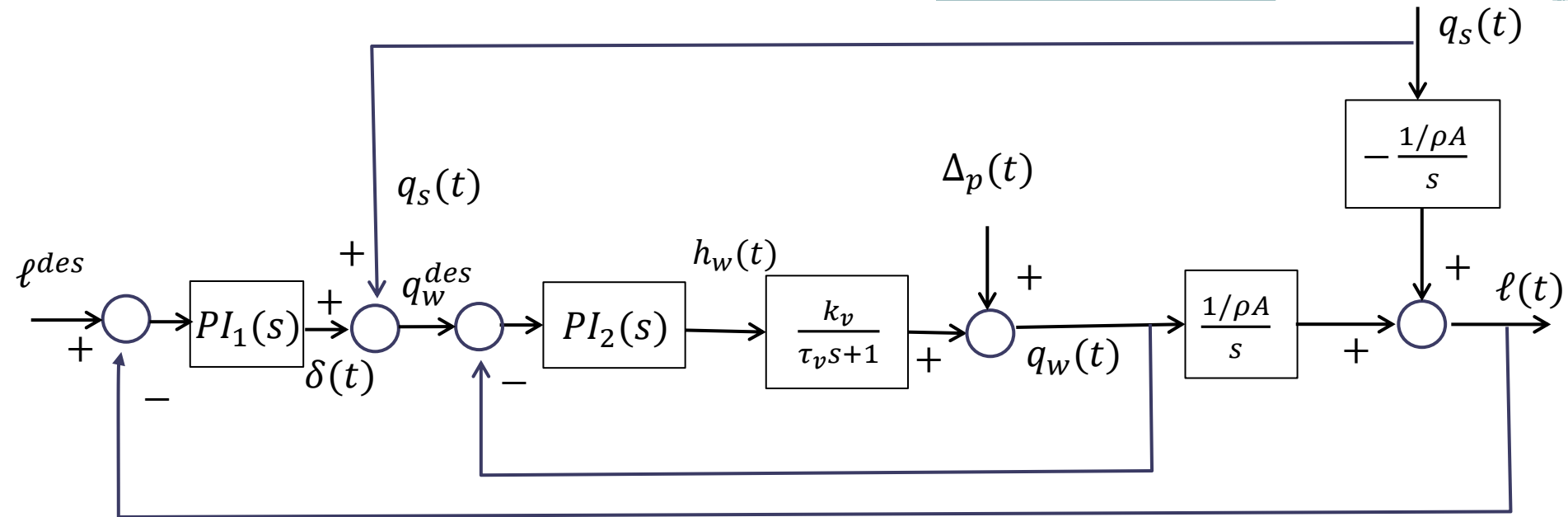
Approssimando l'anello secondario del sistema di controllo mediante un sistema unitario istantaneo ( $q_w = q_w^{des}$ ), il filtro di compensazione del disturbo diventa un filtro unitario

## Schema finale



Il risultato finale è pertanto quello di imporre una portata desiderata dell'acqua di alimento uguale alla portata del vapore uscente più un termine aggiuntivo  $\delta(t)$  ottenuto come uscita di un regolatore PI che riceve in ingresso l'errore di livello  $l^{des} - l(t)$

$$q_w^{des}(t) = q_s(t) + \delta(t) \quad \delta(t) = PI_1(l^{des} - l(t))$$



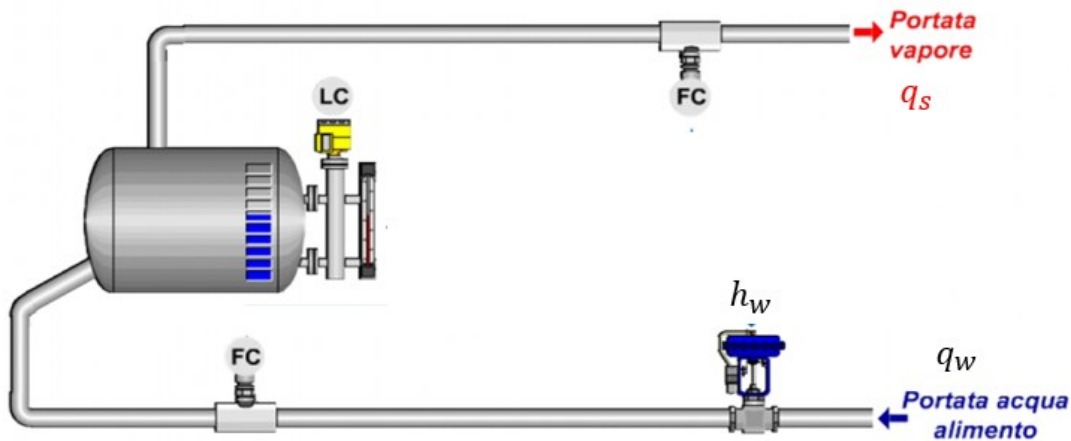
$$q_w^{des}(t) = q_s(t) + \delta(t)$$

$$\delta(t) = PI_1(\ell^{des} - \ell(t))$$

Ipotizzando un anello di portata istantaneo ( $q_w(t) = q_w^{des}(t)$ ) si ha

$$\delta(t) = q_w(t) - q_s(t)$$

Il segnale in uscita dal regolatore  $PI_1(s)$  va in pratica a definire la **portata netta** in ingresso al serbatoio



Ciò rende evidentemente più efficace il sistema di controllo nel fronteggiare rapide variazioni della portata del vapore uscente.

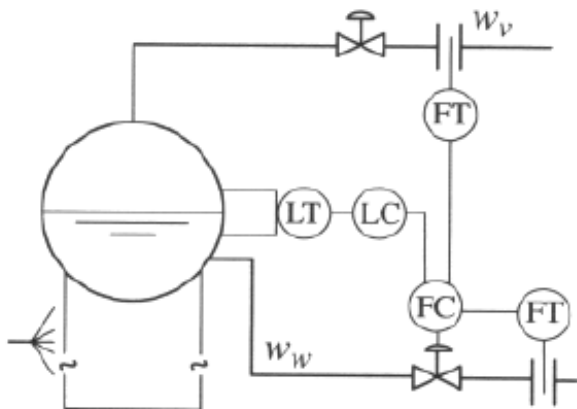


Diagramma P&I della regolazione a 3 elementi del livello.

LT Trasmittitore di livello

FT Trasmittitori di portata

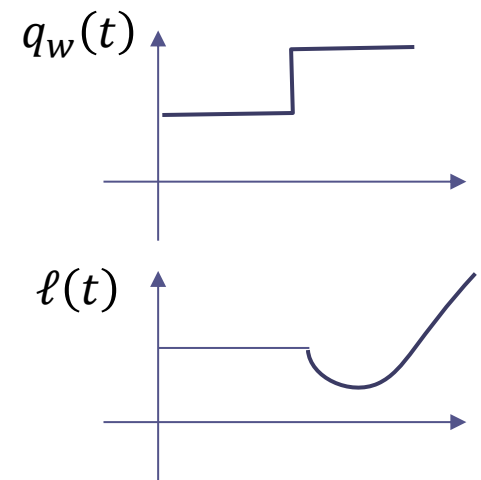
LC Controllore di livello (il regolatore dell'anello primario)

FC Controllore di portata (il regolatore dell'anello secondario)

L'utilizzo di una architettura così sofisticata per un problema di regolazione che - sulla base del modello del processo - potrebbe sembrare tutto sommato semplice, è giustificato dalla occorrenza di **fenomeni piuttosto complessi** che intervengono in presenza di **variazioni a gradino della portata dell'acqua di alimento e della portata del vapore uscente**, fenomeni non inclusi nel semplice bilancio di massa che ci ha condotto a ricavare il modello del primo ordine

### 1. Variazione a gradino dell'H<sub>2</sub>O di alimento.

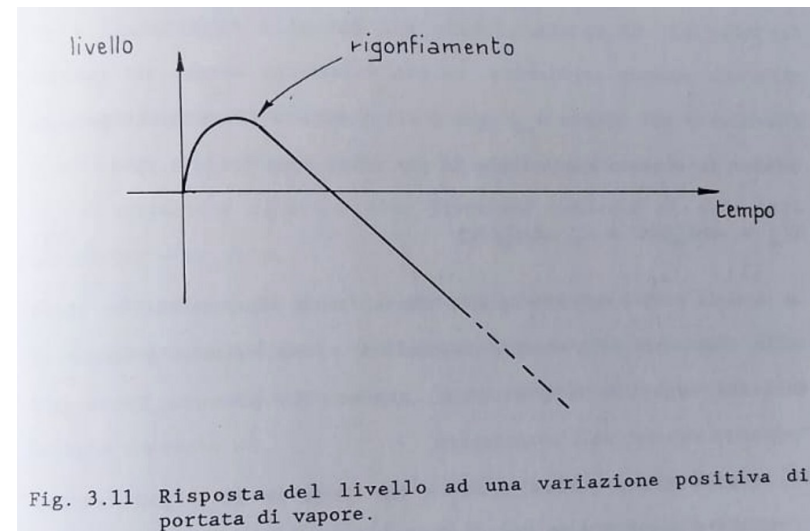
In caso di aumento a gradino della portata dell'acqua (fredda) di alimento con portata vapore costante, il volume di acqua calda esistente nel corpo cilindrico subisce inizialmente una contrazione dovuta a fenomeni transitori di natura termodinamica che, a seconda del tipo di corpo cilindrico, può portare a rilevanti abbassamento di livello. Successivamente, dopo un certo intervallo temporale che può essere di parecchi secondi, a causa del continuo afflusso di acqua di alimento in eccesso rispetto alla portata del vapore uscente, il livello torna a crescere.



## 2. Variazione a gradino del prelievo di vapore

Nel caso di aumento a gradino della portata vapore spillata, a parità di portata acqua alimento, nel corpo cilindrico si verifica una brusca riduzione di pressione con diffusa evaporazione anche in profondità e conseguente possibilità non di abbassamento, ma bensì di «rigonfiamento» del liquido con aumento transitorio del livello misurato. Il problema è meno critico in presenza di una riduzione a gradino del prelievo del vapore.

A causa di questi due fenomeni, se la portata acqua alimento fosse comandata solo in funzione del livello, si avrebbero fenomeni di instabilità dovuti al fatto che nel transitorio iniziale **la regolazione sarebbe portata a produrre correzioni opposte a quelle effettivamente necessarie**. Per queste ragioni, il sistema di regolazione, più diffusamente usato è quello a 3 elementi, in cui il segnale di livello, confrontato con il valore prefissato, determina tramite il regolatore  $PI_1$  il valore per la **portata netta di alimento** necessaria ad annullare l'errore di livello.



da «Dinamica dei generatori di vapore», C. Maffezzoni, 1988.

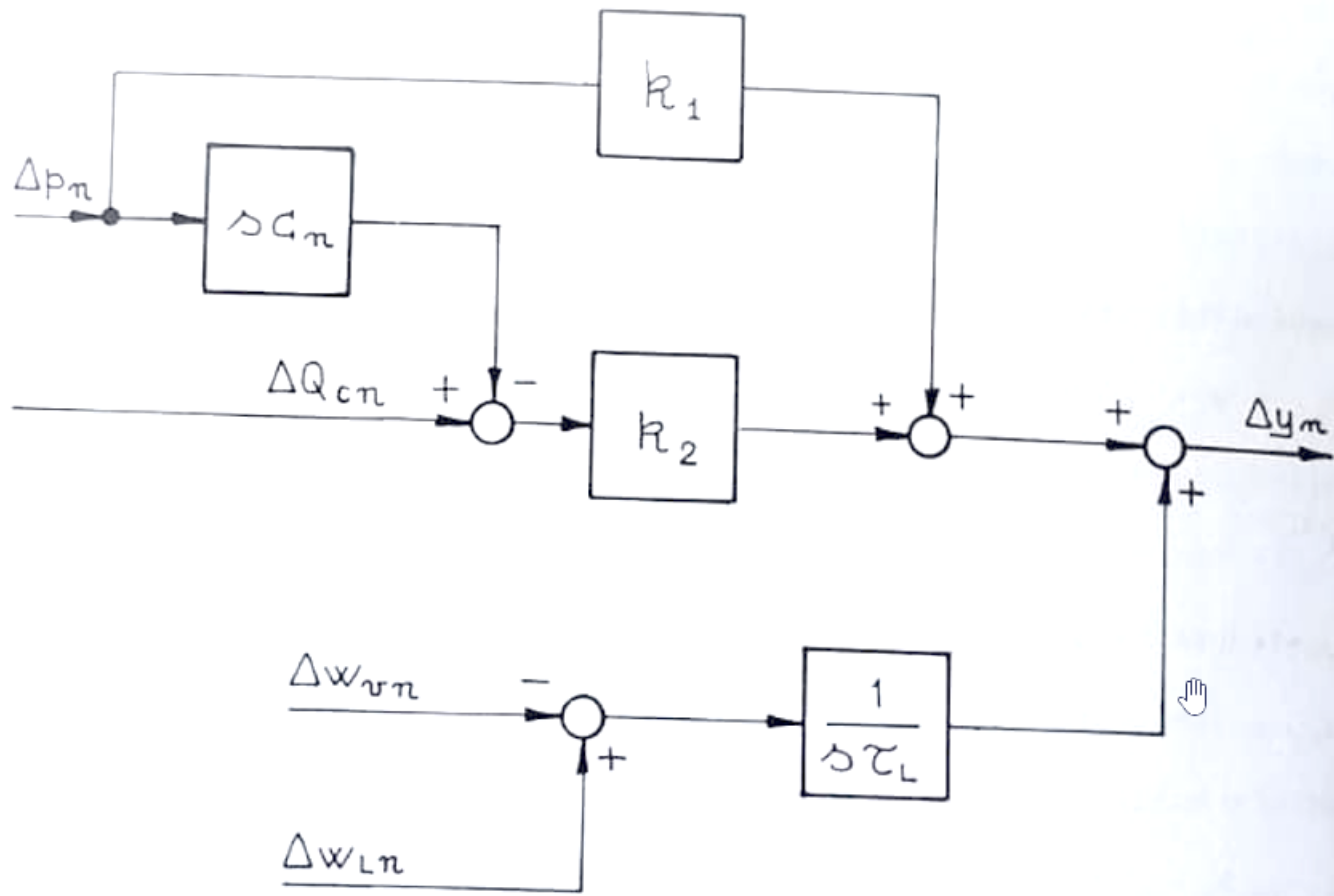


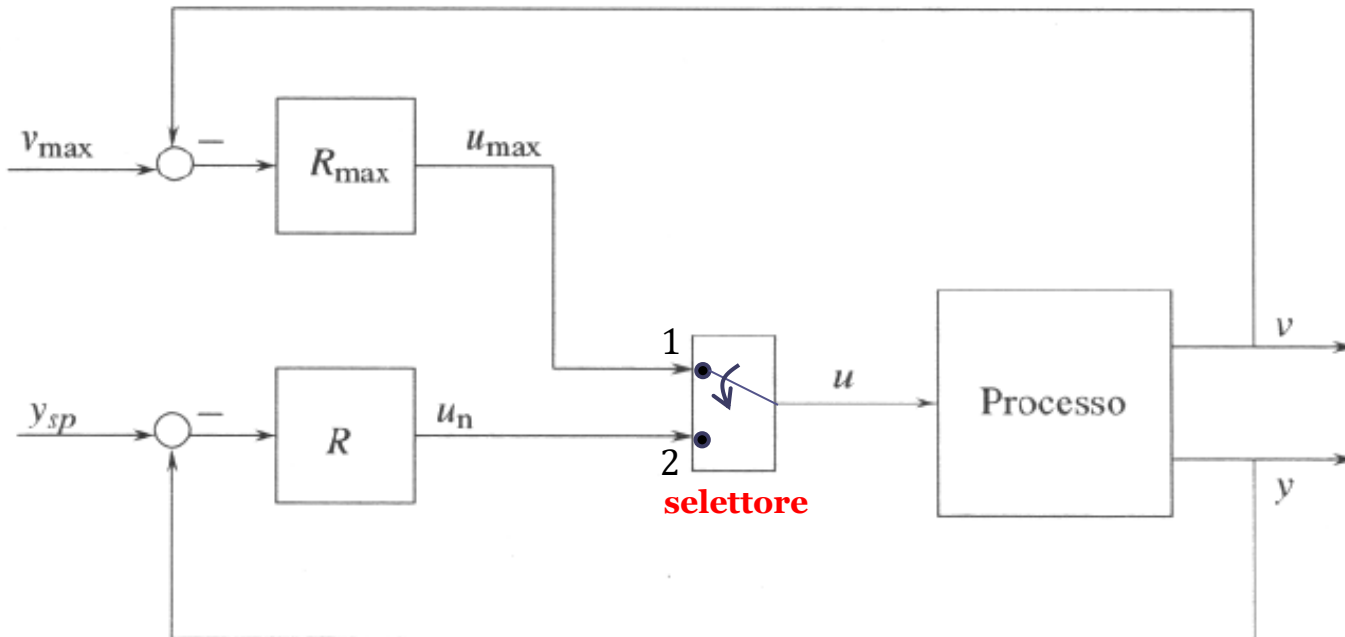
Fig. 3.12 Modello dinamico del livello.

da «Dinamica dei generatori di vapore», C. Maffezzoni, 1988.

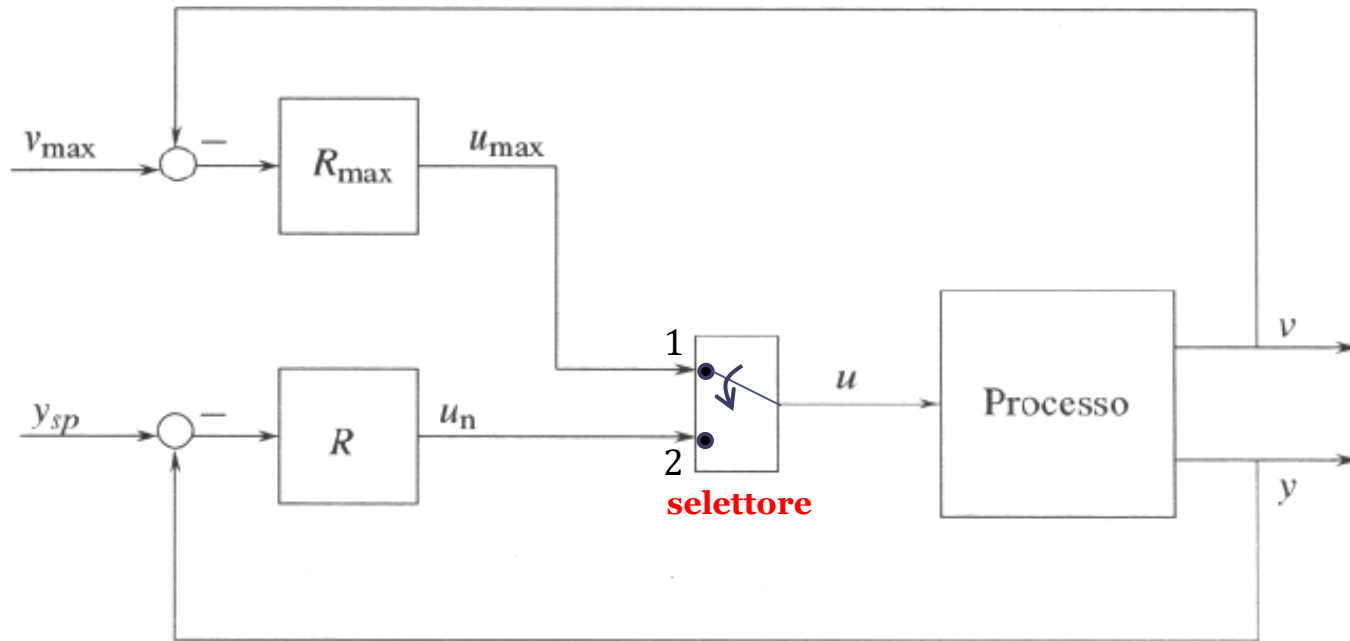
## Controllo con selettore (override control)

Si usa quando nel controllare una variabile si devono soddisfare **vincoli** inerenti una o più variabili “secondarie”. Viene anche detto controllo “override”.

Si faccia riferimento allo schema seguente. La variabile  $y$  è la variabile principale, ed  $y_{sp}$  è il relativo set-point. La variabile secondaria  $v$  non deve invece superare la soglia massima  $v_{max}$  (soft constraint). Il sistema di controllo contiene un blocco selettore che abilita il passaggio del segnale di controllo  $u_{max}$  generato dal controllore  $R_{max}$  o del segnale di controllo  $u_n$  generato dal controllore  $R$ .



La logica di commutazione può essere definita in vari modi.

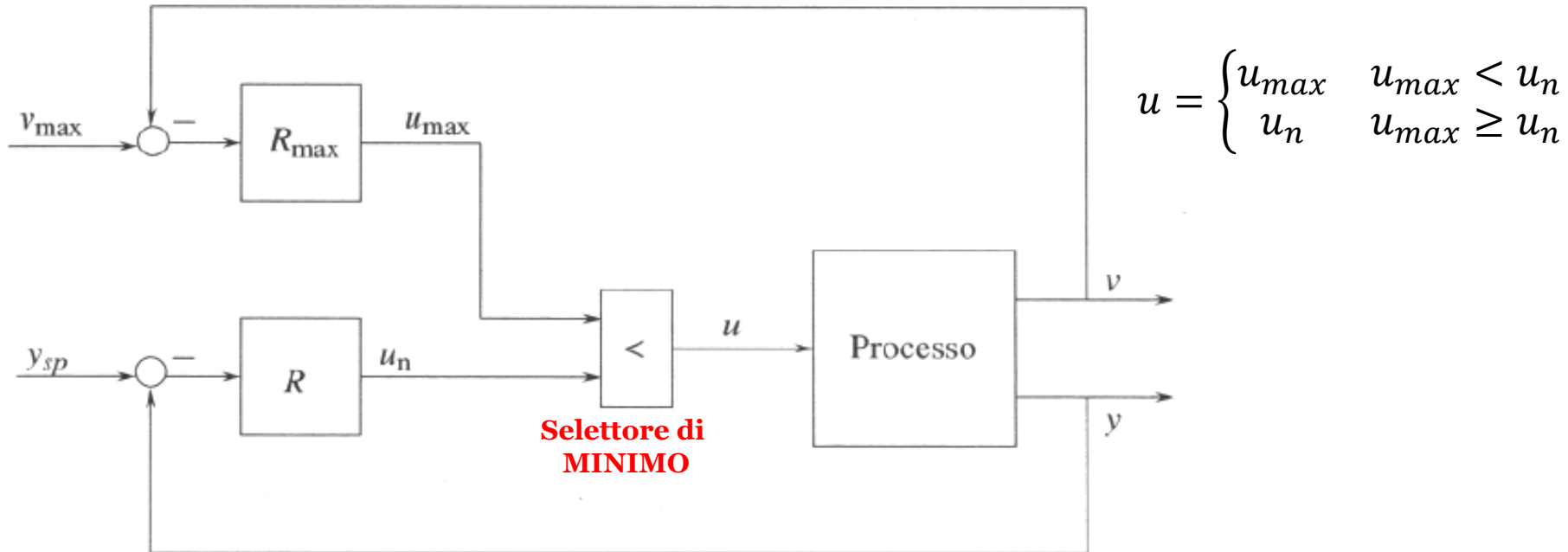


Una possibile logica di commutazione è la seguente:

Selettore in posizione:  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{quando } v \geq v_{max} \\ 2 \quad \text{quando } v < v_{max} \end{array} \right.$

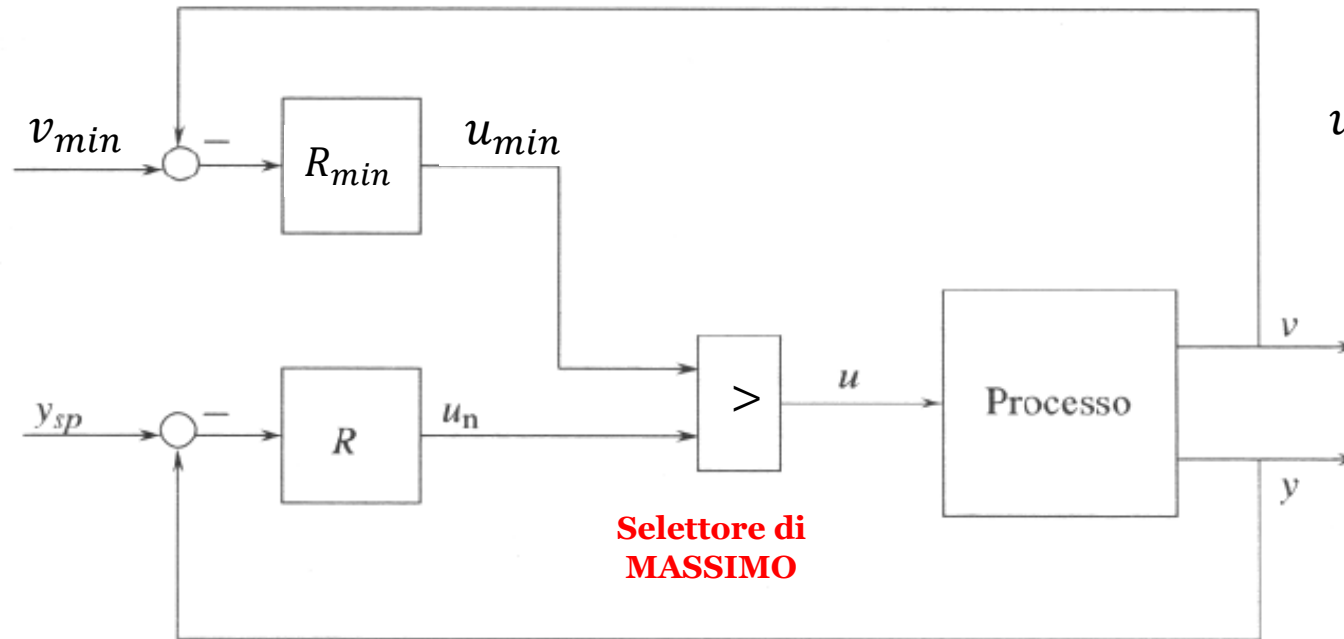
L'unico attuatore disponibile è impiegato per il normale controllo della uscita primaria  $y$  fintanto che  $v$  rimane inferiore al limite, mentre è utilizzato per far rientrare  $v$  sotto il limite quando il limite viene superato.

Una soluzione alternativa per implementare la commutazione fra i due controllori con un comportamento simile prevede di impiegare un blocco **selettore di minimo**, che abilita il «passaggio» del segnale di ingresso inferiore fra  $u_{max}$  ed  $u_n$



Tale soluzione ha il vantaggio di garantire la continuità dell'ingresso applicato al processo a cavallo delle commutazioni del selettore.

Per garantire invece che la variabile secondaria  $v$  non scenda al di sotto della **soglia minima**  $v_{min}$  si deve utilizzare un **selettore di massimo**

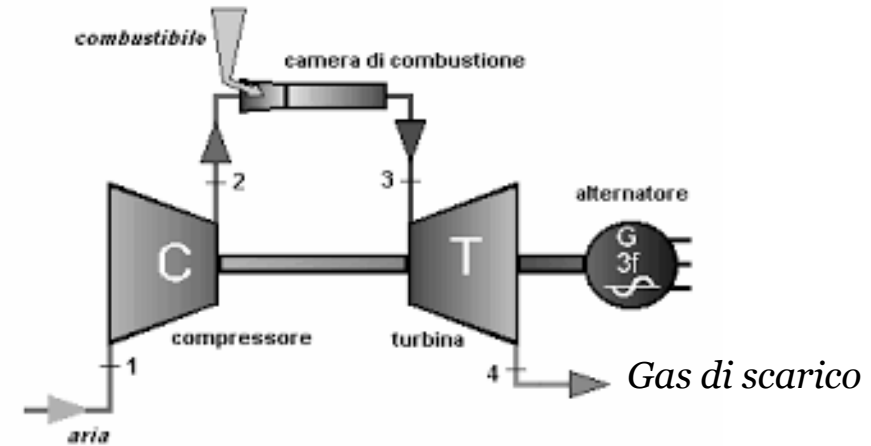
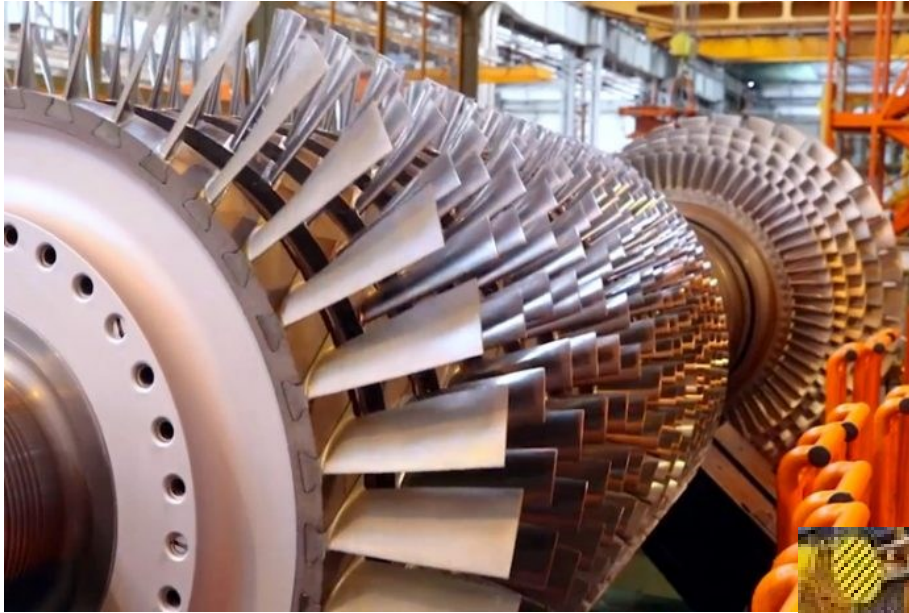


$$u = \begin{cases} u_{min} & u_{min} > u_n \\ u_n & u_{min} \leq u_n \end{cases}$$

Nel caso di controllori con azione integrale (PI/PID), qualunque sia la logica di commutazione adottata si deve prestare attenzione ad evitare che nel regolatore non attivo la componente integrale aumenti eccessivamente (ciò indurrebbe un pesante fenomeno di wind-up al momento della sua successiva attivazione). Una possibilità è inibire l'integrazione dell'errore nel controllore inattivo (in maniera analoga a quanto visto nello schema anti wind-up AW3 – conditional integration).

## Regolazione di velocità di una turbina a gas

*Impiego in impianti per la produzione di energia elettrica*



*La turbina è posta in rotazione dalla miscela che espande in turbina dalla camera di combustione investendone la palettatura.*



# Impianti di produzione di energia a ciclo combinato (turbina a gas e turbina a vapore)



Compressore,  
camera di combustione, turbina a  
gas e  
generatore sincrono



Produzione di vapore dal calore  
residuo dei fumi di scarico



## FUEL/IGV CONTROLLER

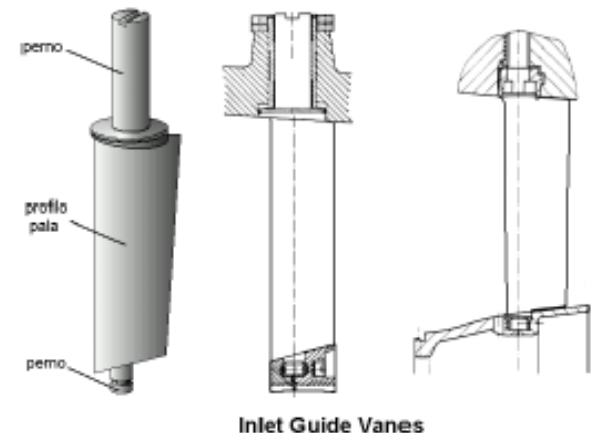
### Variabili di uscita

- $\omega$  *Velocità angolare del gruppo compressore-turbina-alternatore*
- $P_{el}$  *Potenza elettrica istantanea immessa in rete*
- $T_f$  *Temperatura dei gas di scarico (limitazione - override)*

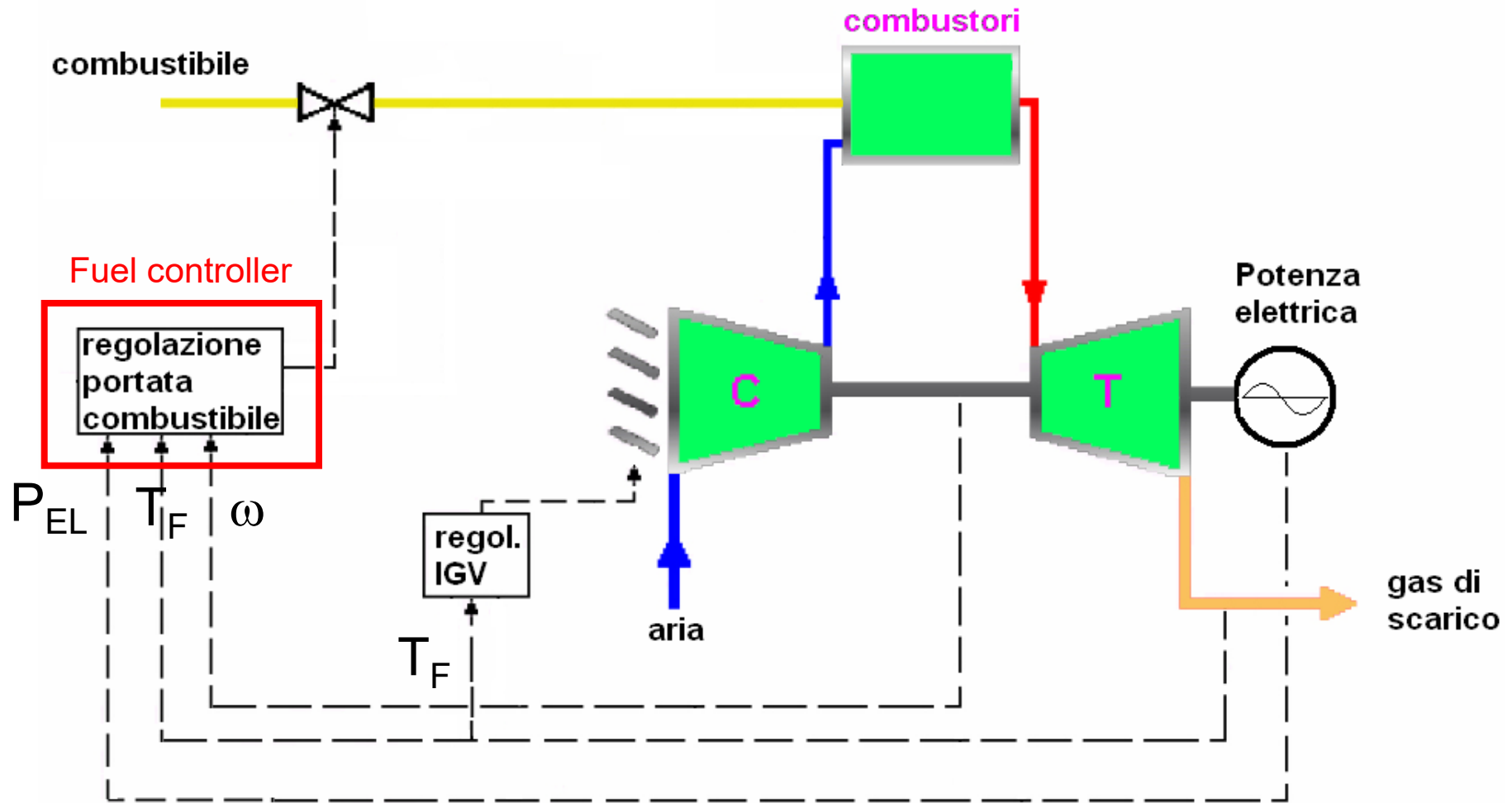
### Variabili di ingresso

$Q_{fuel}$  *Portata di combustibile  
(immesso in camera di combustione)*

*Portata di aria aspirata  
(variata tramite le Inlet Guide  
Vanes, IGV)*

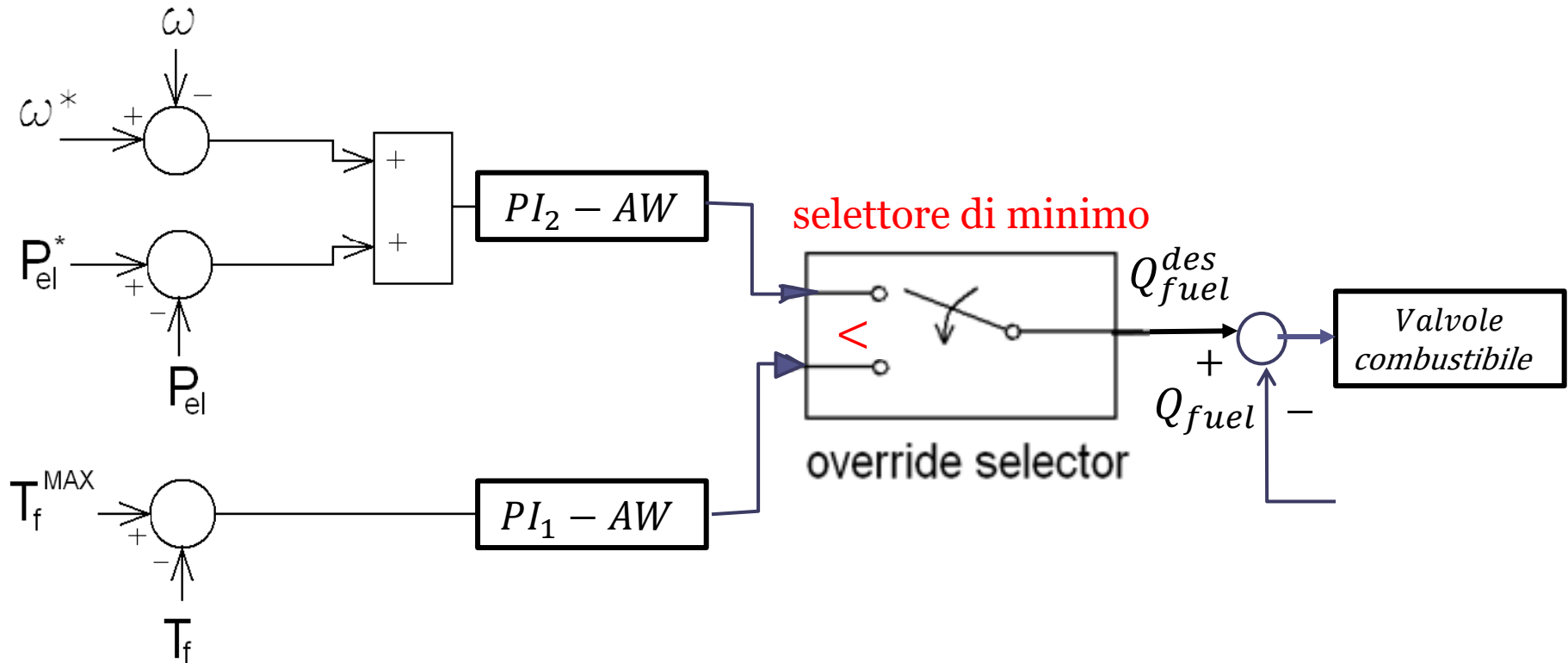


# Fuel/IGV controller



## Fuel controller (semplificato)

La portata del gas combustibile è modulata mediante un sistema di **controllo in cascata** con due anelli esterni in parallelo di velocità/potenza e di temperatura (con **over-ride** e **selettore di minimo**) ed anello interno di portata.



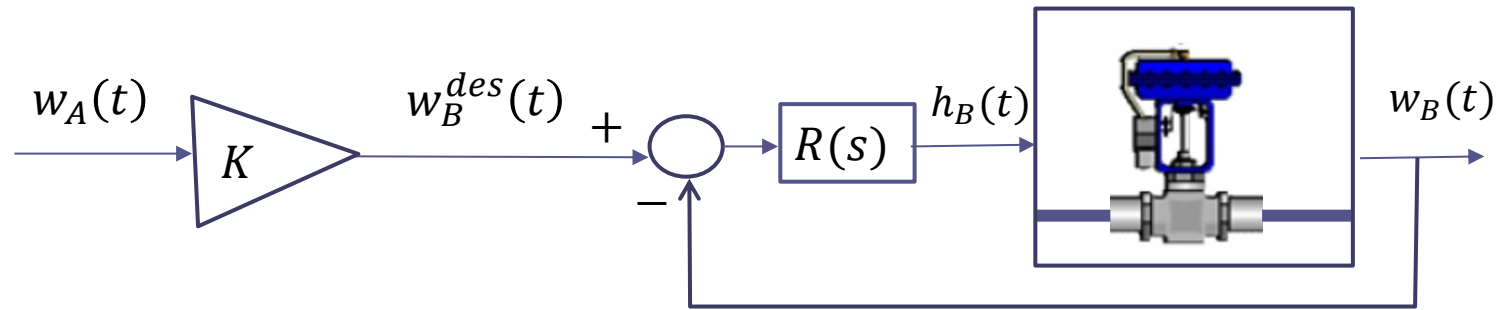
## Controllo di rapporto (ratio control)

Un ulteriore esempio di sistema di controllo in cui possono coesistere più anelli fra loro accoppiati, non più «annidati» come nel controllo in cascata ma in serie.

Uno degli ambiti in cui trova maggiore applicazione è costituito da processi in cui sia necessario **miscelare fra loro dei fluidi o delle polveri in un rapporto assegnato**.

Questa è una esigenza comune nell'industria chimica, in cui un prodotto si ottiene miscelando fra loro reagenti in modo che siano soddisfatti rapporti stechiometrici ben precisi. Una applicazione di grande rilievo in cui si riscontra tale esigenza è il **controllo della combustione**, in cui le portate di combustibile e di aria immesse in camera di combustione devono soddisfare un preciso rapporto stechiometrico onde garantire una combustione stabile e completa e con un elevato rendimento termico.

## Schema di base del controllo di rapporto

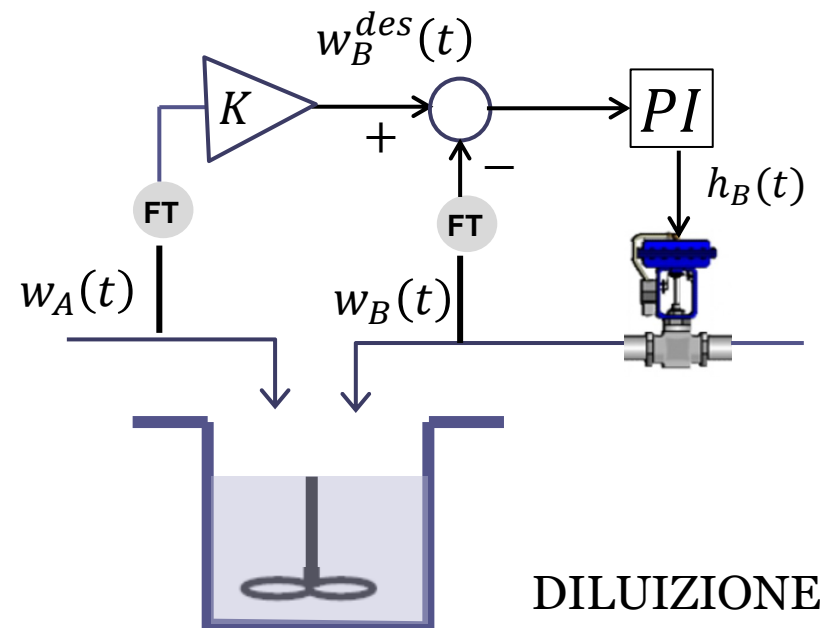


$K$  è il rapporto stechiometrico desiderato fra le portate  $w_A(t)$  e  $w_B(t)$  delle sostanze A e B.

Target: 
$$\frac{w_B(t)}{w_A(t)} = K$$

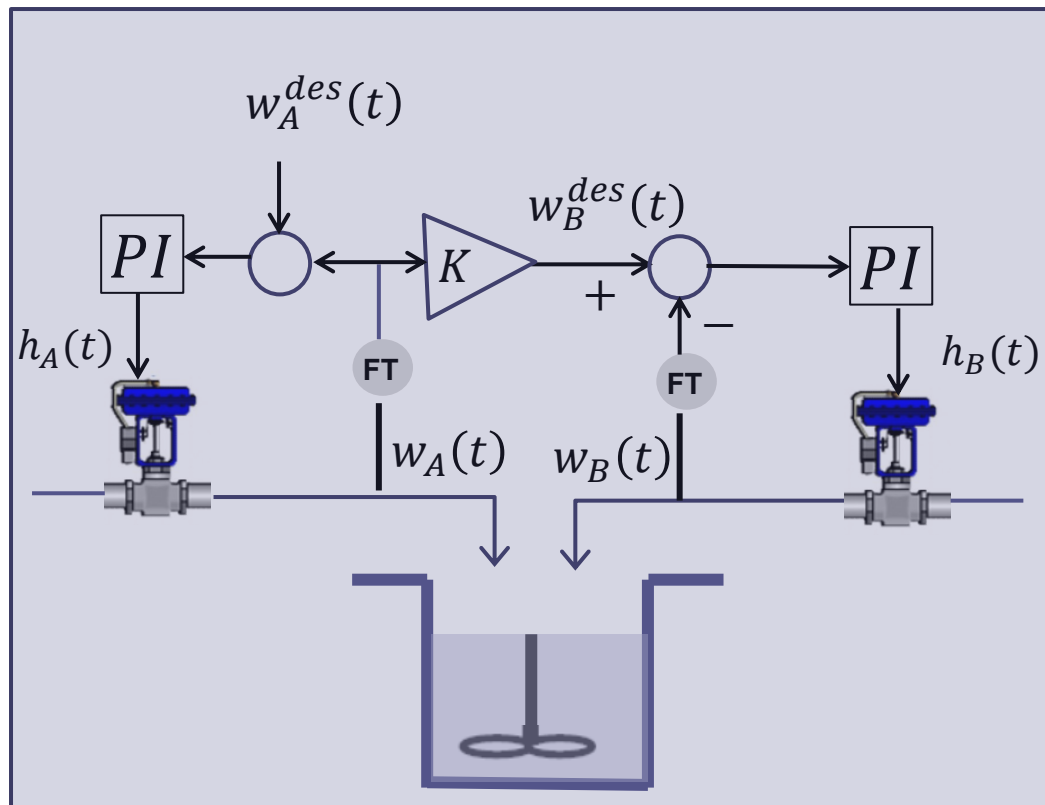
La portata  $w_A(t)$  viene **misurata** ed il suo valore moltiplicato per  $K$  definisce il set-point  $w_B^{des}(t)$  per la portata della sostanza B.

$$w_B^{des}(t) = K w_A(t)$$

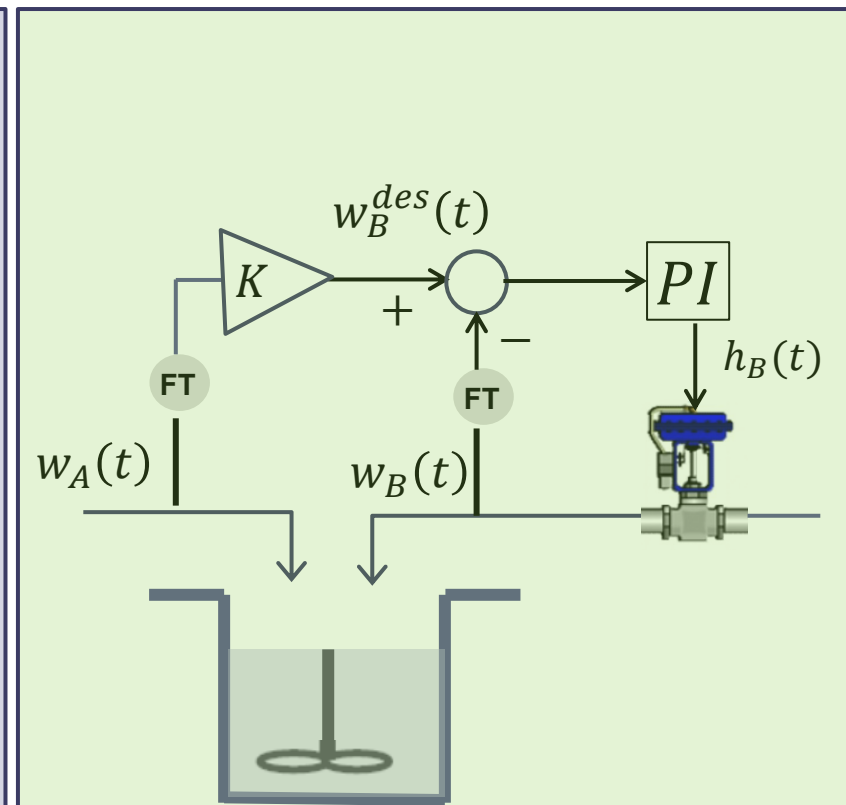


In funzione del fatto che la portata  $w_A(t)$  della sostanza A sia asservita o meno ad un loop di regolazione, si parla di «miscelazione» oppure di «diluizione»

## MISCELAZIONE



## DILUIZIONE



## Controllo della combustione

Il controllo della combustione in una caldaia rappresenta una regolazione critica per via del gran numero di realizzazioni e dell'impatto in termini sia economici (in una combustione mal gestita l'efficienza energetica crolla) che ambientali (elevati tassi di inquinamento)

L'architettura di riferimento prevede una combinazione fra il controllo in cascata, il controllo di rapporto, ed il controllo con selettore.

Gli attuatori sono due:

La valvola di adduzione del combustibile, che consente di modulare la portata  $w_c(t)$  del combustibile immessa in camera di combustione (CdC)

Le serrande aria, la cui apertura consente di modulare la portata  $w_a(t)$  dell'aria comburente immessa in CdC

E' una regolazione critica anche per la presenza di peculiari aspetti di sicurezza conseguenti alla necessità di immettere combustibile in CdC solo in presenza di fiamma, onde evitare rischi di esplosione.

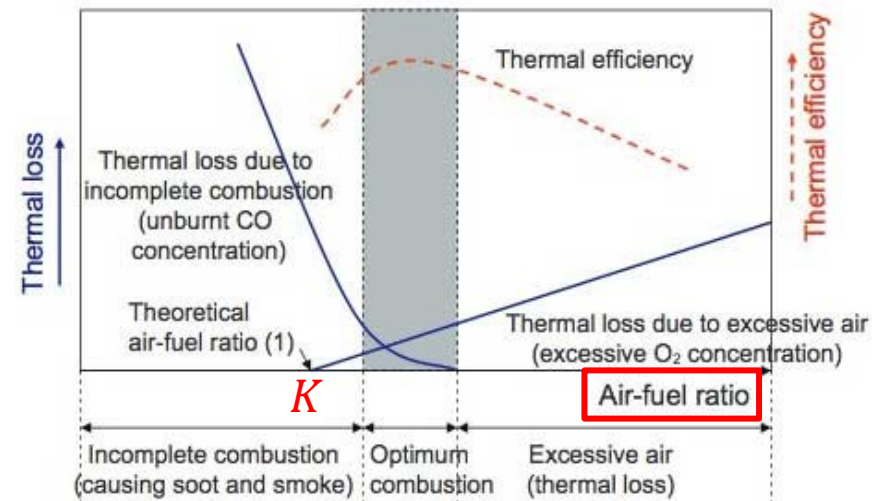
La combustione è una reazione chimica esotermica tra il carbonio contenuto nel combustibile e l'ossigeno contenuto nell'aria comburente.

Fra la portata d'aria e la portata del combustibile deve sussistere un preciso rapporto stechiometrico  $K$  («air-fuel ratio») volto a «sostenere» la combustione.

$$\frac{w_a(t)}{w_c(t)} = K$$

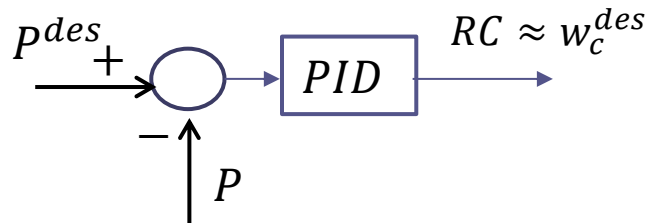
Se il rapporto  $w_a(t)/w_c(t)$  è inferiore a  $K$  si accumula in CdC dell'incombusto, con conseguenti rischi di esplosione.

Il punto di funzionamento ottimale prevede un **piccolo eccesso d'aria** rispetto al rapporto stechiometrico, onde garantire che la combustione avvenga in maniera completa. Tale accesso d'aria non deve però essere troppo elevato onde evitare una eccessiva riduzione della temperatura  $T$  della fiamma, con conseguente crollo del rendimento (il trasferimento della energia termica generata durante la combustione avviene difatti in prevalenza mediante irraggiamento, ed è pertanto proporzionale a  $T^4$ )

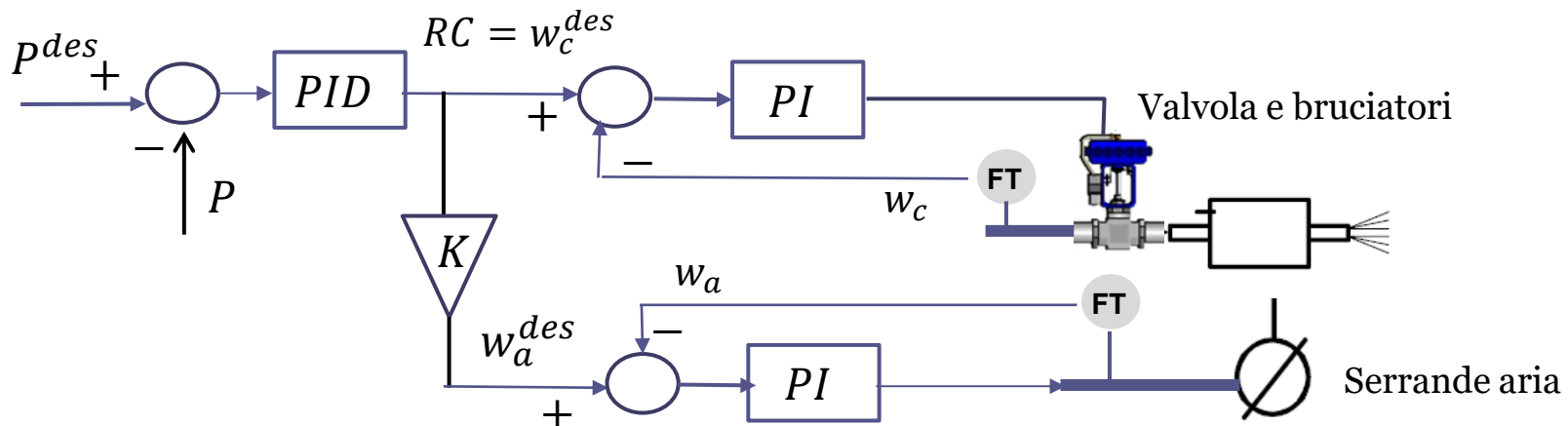


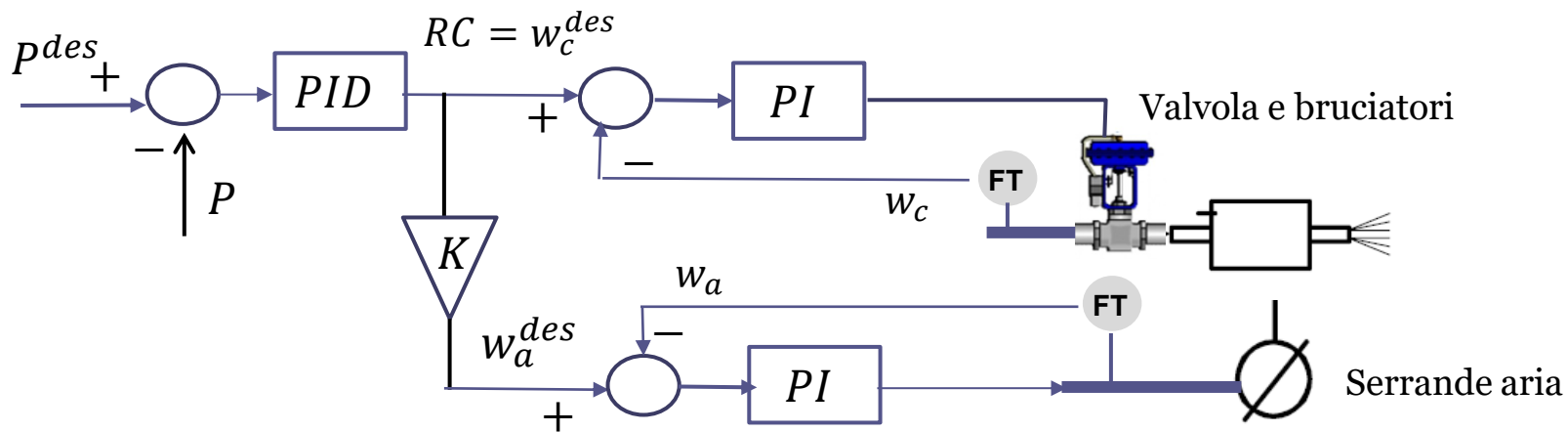
Nelle caldaie di medie e grandi dimensioni, la supervisione ed il controllo della combustione è asservito ad un complesso sistema di controllo automatico.

Il punto di partenza è un anello di pressione, nel quale si impiega tipicamente un controllore PID che fornisce un segnale RC chiamato «Richiesta caldaia», il cui significato è assimilabile al set-point per la portata del combustibile.



Si potrebbe determinare il set point per la portata dell'aria moltiplicando per  $K$  la richiesta caldaia (quindi impiegando un controllo di rapporto), ed impiegando successivamente tali segnali  $w_c^{des} = RC$  e  $w_a^{des} = K w_c^{des}$  nell'ambito di una regolazione in cascata

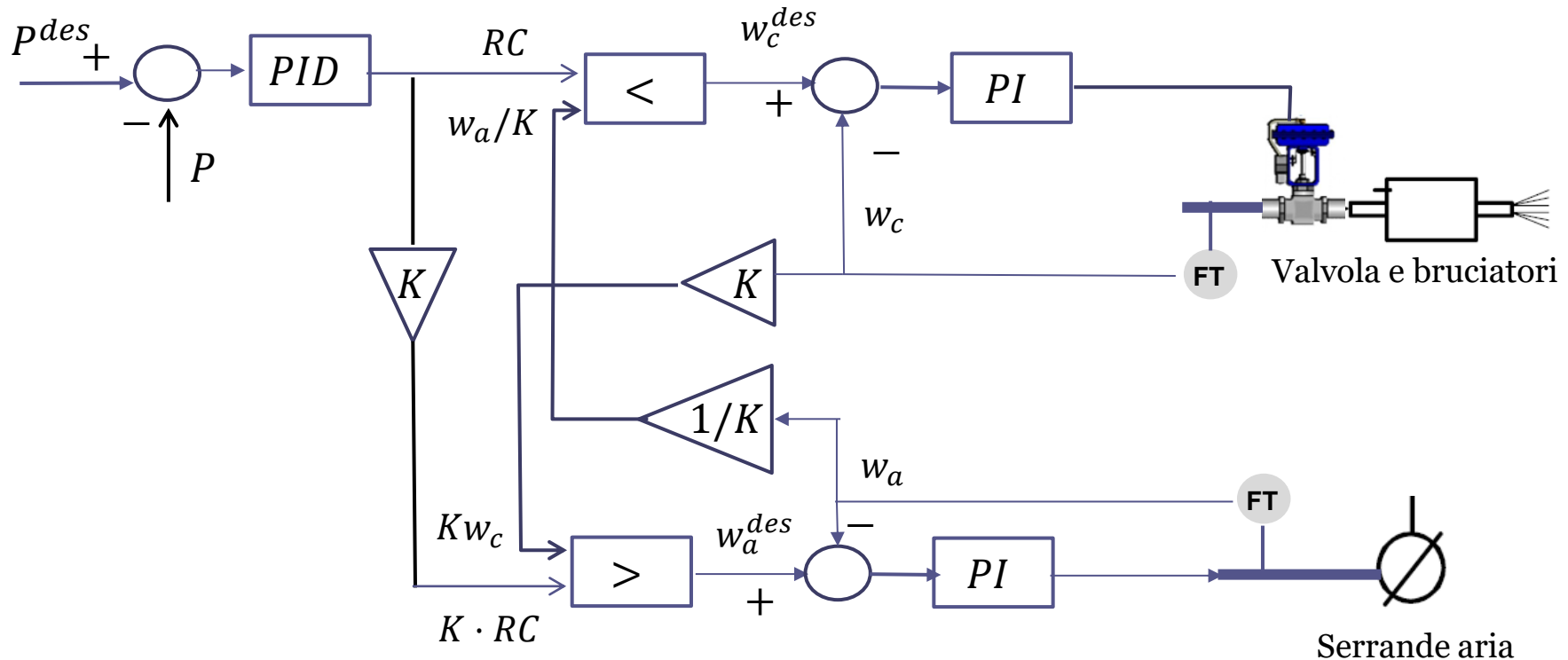




Tale schema sarebbe **poco sicuro** in presenza di malfunzionamenti dei sistemi di attuazione. Se ad esempio, per un malfunzionamento delle valvole di adduzione del combustibile, venisse immessa in camera di combustione una portata di combustibile maggiore rispetto al set point  $w_c^{des}$  la portata d'aria  $w_a^{des} = K w_c^{des}$  sarebbe insufficiente a «sostenere» la combustione, e si indurrebbe dell'incombusto.

Analogamente, se vi fosse un malfunzionamento delle serrande aria tale da rendere la portata di aria effettiva  $w_a$  maggiore (o minore) del set point, si avrebbe uno squilibrio sull'air-fuel ratio che indurrebbe incombusto oppure un crollo dell'efficienza

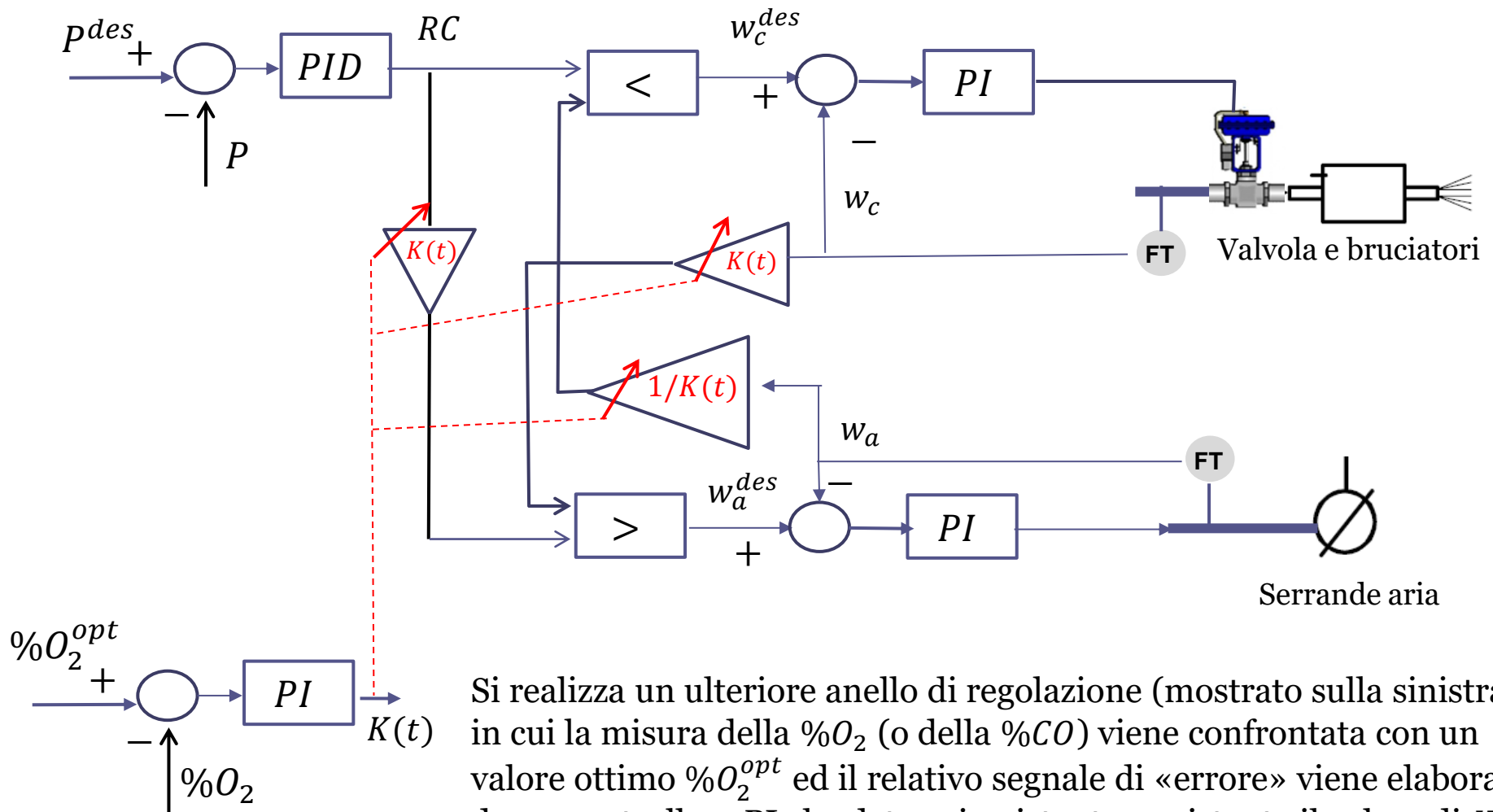
Per questo motivo si impiega una architettura più sofisticata che vede coinvolto il **controllo con selettore** ed il controllo di rapporto:



Il **selettore di minimo** serve a garantire che il set point per la portata del combustibile non ecceda mai il valore  $w_a/K$  che la portata d'aria **effettiva** immessa in CdC (e **misurata** istante per istante) consente di bruciare.

Il **selettore di massimo** serve invece a garantire che il set point  $w_a^{des}$  per la portata dell'aria non sia mai inferiore al valore  $Kw_c$  che serve a garantire la combustione completa della portata **effettiva** del combustibile immessa in CdC (e **misurata** istante per istante)

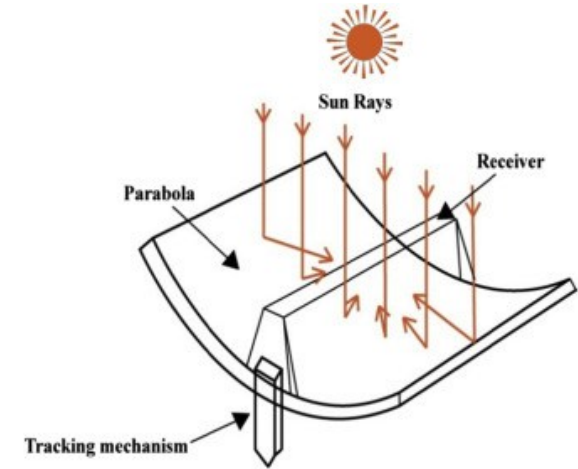
Vi è un **ulteriore possibile affinamento dello schema**. Il valore di  $K$  viene **variato istante per istante** sulla base della misura della percentuale  $\%O_2$  di ossigeno (o di anidride carbonica) presente nei fumi di scarico, che costituisce un «indicatore di buona combustione».



Si realizza un ulteriore anello di regolazione (mostrato sulla sinistra) in cui la misura della  $\%O_2$  (o della  $\%CO$ ) viene confrontata con un valore ottimo  $\%O_2^{opt}$  ed il relativo segnale di «errore» viene elaborato da un controllore  $PI$  che determina istante per istante il valore di  $K$

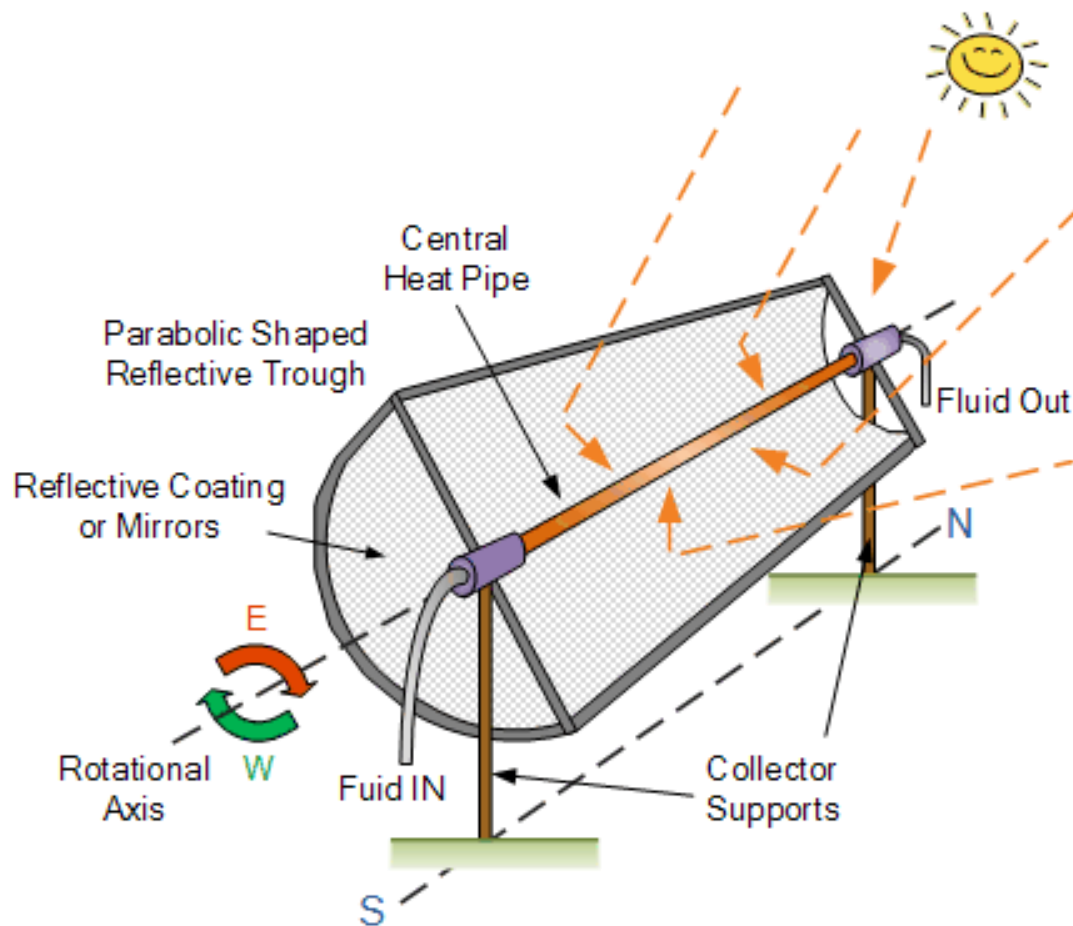
## Controllo di un impianto solare termodinamico

Un impianto solare termodinamico, anche noto come CSP (Concentrating Solar Plant) sfrutta come fonte energetica primaria la radiazione solare. In una delle realizzazioni più diffuse («parabolic through»), dei **collettori solari di forma parabolica** concentrano la radiazione solare su un **tubo ricevitore** all'interno del quale transita un **fluido termovettore** che viene riscaldato e può essere impiegato per generare vapore, e quindi energia elettrica, accumulato in serbatoi di storage, o utilizzato in altri modi ancora.



Un impianto CSP prevede numerose regolazioni in funzione della particolare configurazione impiantistica.

La posizione angolare degli specchi parabolici viene variata nell'arco della giornata in funzione dell'angolo di incidenza della radiazione solare



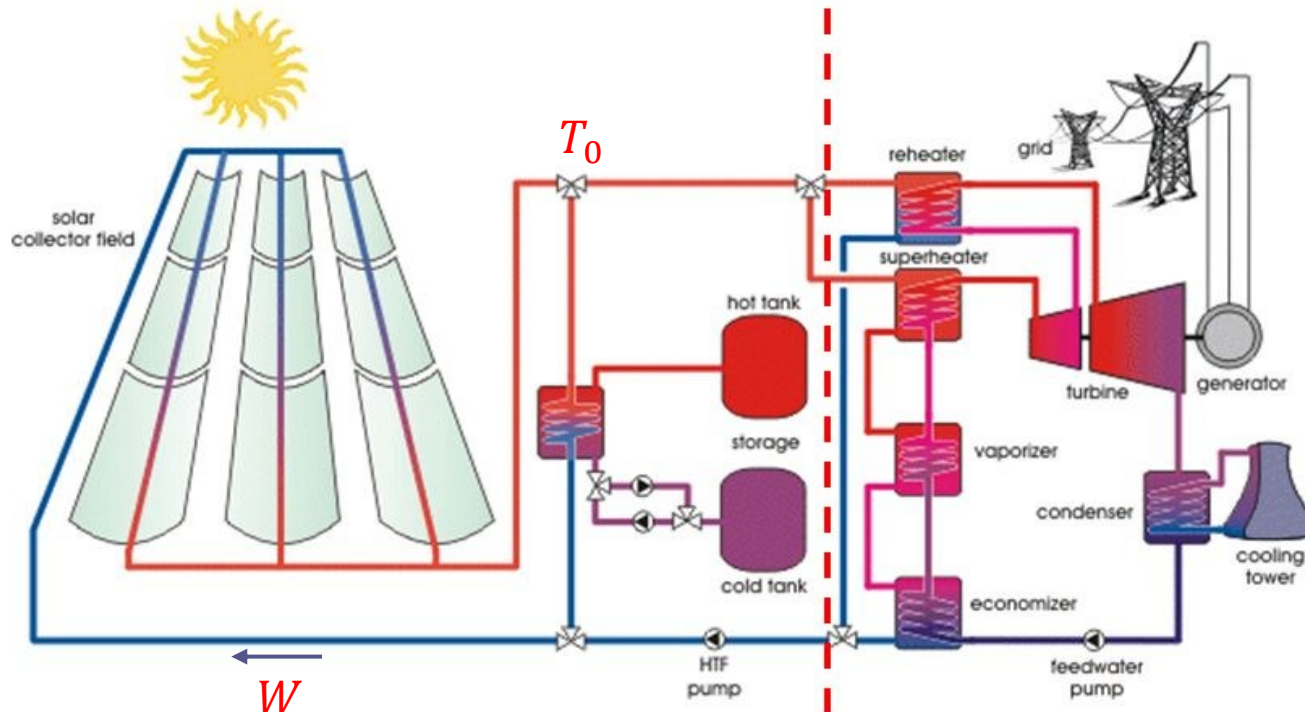
E' una regolazione predittiva le cui principali criticità sono di carattere meccanico, date le grosse dimensioni dei collettori.

**Specchi di Fresnel** come alternativa ai parabolic through



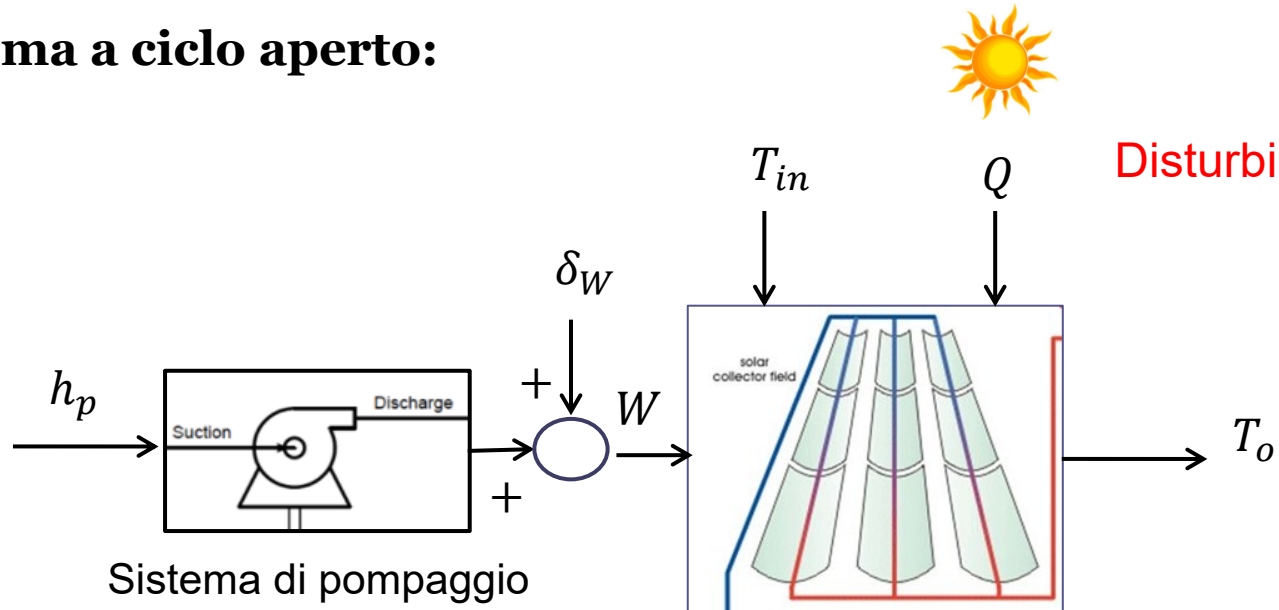
La regolazione del «campo solare», ben più problematica da un punto vista «controllistico», ha come principale **ingresso manipolabile** la portata  $W$  con cui il fluido termovettore viene fatto circolare nei tubi ricevitori, e come grandezza di **uscita** la temperatura  $T_o$  del fluido termovettore all'uscita del campo solare. Altrettanto delicata è la gestione dei sistemi di accumulo e dell'interfacciamento con il sistema di produzione di energia.

### Schematic of a CSP plant with energy storage capability



Presentiamo una possibile architettura per il sistema di controllo del campo solare

### Sistema a ciclo aperto:



$h_p$  Comando della pompa a velocità variabile

$T_{in}$  Temperatura del fluido all'ingresso del campo solare

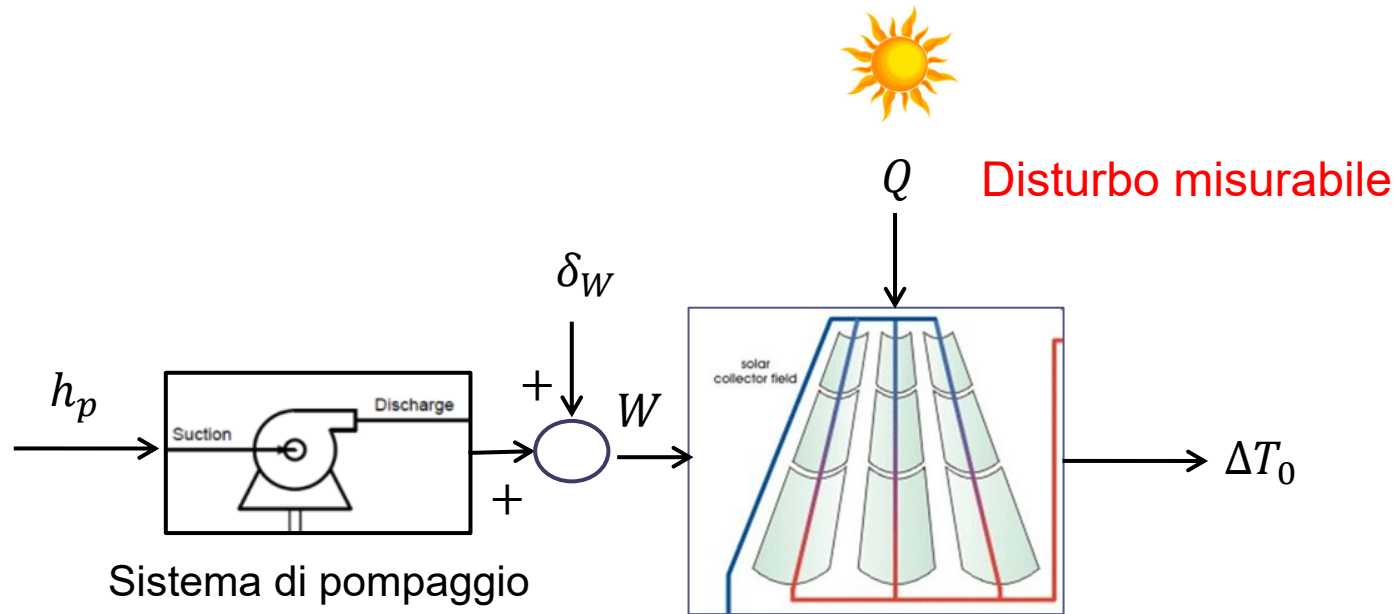
$Q$  Potenza della radiazione solare incidente

$\delta_W$  Disturbo sulla portata

Considerando come variabile di uscita il **salto termico**

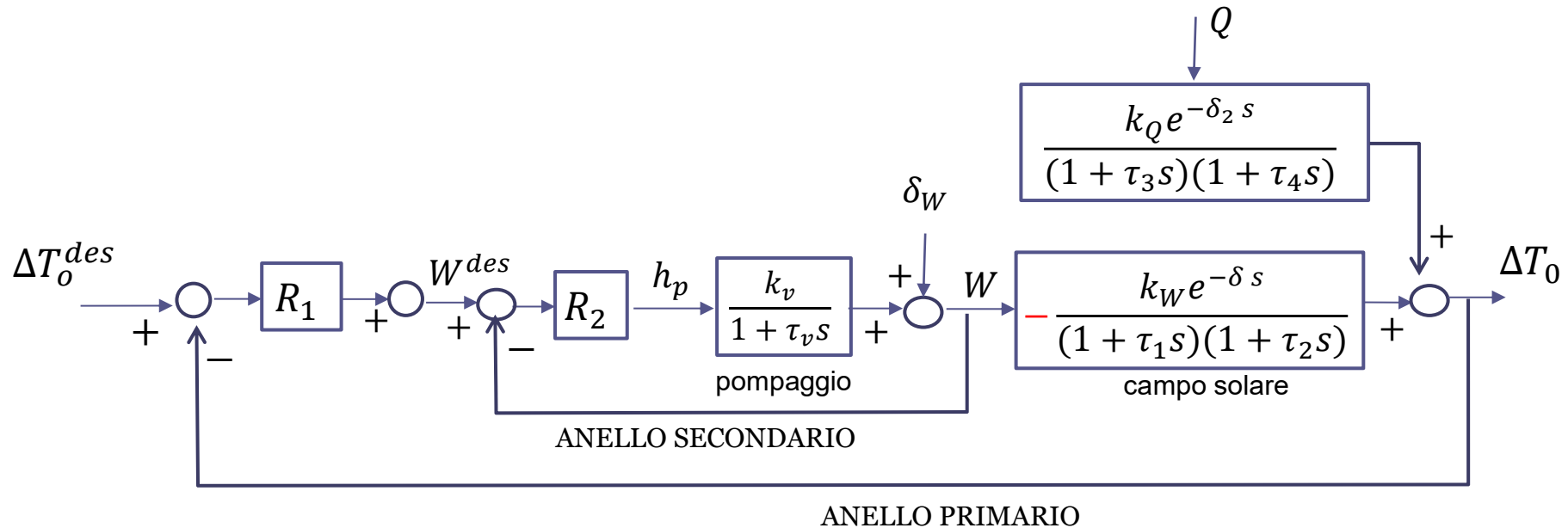
$$\Delta T_o = T_o - T_{in}$$

il modello si semplifica



Elementi della architettura di controllo:

**Controllo in cascata** con anello primario sul salto termico e anello secondario sulla portata del fluido termovettore



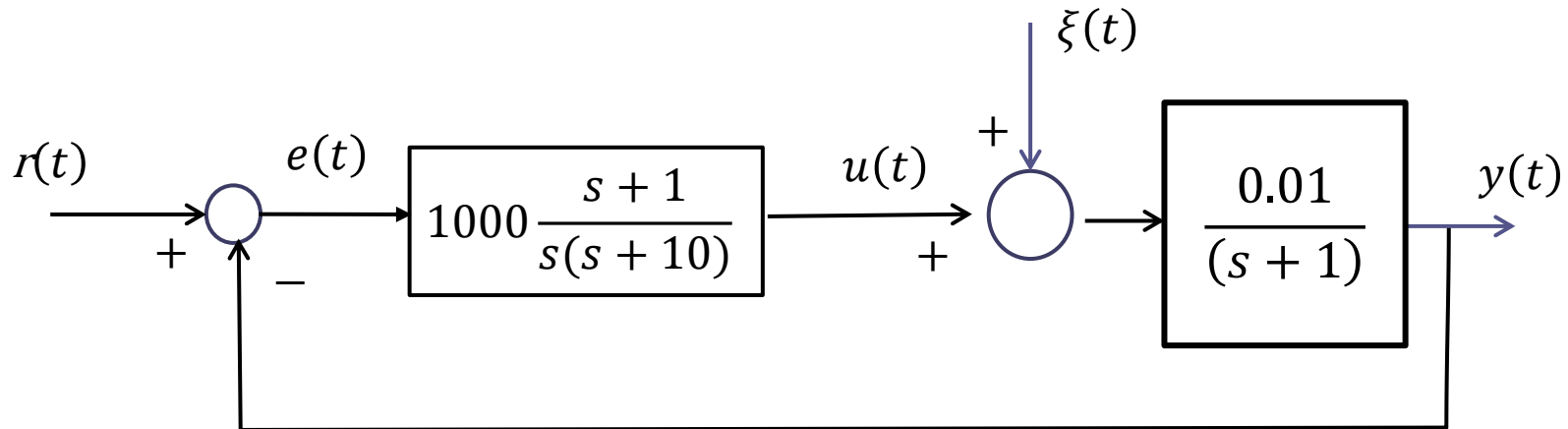
N.B. il modello del processo è **linearizzato** intorno ad un punto di lavoro

Il salto termico ottenibile è limitato in funzione del valore della radiazione solare incidente. La scelta del set-point  $\Delta T_0^{des}$  deve tenerne conto ( $\Delta T_0^{des} \leq Q k_Q$ )

Nei casi in cui il valore del ritardo  $\delta$  risulti molto elevato, l'architettura può essere ulteriormente arricchita inglobando al suo interno il **Predittore di Smith**.

## Implementazione digitale di controllori e filtri

Che significa **concretamente** realizzare un sistema di controllo come quello mostrato nello schema seguente ?



Si deve generare il segnale  $u(t)$  tale che 
$$\frac{U(s)}{E(s)} = 1000 \frac{s+1}{s(s+10)}$$

In altri termini, si deve generare **in tempo reale** la soluzione dell'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

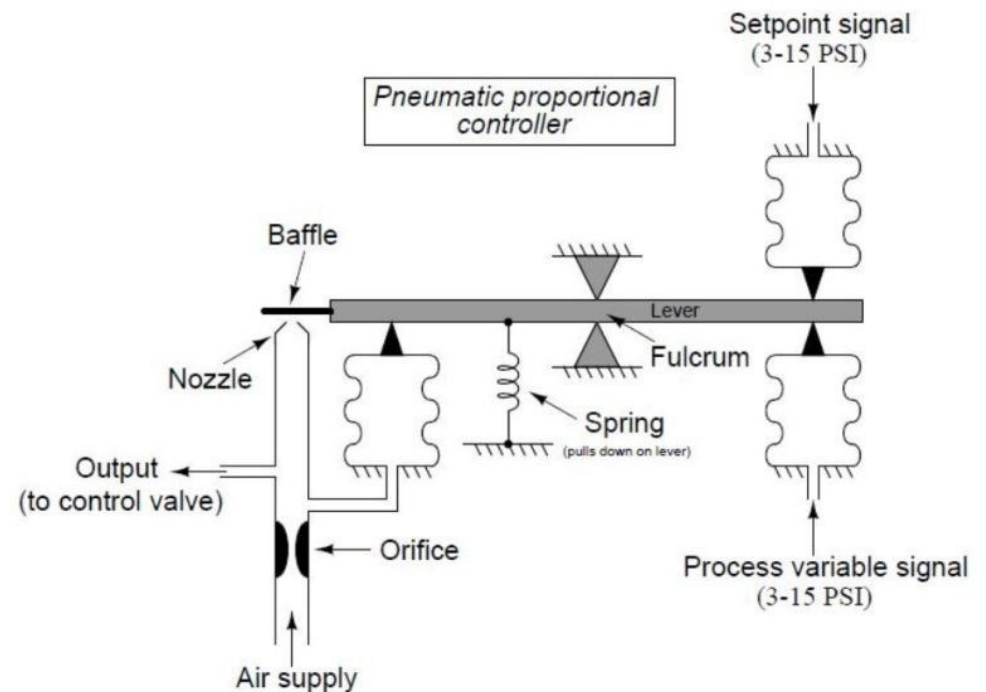
$$\ddot{u}(t) + 10 \dot{u}(t) = 1000 \dot{e}(t) + 1000 e(t)$$

## Un pò di storia



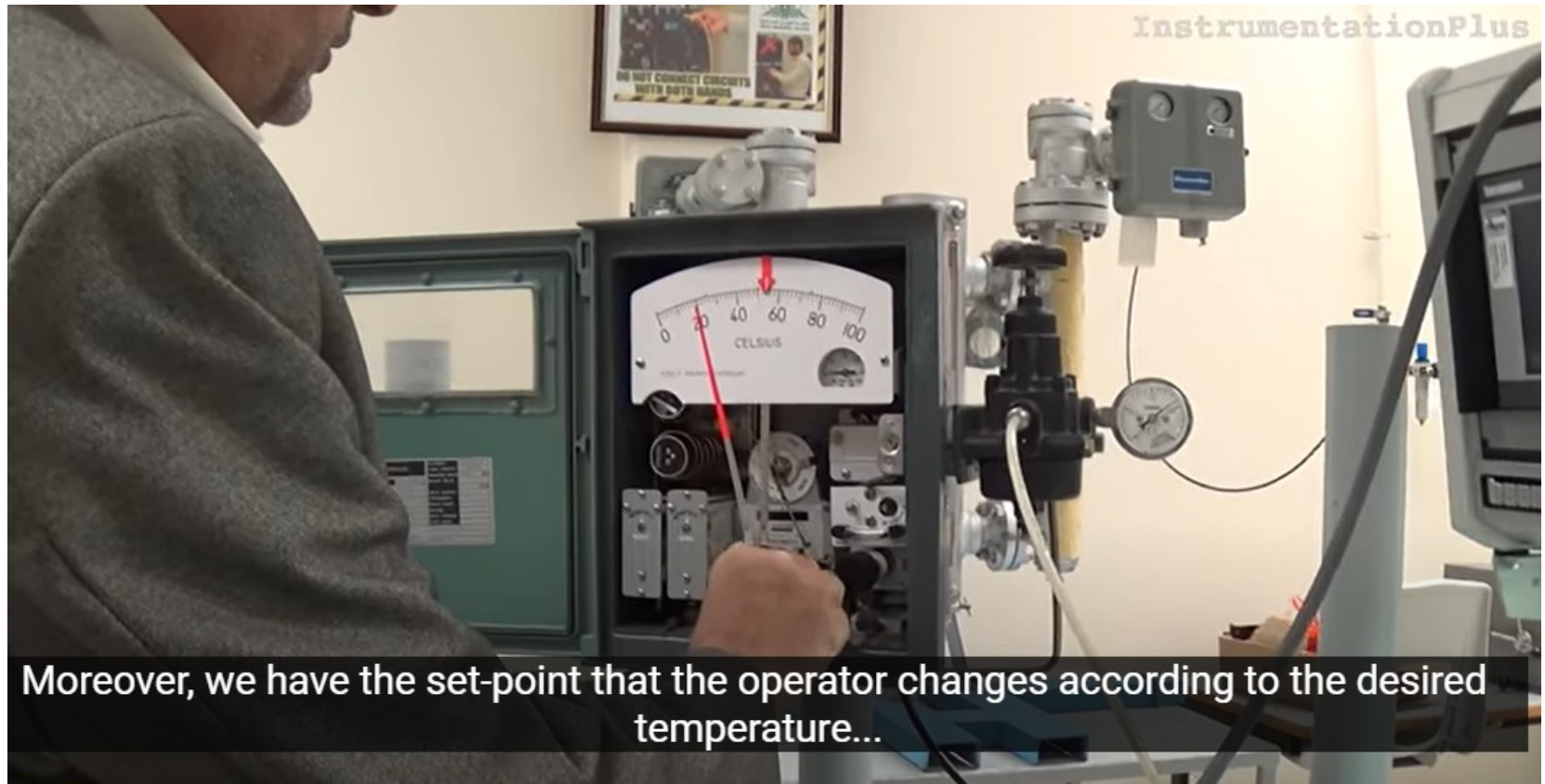
Controllore PID analogico con tecnologia **pneumatica**.

In alto sono presenti i comandi di regolazione per l'azione proporzionale (P), integrale (I) e derivativa (D).



## PID Controllers in the 1940 - The 43AP Pneumatic Controller

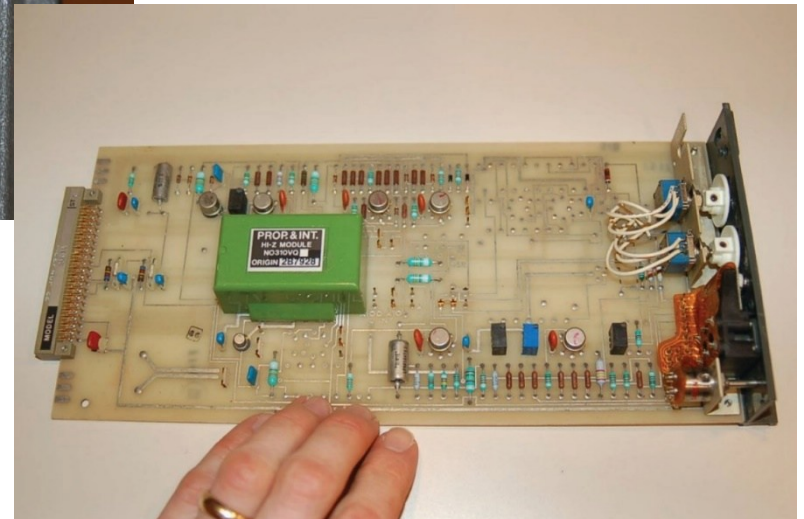
<https://www.youtube.com/watch?v=DcUsublyzbI>



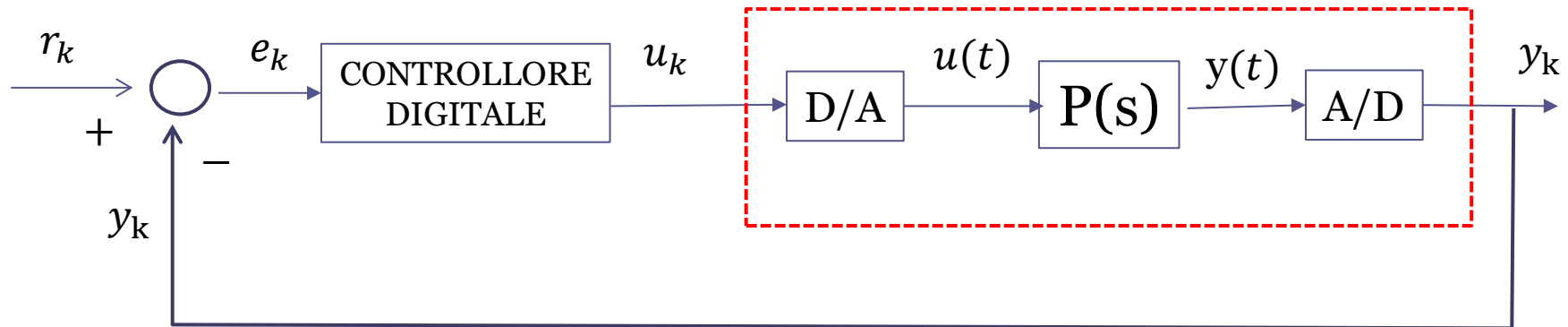


Trimmer per la taratura dei guadagni

Scheda elettronica di controllo



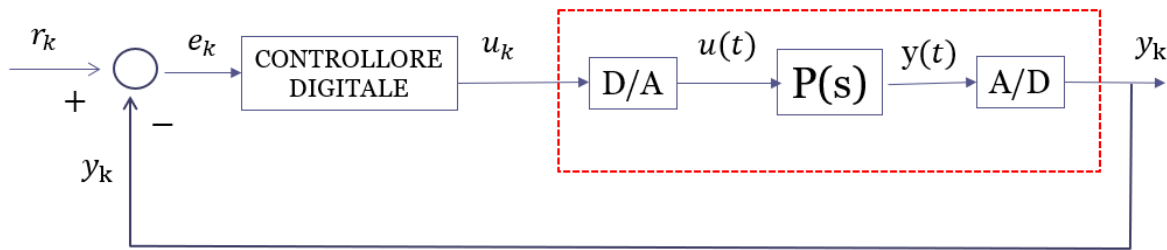
Nella pratica attuale, i sistemi di controllo vengono implementati **per via numerica** utilizzando dei **microprocessori digitali** che elaborano la **sequenza campionata** della variabile di uscita



A valle del processo (più precisamente, a valle del sensore di misura) è inserito un convertitore analogico digitale (A/D) che campiona il segnale di uscita  $y(t)$  estraendo la sequenza numerica

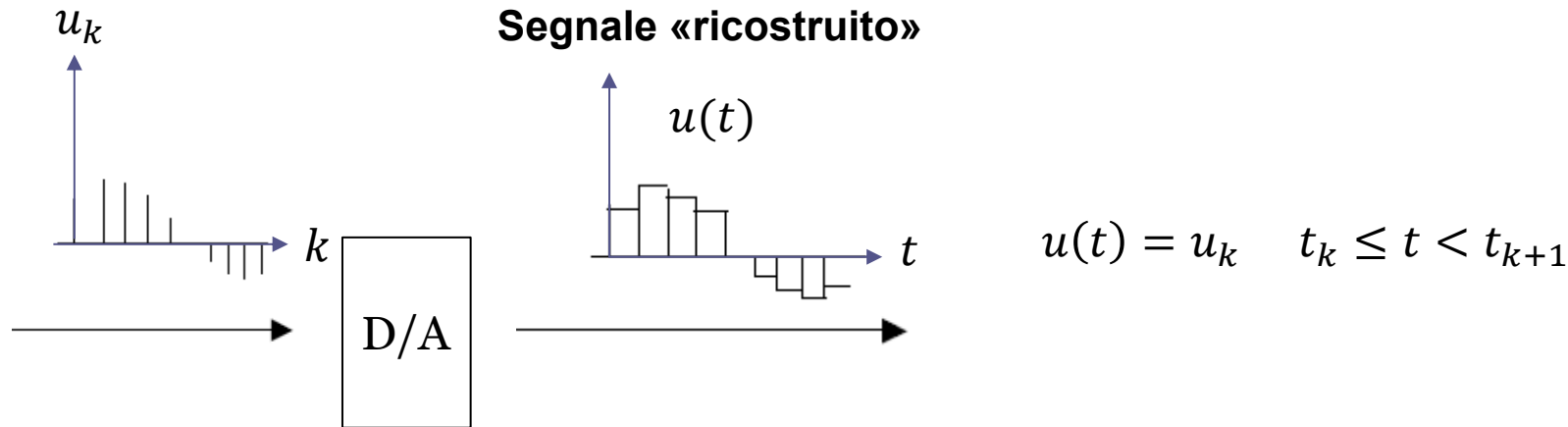
$$y_k = y(kT_c)$$

in cui  $T_c$  viene detto «**periodo di campionamento**»



Il blocco «**controllore digitale**» si attiva ogni  $T_c$  secondi effettuando il calcolo del segnale  $u_k$  ad ogni istante  $t_k = kT_c$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$

Una volta che all'istante generico  $t_k = kT_c$  il controllore digitale ha determinato la propria uscita  $u_k$ , questo valore transita attraverso un convertitore digitale/analogico (D/A) che converte la sequenza numerica  $u_k$  in un segnale «fisico»  $u(t)$  costante a tratti, di fatto «mantenendone costante» il valore fino al successivo istante di campionamento



## Implementazione digitale «time-based» di un controllore PID

$$u_{PID}(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t)$$

$$u_P(t) = K_P e(t) \qquad u_I(t) = \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \qquad u_D(t) = K_P T_D \frac{de(t)}{dt}$$

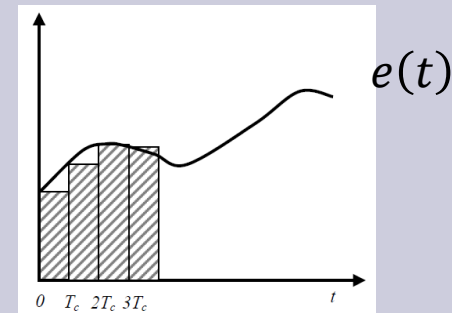
Una possibile implementazione digitale ha la forma seguente:

$$u_{PID,k} = u_{P,k} + u_{I,k} + u_{D,k}$$

**P**  $u_{P,k} = K_P e_k$

**I**  $u_{I,0} = 0$   
 $u_{I,k} = u_{I,k-1} + T_c \frac{K_P}{T_I} e_k \qquad k = 1, 2, \dots$

Metodo dei rettangoli per approssimare numericamente (ricorsivamente) il calcolo dell'integrale



**D**  $u_{D,k} = K_P T_D \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c}$

Differenze all'indietro per approssimare numericamente il calcolo della derivata

## Legge di controllo complessiva

$$u_{PID,k} = u_{P,k} + u_{I,k} + u_{D,k} \quad (1)$$

$$= K_P e_k + u_{I,k-1} + T_c \frac{K_P}{T_I} e_k + K_P T_D \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c} \quad (2)$$

Dalla eq. (1) ritardata di un passo di campionamento:

$$\begin{aligned} u_{I,k-1} &= u_{PID,k-1} - u_{P,k-1} - u_{D,k-1} \\ &= u_{PID,k-1} - K_P e_{k-1} - K_P T_D \frac{e_{k-1} - e_{k-2}}{T_c} \end{aligned} \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (2) e riordinando si ottiene l'espressione finale della legge di controllo PID digitale:

$$e_{-1} = e_{-2} = u_{PID,-1} = 0$$

$$u_{PID,k} = \left( K_P + T_c \frac{K_P}{T_I} + \frac{K_P T_D}{T_c} \right) e_k - \left( K_P + 2 \frac{K_P T_D}{T_c} \right) e_{k-1} + \frac{K_P T_D}{T_c} e_{k-2} + u_{PID,k-1}$$

In forma più compatta:

$$u_{PID,k} = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2} + u_{PID,k-1}$$

$$b_0 = K_P \left( 1 + \frac{T_c}{T_I} + \frac{T_D}{T_c} \right) \quad b_1 = -K_P \left( 1 + 2 \frac{T_D}{T_c} \right) \quad b_2 = \frac{K_P T_D}{T_c}$$

### Pseudo-codice di controllo

Inizializzazione:  $k = 0 \quad u_{PID,-1} = e_{-1} = e_{-2} = 0$

Ogni  $T_c$  secondi:

Leggi  $y_k$  dal registro del convertitore A/D

Calcola  $e_k = r_k - y_k$

Calcola  $u_{PID,k} = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2} + u_{PID,k-1}$

Scrivi  $u_{PID,k}$  nel registro del convertitore D/A

$u_{PID,k-1} := u_{PID,k}$

$e_{k-2} := e_{k-1}$

$e_{k-1} := e_k$

$k = k + 1$

Algoritmo PI (caso particolare dell'algoritmo PID con  $T_D = 0$ )

$$e_{-1} = u_{PI,-1} = 0$$

$$u_{PI,k} = K_P \left( 1 + \frac{T_c}{T_I} \right) e_k - K_P e_{k-1} + u_{PI,k-1}$$

### Pseudo-codice di controllo

Inizializzazione:  $k = 0$      $u_{PI,-1} = e_{-1} = 0$

Ogni  $T_c$  secondi:

Leggi  $y_k$  dal registro del convertitore A/D

Calcola  $e_k = r_k - y_k$

Calcola  $u_{PI,k} = K_P \left( 1 + \frac{T_c}{T_I} \right) e_k - K_P e_{k-1} + u_{PI,k-1}$

Scrivi  $u_{PI,k}$  nel registro del convertitore D/A

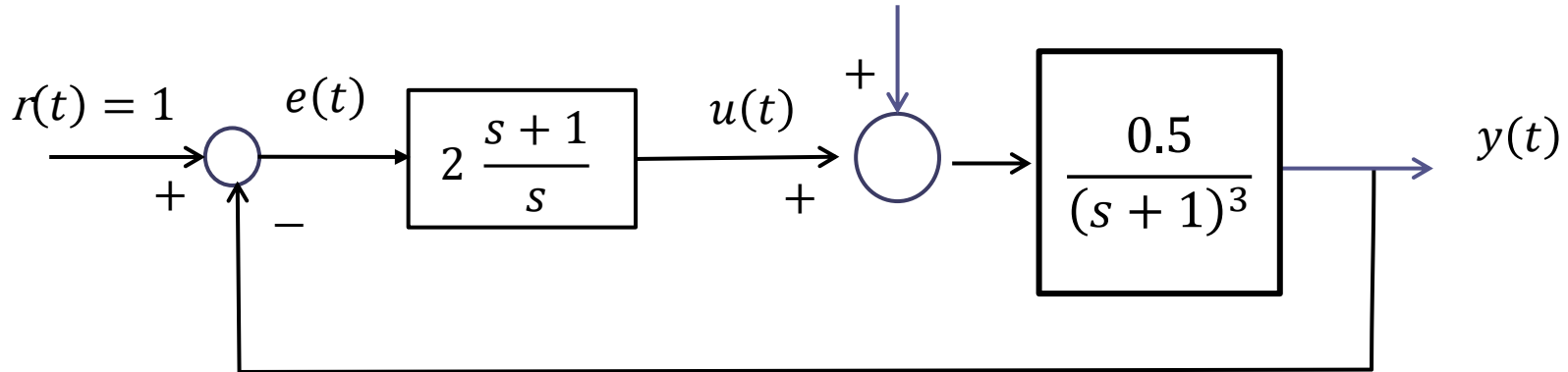
$u_{PI,k-1} := u_{PI,k}$

$e_{k-1} := e_k$

$k = k + 1$

## Esempio

$$\xi(t) = \delta_{-1}(t - 50)$$



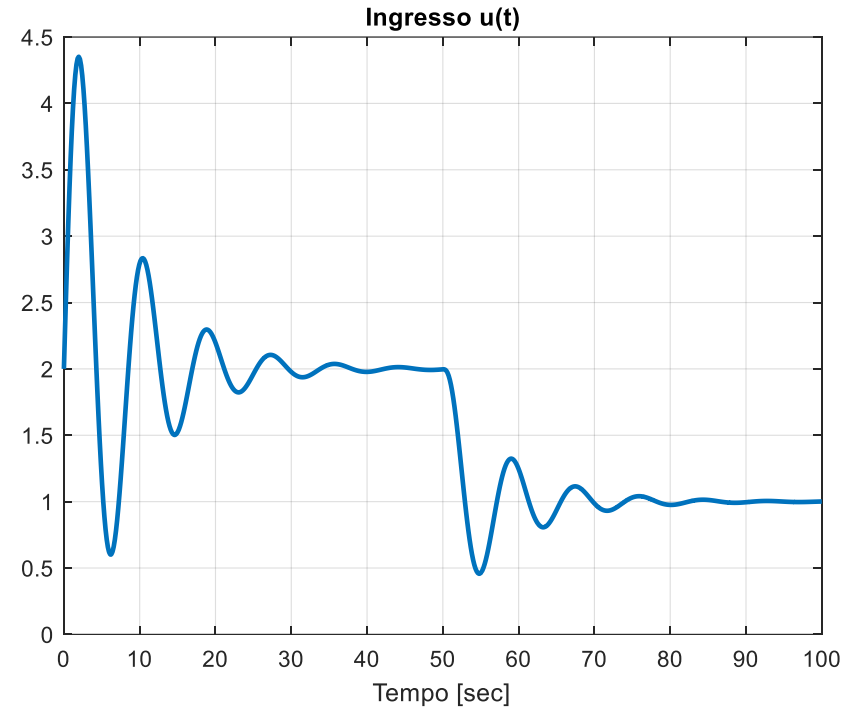
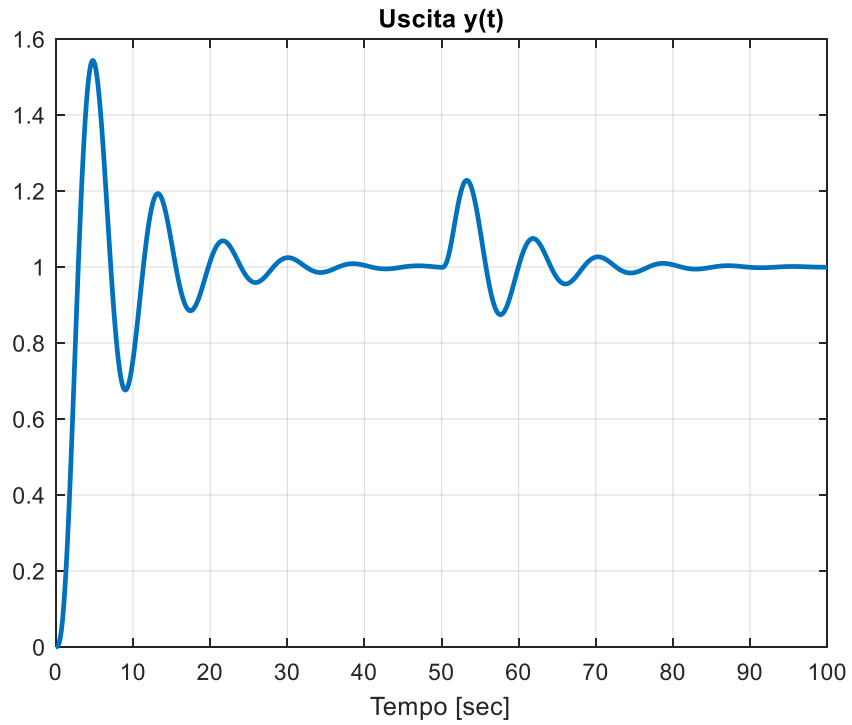
Regolatore PI con

$$K_P = 2$$

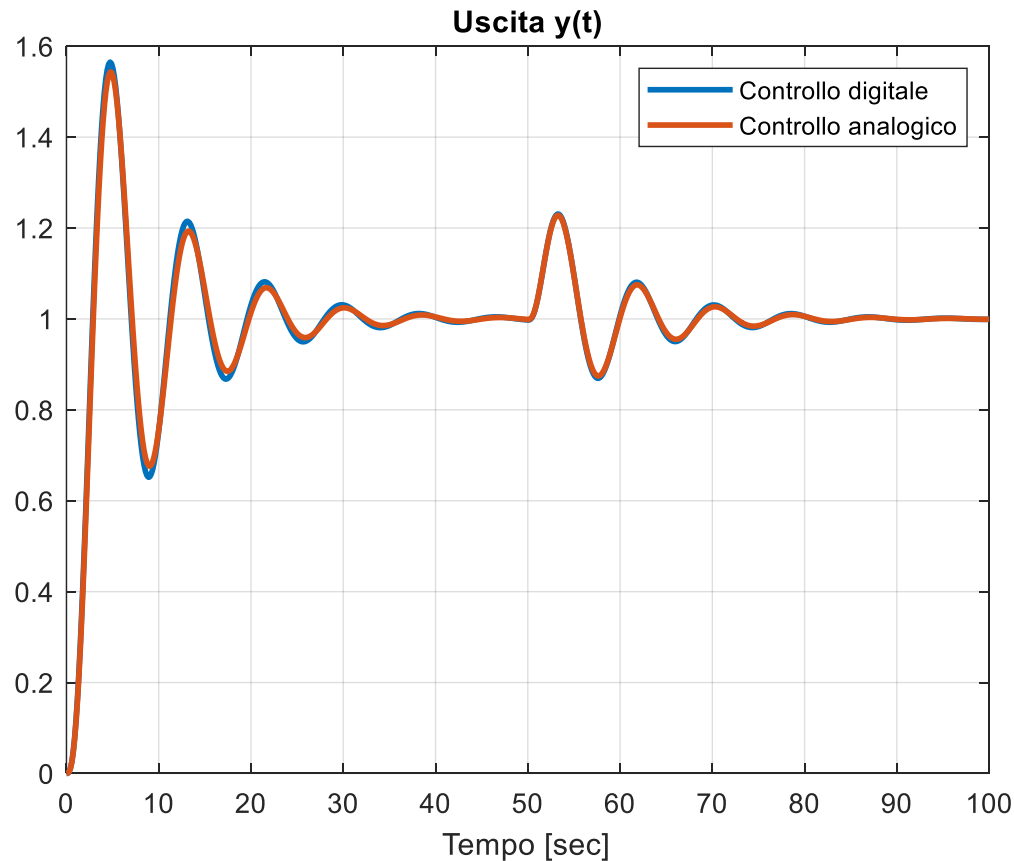
$$T_I = 1s$$

Disturbo di ampiezza unitaria che interviene a  $t = 50$

## Sistema di controllo a tempo continuo



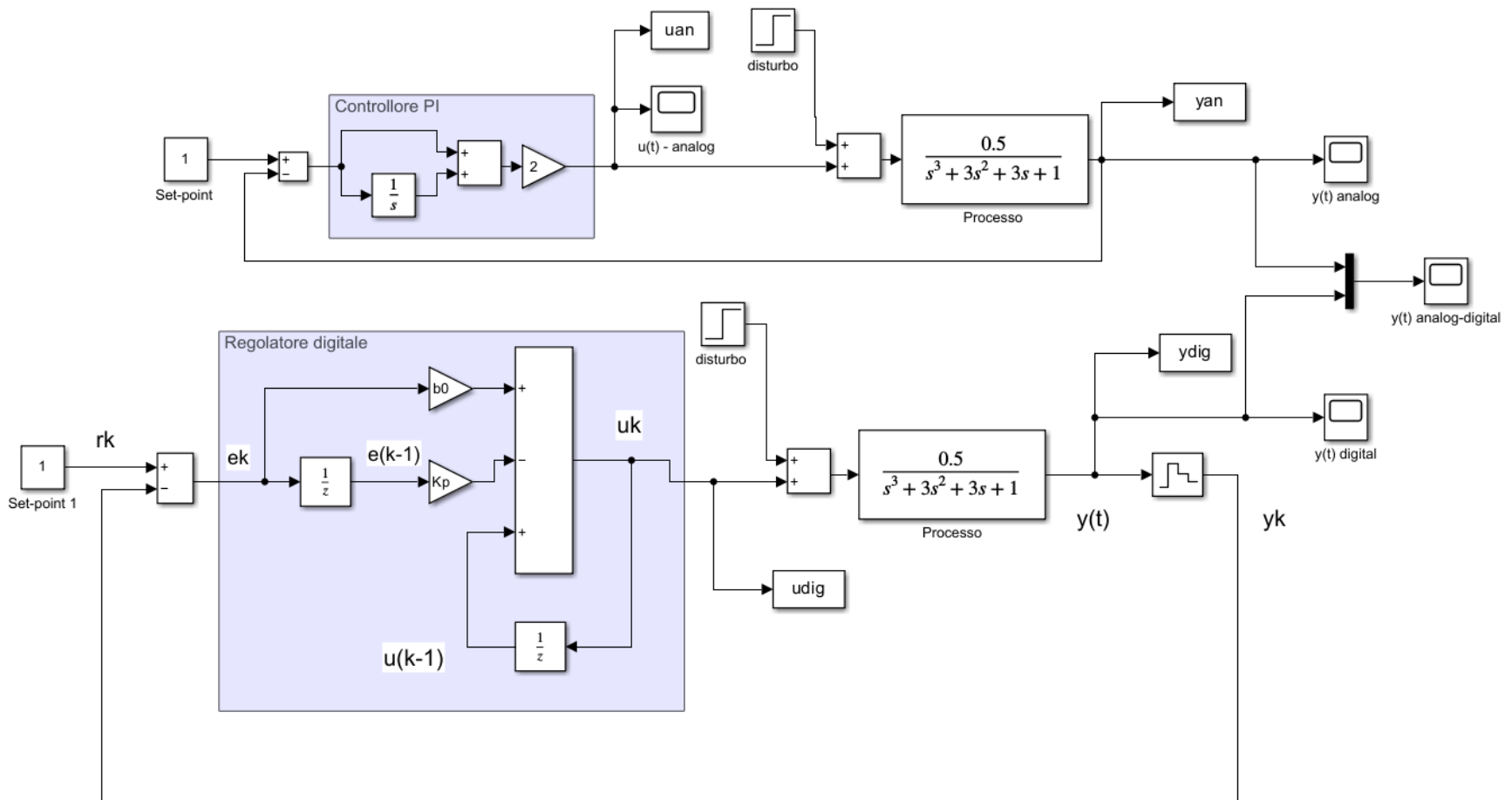
Sistema di controllo digitale con  $T_c = 0.1$  s



L'evoluzione temporale dell'uscita è pressoché indistinguibile da quella ottenuta impiegando il regolatore analogico

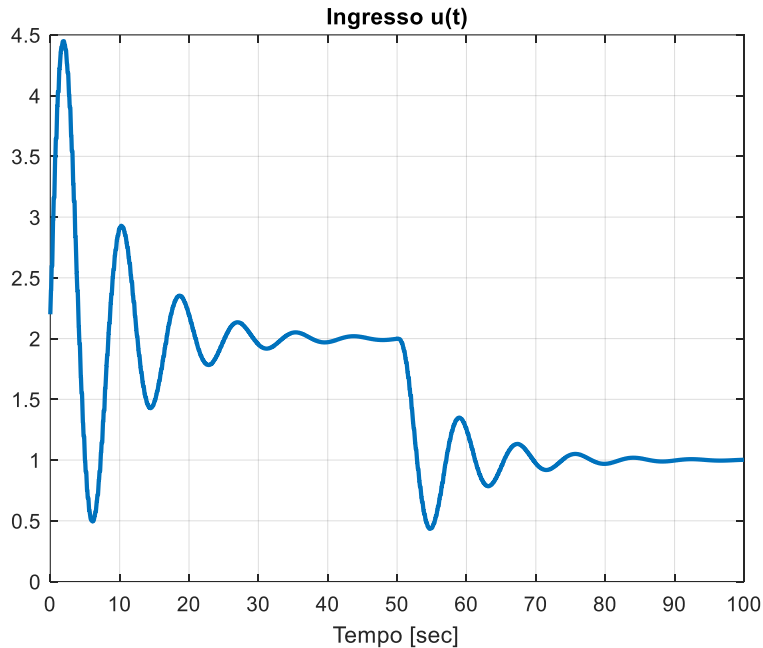
Es1\_DigitalPI.slx

Es1\_DigitalPI\_script.m

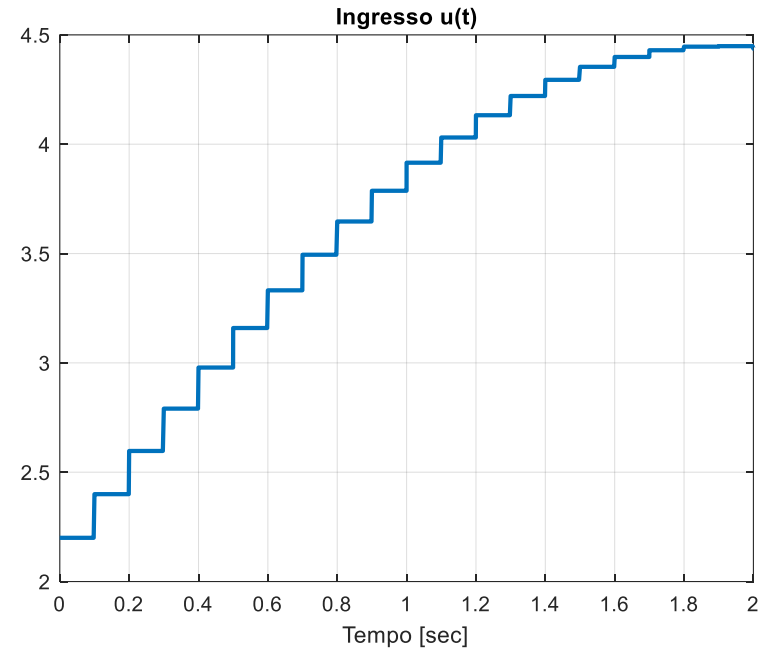


## Sistema di controllo digitale con $T_c = 0.1 \text{ s}$

### Ingresso



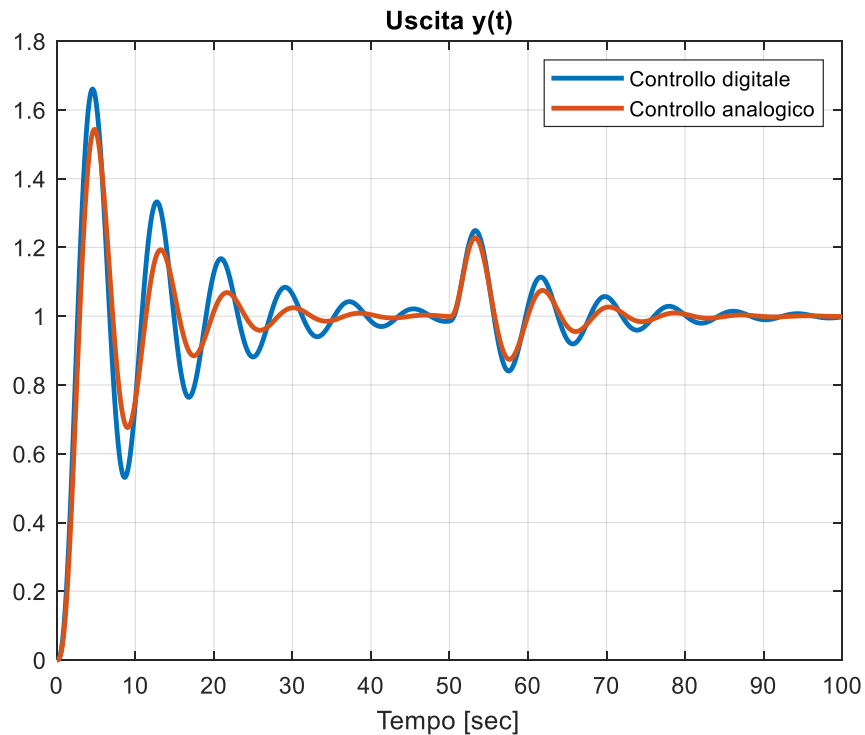
### Ingresso (zoom)



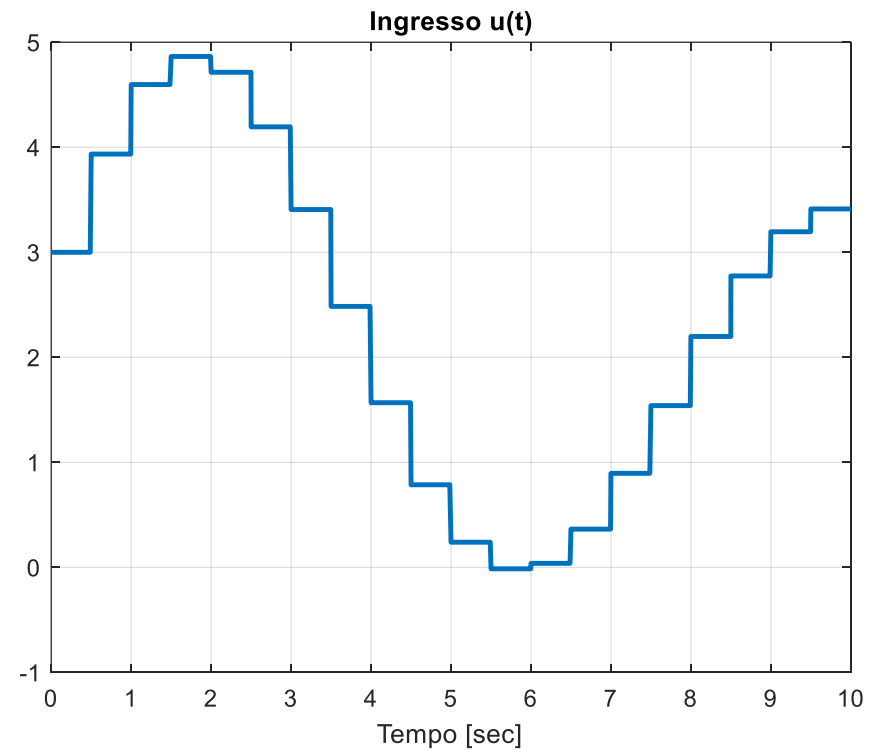
Lo zoom mostra come il segnale applicato in ingresso al processo sia costante a tratti, e venga aggiornato ogni decimo di secondo.

## Sistema di controllo digitale con $T_c = 0.5$ s

### Uscita

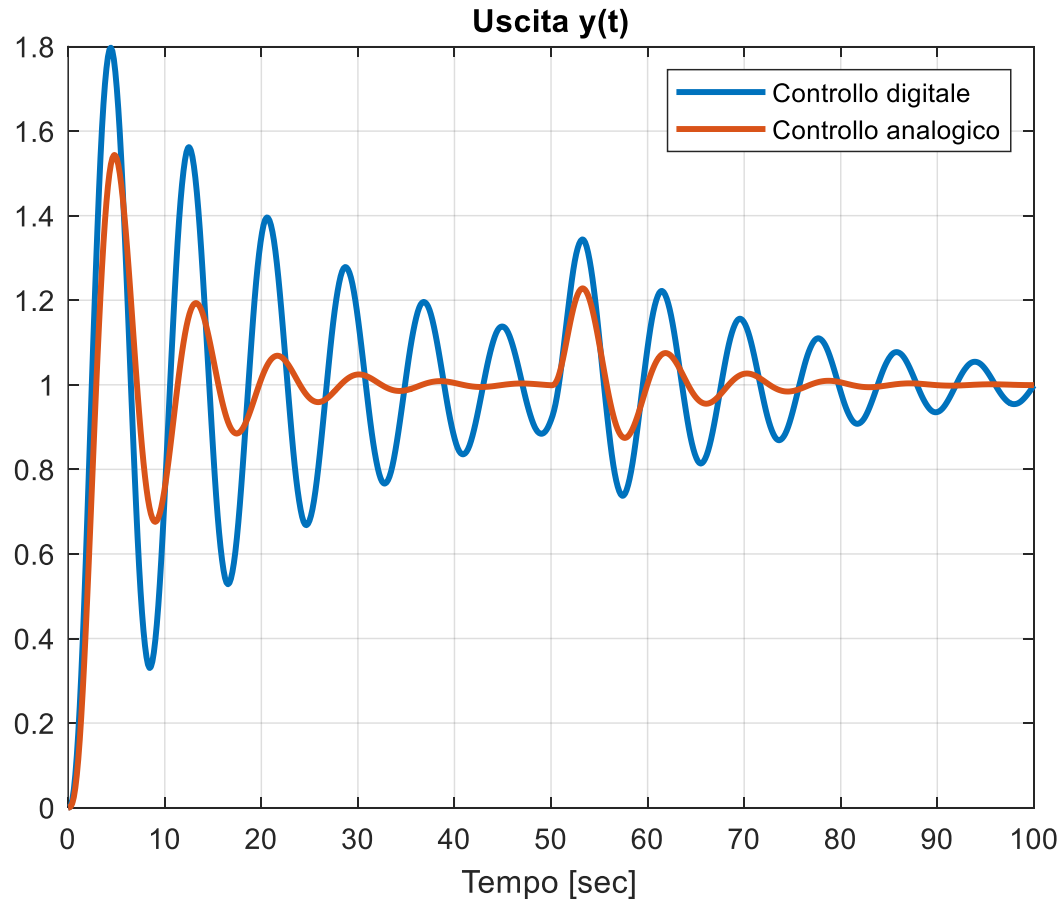


### Ingresso (zoom)



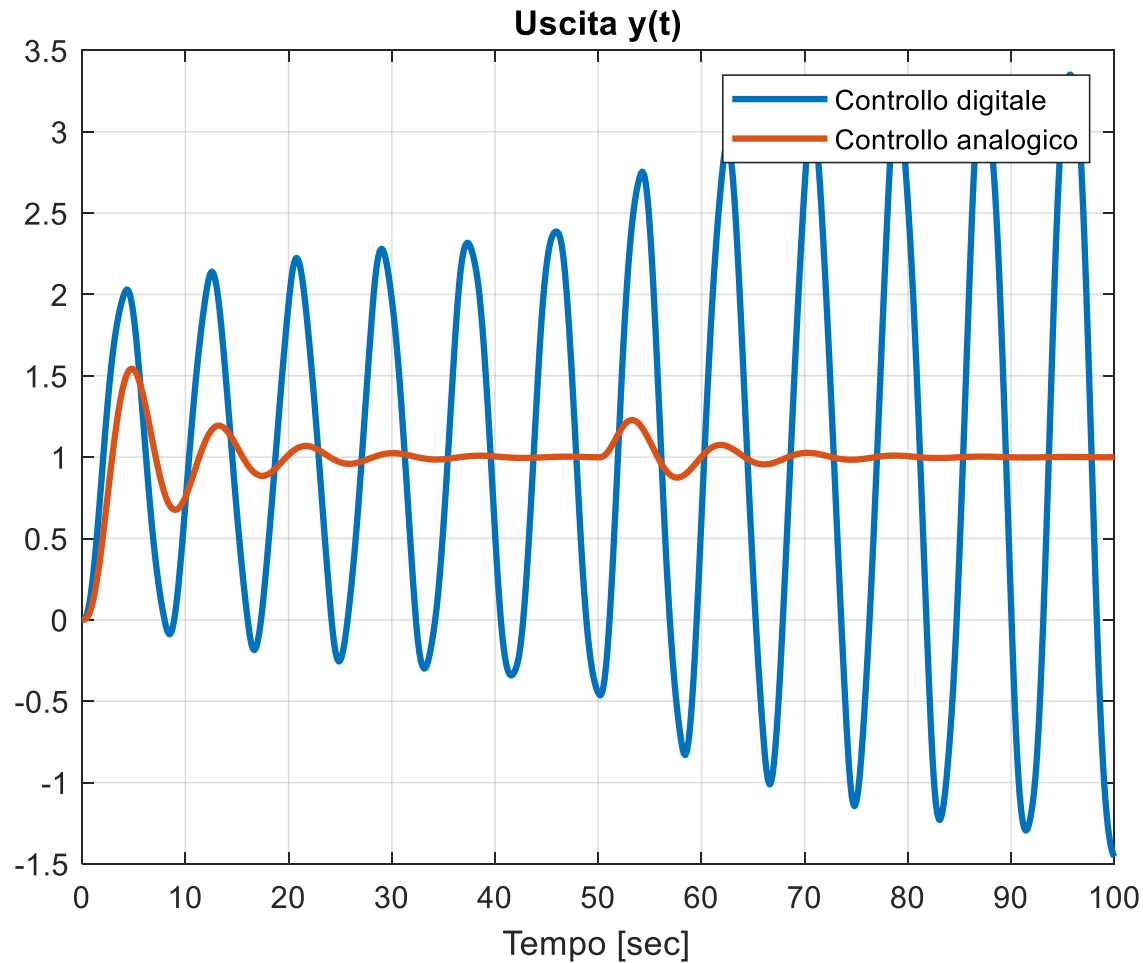
Iniziano a evidenziarsi dei deterioramenti prestazionali (maggiore sovraelongazione) dovuti all'impiego del regolatore digitale

Sistema di controllo digitale con  $T_c = 1 s$



Il deterioramento prestazionale è decisamente più marcato

Sistema di controllo digitale con  $T_c = 2 s$



Il sistema di controllo diventa **instabile** se  $T_c = 2 s$

# Implementazione digitale di un controllore qualunque

Per estendere il discorso ad **algoritmi di controllo di forma più generale** presentiamo due metodi di implementazione digitale differenti rispetto all'algoritmo «time-based», che era applicabile unicamente per regolatori della famiglia dei PID.

Vediamo due metodi:

**Metodo delle differenze finite**

**Metodo di «Tustin»**

## Metodo delle differenze finite

Per estendere il discorso ad **algoritmi di controllo di forma più generale** torniamo all'esempio introduttivo. Un modo per ricavare un algoritmo numerico che risolva in via approssimata l'equazione differenziale

$$\ddot{u}(t) + 10 \dot{u}(t) = 1000 \dot{e}(t) + 1000 e(t)$$

è quello di valutare l'equazione differenziale al generico istante di campionamento  $t = kT_c$

$$\ddot{u}(kT_c) + 10 \dot{u}(kT_c) = 1000 \dot{e}(kT_c) + 1000 e(kT_c)$$

approssimando i termini differenziali mediante **differenze finite** all'indietro prime o seconde

$$\dot{u}(kT_c) = \dot{u}_k \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} \qquad \dot{e}(kT_c) = \dot{e}_k \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c}$$

$$\ddot{u}(kT_c) = \ddot{u}_k \approx \frac{\dot{u}_k - \dot{u}_{k-1}}{T_c} \approx \frac{u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2}}{T_c^2}$$

Sostituendo nella equazione differenziale discretizzata le corrispondenti approssimazioni, e riordinando, si ottiene dopo qualche passaggio

$$u_k = \left( \frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \right) u_{k-1} - \left( \frac{1}{1 + 10T_c} \right) u_{k-2} + \left( \frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \right) e_k - \frac{1000T_c}{1 + 10T_c} e_{k-1}$$

## Passaggi

$$\ddot{u}(kT_c) + 10 \dot{u}(kT_c) = 1000 \dot{e}(kT_c) + 1000 e(kT_c)$$



$$\frac{u_k - 2u_{k-1} + u_{k-2}}{T_c^2} + 10 \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} = 1000 \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c} + 1000 e_k$$



$$u_k \left( \frac{1}{T_c^2} + \frac{10}{T_c} \right) = \left( \frac{2}{T_c^2} + \frac{10}{T_c} \right) u_{k-1} - \frac{1}{T_c^2} u_{k-2} + \left( \frac{1000}{T_c} + 1000 \right) e_k - \frac{1000}{T_c} e_{k-1}$$



$$u_k = \left( \frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \right) u_{k-1} - \left( \frac{1}{1 + 10T_c} \right) u_{k-2} + \left( \frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \right) e_k - \frac{1000T_c}{1 + 10T_c} e_{k-1}$$

$$u_k = \left( \frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \right) u_{k-1} - \left( \frac{1}{1 + 10T_c} \right) u_{k-2} + \left( \frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \right) e_k - \frac{1000T_c}{1 + 10T_c} e_{k-1}$$

Si è ottenuta una relazione **ricorsiva** che esprime il valore attuale del segnale di ingresso al processo mediante una combinazione lineare tra il valore attuale  $e_k$  del segnale di errore ed alcuni valori precedenti del segnale di ingresso ( $u_{k-1}$  ed  $u_{k-2}$ ) e del segnale di errore ( $e_{k-1}$ )

In forma compatta:

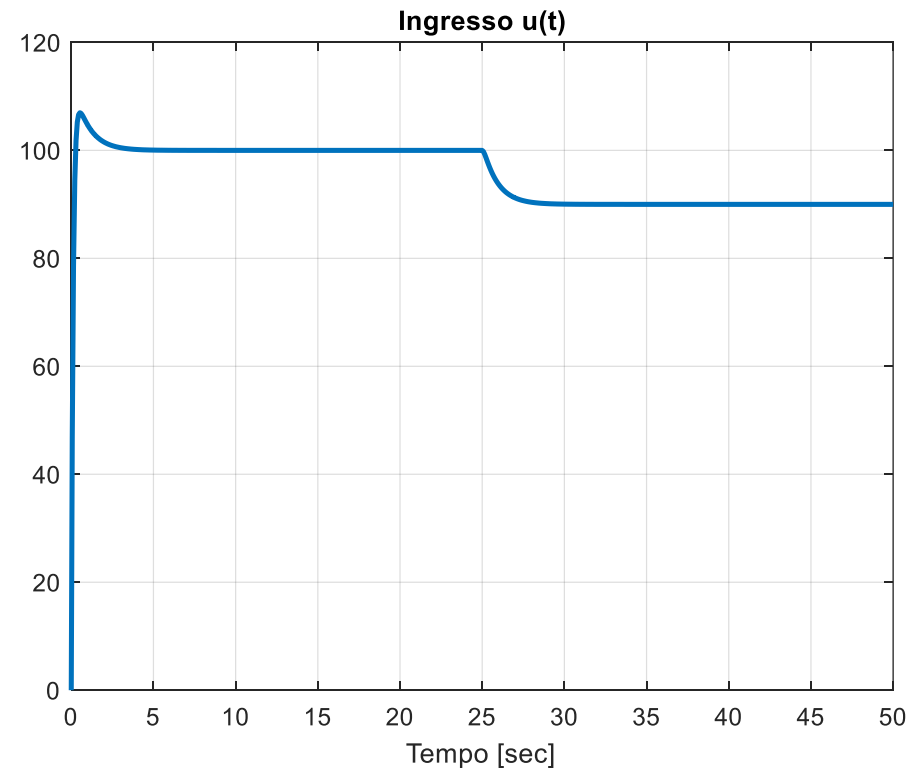
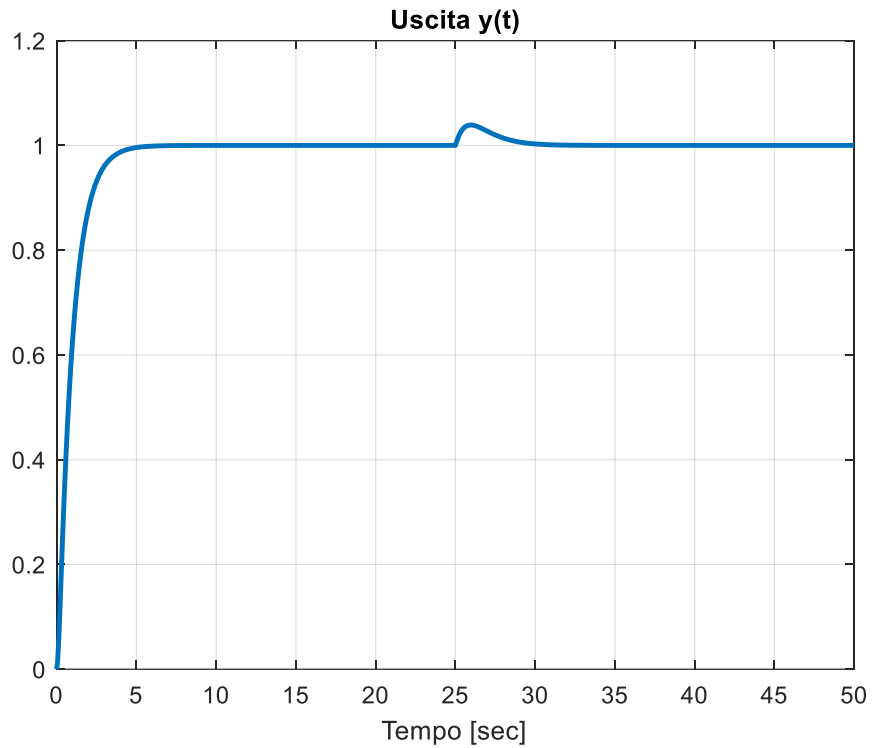
$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1}$$

$$a_1 = -\frac{2 + 10T_c}{1 + 10T_c} \quad a_2 = \frac{1}{1 + 10T_c}$$

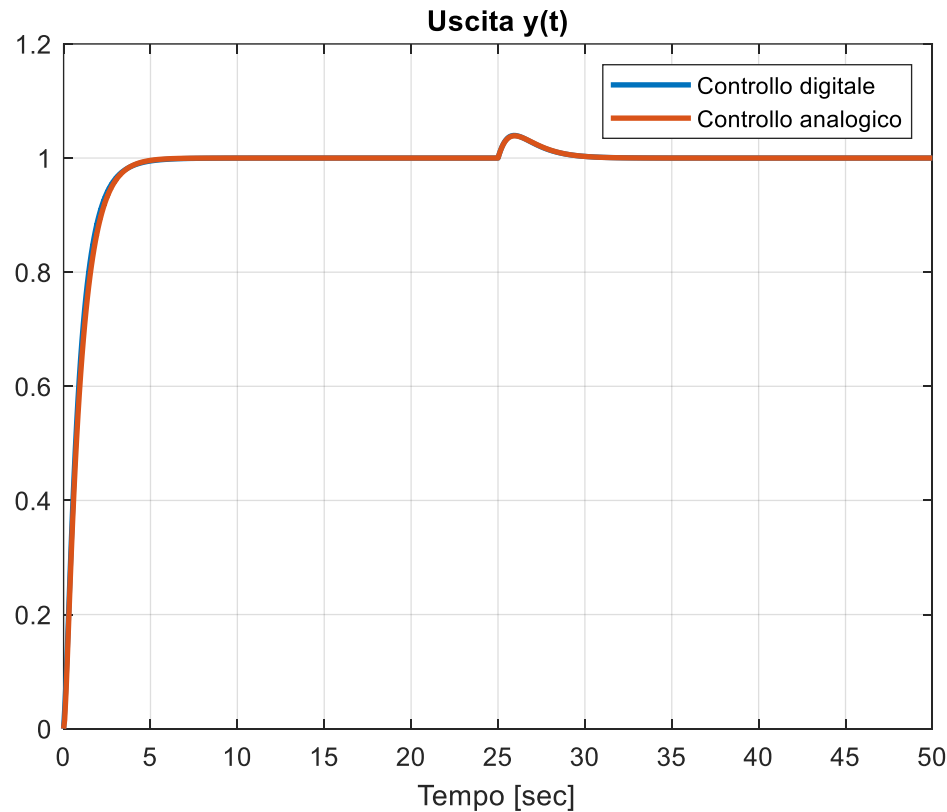
$$b_0 = \frac{1000T_c(1 + T_c)}{1 + 10T_c} \quad b_1 = -\frac{1000T_c}{1 + 10T_c}$$

Testiamo le prestazioni di questo sistema di controllo digitale mediante simulazione dinamica

## Sistema di controllo a tempo continuo



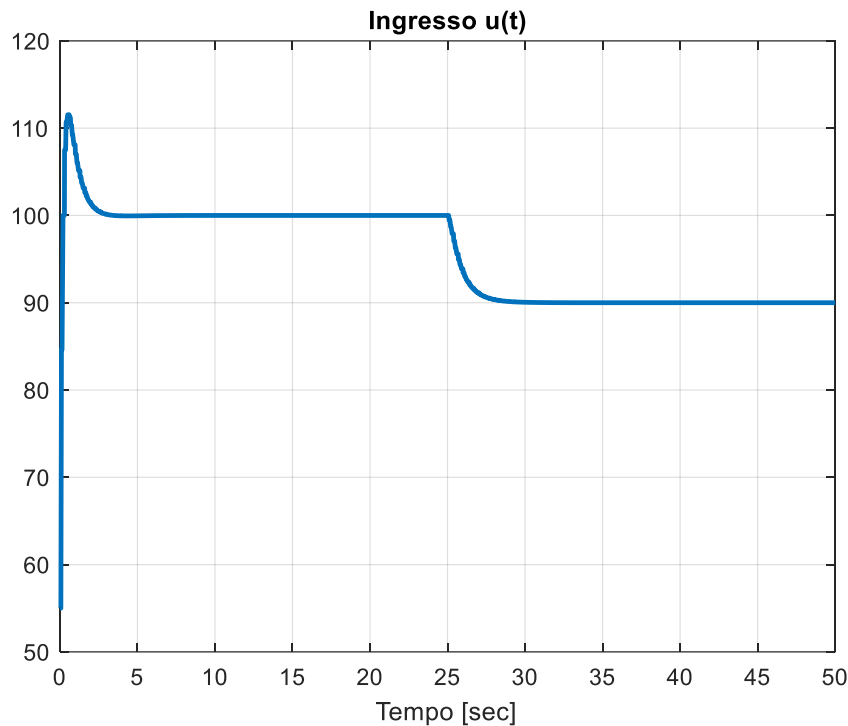
Sistema di controllo digitale con  $T_c = 0.1$  s



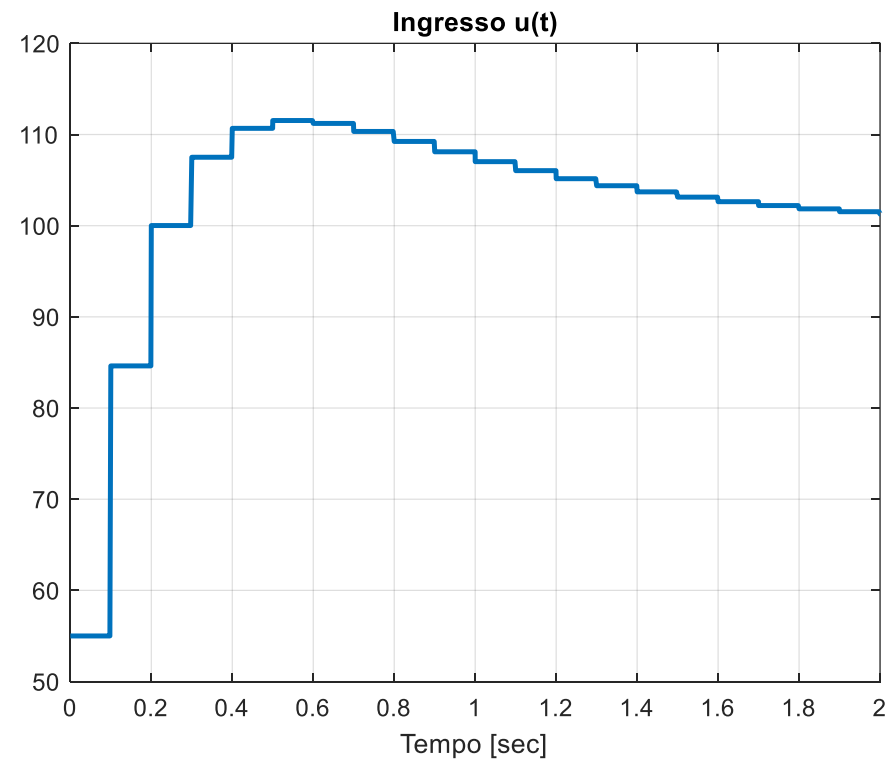
L'evoluzione temporale dell'uscita è indistinguibile da quella ottenuta impiegando il regolatore analogico

Sistema di controllo digitale con  $T_c = 0.1 s$

Ingresso



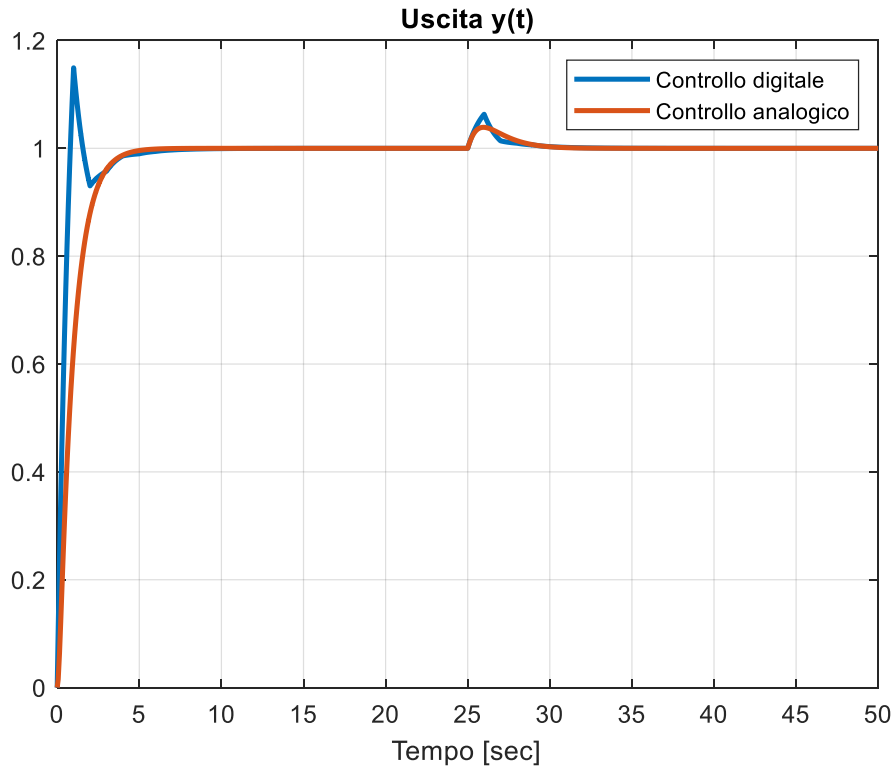
Ingresso (zoom)



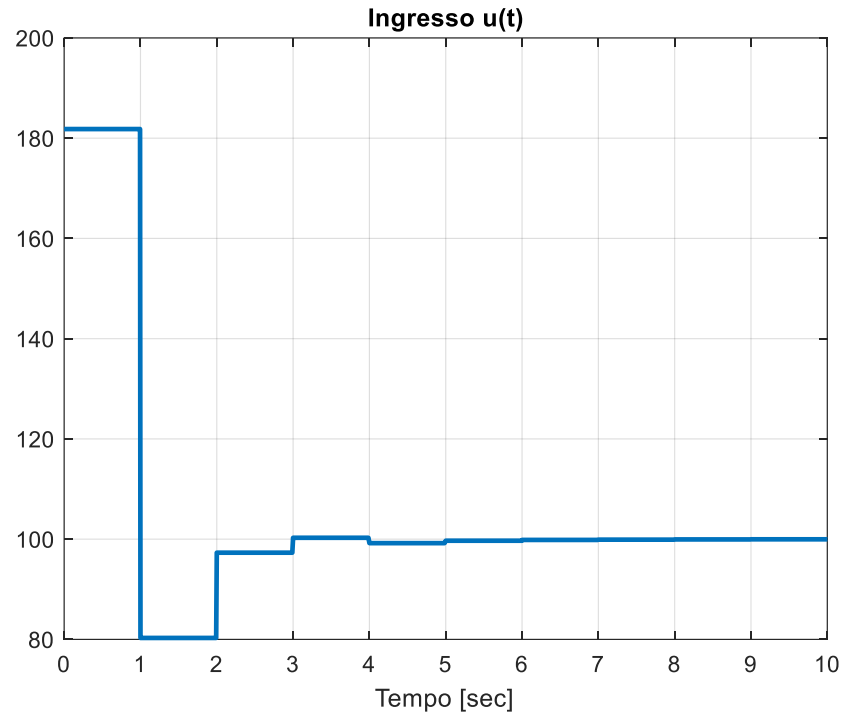
Lo zoom mostra come il segnale applicato in ingresso al processo sia costante a tratti, e venga aggiornato ogni decimo di secondo.

## Sistema di controllo digitale con $T_c = 1 s$

### Uscita



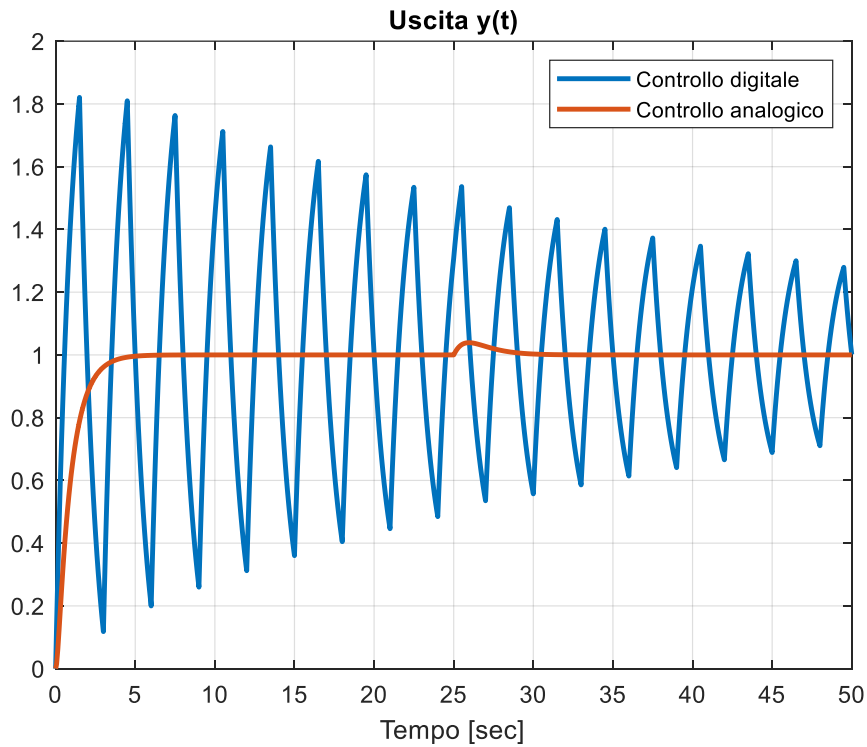
### Ingresso (zoom)



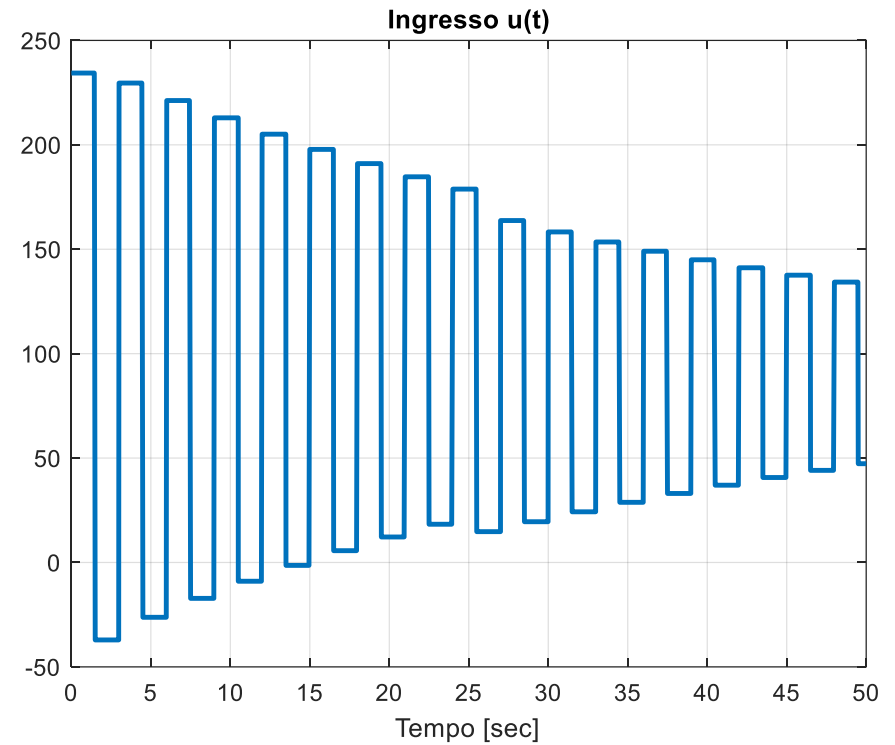
Iniziano a evidenziarsi dei deterioramenti prestazionali (comparsa di sovraelongazione) dovuti all'impiego del regolatore digitale

# Sistema di controllo digitale con $T_c = 1.5 s$

## Uscita

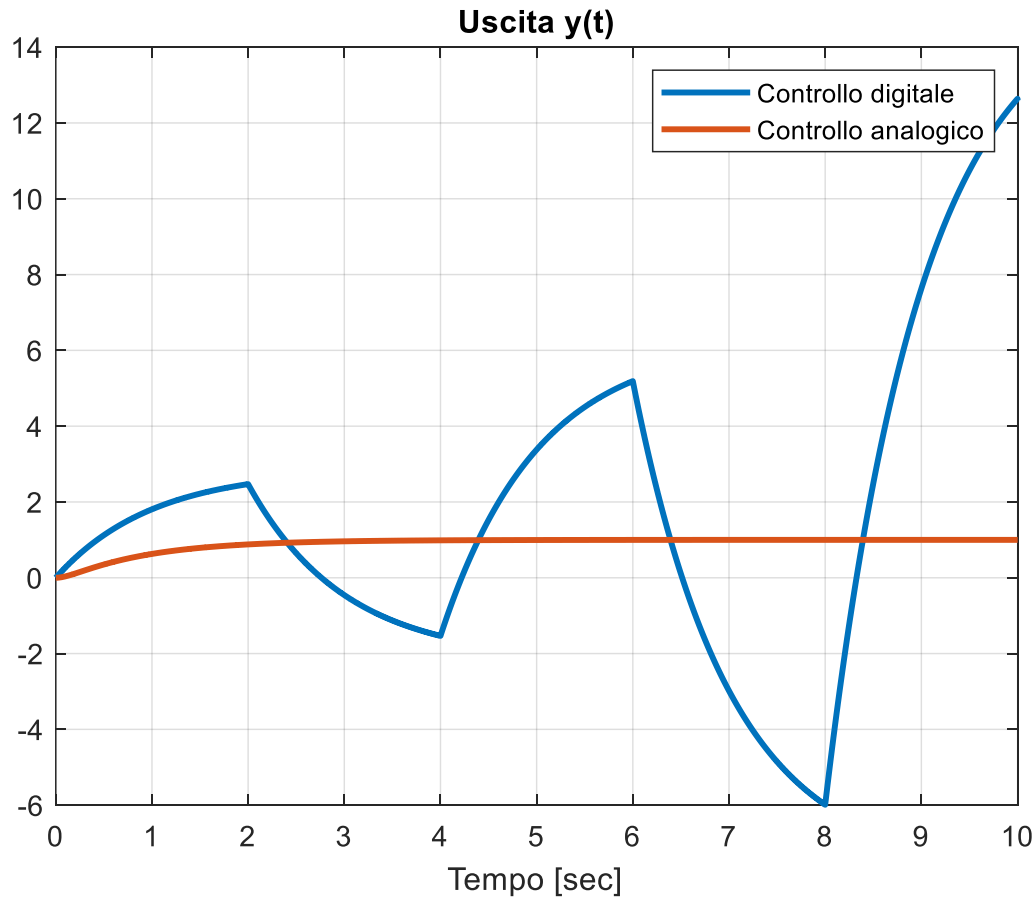


## Ingresso



Il deterioramento prestazionale è nettamente più marcato

Sistema di controllo digitale con  $T_c = 2 s$



Il sistema di controllo diventa instabile se  $T_c = 2 s$

In casi più generali, nei sistemi di controllo lineari l'algoritmo di controllo digitale consiste in una **equazione ricorsiva alle differenze** del tipo

$$u_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_m e_{k-m} - a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \dots - a_n u_{k-n}$$

Il segnale in uscita dal controllore all'istante  $t_k = kT_c$  è espresso mediante una combinazione lineare fra il valore corrente del segnale di errore ed un certo numero di campioni passati del segnale di errore e del segnale in uscita dal controllore (n.b alcuni dei coefficienti possono essere nulli)

## Implementazione digitale di un controllore qualunque

### Metodo di «Tustin»

Partendo dalla FdT  $R(s)$  di ordine  $n$  del controllore, si opera la seguente **sostituzione**

$$s = \frac{2z - 1}{T_c z + 1}$$

ottenendo, a partire dal rapporto di polinomi in  $s$ , un rapporto di polinomi in  $z$  nella forma:

$$R_{TU}(z) = R(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{T_c z+1}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

L'espressione ricorsiva che implementa digitalmente il controllore  $R(s)$  si ricava sulla base dei coefficienti a numeratore e denominatore di  $R_{TU}(z)$  nella forma seguente:

$$u_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \dots + b_n e_{k-n} - a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \dots - a_n u_{k-n}$$

## Esempio

$$R(s) = 1000 \frac{s + 1}{s(s + 10)} \quad T_c = 1s \quad \text{Sostituzione} \quad s := \frac{2z - 1}{T_c z + 1} = 2 \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$R_{TU}(z) = R(s) \Big|_{s=2 \frac{z-1}{z+1}} = 1000 \frac{2 \frac{z-1}{z+1} + 1}{2 \frac{z-1}{z+1} (2 \frac{z-1}{z+1} + 10)} = \frac{125z^2 + 83.34z - 41.66}{z^2 - 0.333z - 0.6667}$$

## Implementazione digitale del controllore

$$u_k = 125e_k + 83.34e_{k-1} - 41.66e_{k-2} + 0.333u_{k-1} + 0.6667u_{k-2}$$

## Prova finale AA 2023-24

### Es. 5 (5 punti)

Descrivere cosa si intende per “implementazione digitale di un controllore”, e determinare una possibile implementazione digitale del controllore descritto dal legame ingresso-uscita  $\dot{u}(t) + 10u(t) = 0.1 \dot{e}(t) + 0.2e(t)$  con periodo di campionamento di  $T_c = 0.1s$

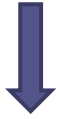
Possibili implementazioni digitali del controllore possono essere dedotte secondo diversi metodi. Nel seguito seguito applichiamo:

**Metodo delle differenze finite**

**Metodo di «Tustin»**

## Metodo delle differenze finite

$$\dot{u}(t) + 10u(t) = 0.1 \dot{e}(t) + 0.2 e(t)$$



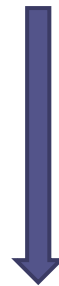
$$t = kT_c$$

$$\dot{u}(kT_c) + 10u(kT_c) = 0.1 \dot{e}(kT_c) + 0.2 e(kT_c)$$



$$\dot{u}(kT_c) = \dot{u}_k \quad \dot{e}(kT_c) = \dot{e}_k \quad u(kT_c) = u_k \quad e(kT_c) = e_k$$

$$\dot{u}_k + 10u_k = 0.1\dot{e}_k + 0.2e_k$$



$$\dot{u}_k \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} = \frac{u_k - u_{k-1}}{0.1} = 10(u_k - u_{k-1})$$

$$\dot{e}_k \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{T_c} = \frac{e_k - e_{k-1}}{0.1} = 10(e_k - e_{k-1})$$

$$T_c = 0.1 \text{ s}$$

$$10(u_k - u_{k-1}) + 10u_k = 0.1 \cdot 10(e_k - e_{k-1}) + 0.2e_k$$



$$20u_k - 10u_{k-1} = 1.2e_k - e_{k-1}$$



$$u_k = \frac{1}{20} (10u_{k-1} + 1.2e_k - e_{k-1}) = 0.5u_{k-1} + 0.06e_k - 0.05e_{k-1}$$

## Metodo di «Tustin»

LaFdT  $R(s)$  del controllore è la seguente:

$$\dot{u}(t) + 10u(t) = 0.1 \dot{e}(t) + 0.2 e(t) \quad \longrightarrow \quad R(s) = \frac{0.1s + 0.2}{s + 10}$$

Operiamo nella  $R(s)$  la sostituzione  $s := F(z)$  associata al metodo di Tustin

$$s = \frac{2z - 1}{T_c z + 1} = 20 \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad \left[ F(z) = \frac{2z - 1}{T_c z + 1} \right] \quad T_c = 0.1 \text{ s}$$

$$R_{TU}(z) = R(s) \Big|_{s=20 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.1 \cdot \left[ 20 \cdot \frac{z-1}{z+1} \right] + 0.2}{20 \cdot \frac{z-1}{z+1} + 10} = \frac{2.2z - 1.8}{30z - 10} \approx \frac{0.073z - 0.06}{z - 0.333}$$

$$R_{TU}(z) = \frac{0.073z - 0.06}{z - 0.333} \quad \longrightarrow \quad u_k = 0.333u_{k-1} + 0.073e_k - 0.06e_{k-1}$$

Discretizzazione con metodo di **Tustin** di un regolatore P.I. con  $k_p$  e  $T_i$  generici

$$R(s) = \frac{k_p(T_i s + 1)}{T_i s}$$

$$R_{TU}(z) = R(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{T_c z+1}} = \frac{k_p(T_i \frac{2z-1}{T_c z+1} + 1)}{T_i \frac{2z-1}{T_c z+1}} = \frac{k_p(2T_i(z-1) + T_c(z+1))}{2T_i(z-1)} = \frac{k_p(z-1) + k_p \frac{T_c}{2T_i}(z+1)}{(z-1)}$$

$$= \frac{k_p \left(1 + \frac{T_c}{2T_i}\right) z + k_p \left(\frac{T_c}{2T_i} - 1\right)}{(z-1)}$$

$$u(k) - u(k-1) = k_p \left(1 + \frac{T_c}{2T_i}\right) e(k) + k_p \left(\frac{T_c}{2T_i} - 1\right) e(k-1)$$

$$b_0 = k_p \left(1 + \frac{T_c}{2T_i}\right) \quad b_1 = k_p \left(\frac{T_c}{2T_i} - 1\right)$$

$$u(k) = u(k-1) + b_0 e(k) + b_1 e(k-1)$$