Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

***Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura* - a.a. 2025/26**

UNICA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Statica e Scienza delle Costruzioni

PRIMA PARTE: STATICA

> ***Lezione 18***
Geometria delle masse

Emanuele Reccia
emanuele.reccia@unica.it
Antonio cazzani
antonio.cazzani@unica.it

GEOMETRIA DELLE MASSE.

SI PARTE DA SISTEMI DI VETTORI APPLICATI, PARALLELI: QUESTI SONO INTERPRETABILI COME FORZE ED È QUINDI POSSIBILE DETERMINARE UN SISTEMA EQUIVALENTE, PIÙ SEMPLICE, CARATTERIZZATO DALLA LORO RISULTANTE (ASSUMENDO CHE QUESTA NON SIA NULLA) APPLICATA SECONDO UNA BEN PRECISA RETTA D'AZIONE.
LA DETERMINAZIONE DI QUESTA RETTA D'AZIONE DELLA RISULTANTE PASSA ATTRAVERSO LA DEFINIZIONE E IL CALCOLO DEL MOMENTO RISULTANTE, CHE, COME È NOTO, DEVE RISULTARE EGUALE PER IL SISTEMA ORIGINALE DI FORZE APPLICATE E PER IL SISTEMA EQUIVALENTE, COSTITUITO (NELLE IPOTESI DELINEATE) DA UN'UNICA FORZA

I VETTORI APPLICATI SONO DEFINITI DALL'INSIEME $(\vec{v}_i, P_i)$ DEI VETTORI STESSI $(\vec{v}_i)$ E DEI RISPETTIVI PUNTI DI APPLICAZIONE, P_i.

AMMETTENDO CHE QUESTI PUNTI P_i SIANO TUTTI COMPLANARI, E CHE I VETTORI $\vec{v}_i$ SIANO PARALLELI (MA NON NECESSARIAMENTE EQUIVERSI) SI HA CHE POSSONO ESSERE ESPRESSI NELLA FORMA:

$$\vec{v}_i = m_i \, \vec{\iota} \qquad [1]$$

DOVE $\vec{\iota}$ È UN VERSORE CHE INDIVIDUA LA DIREZIONE COMUNE A TUTTI I VETTORI E m_i UNA GRANDEZZA SCALARE, NON RISTRETTA IN SEGNO, CHE DEFINIREMO MASSA E CHE PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME LA COMPONENTE DEL VETTORE $\vec{v}_i$ SECONDO $\vec{\iota}$.

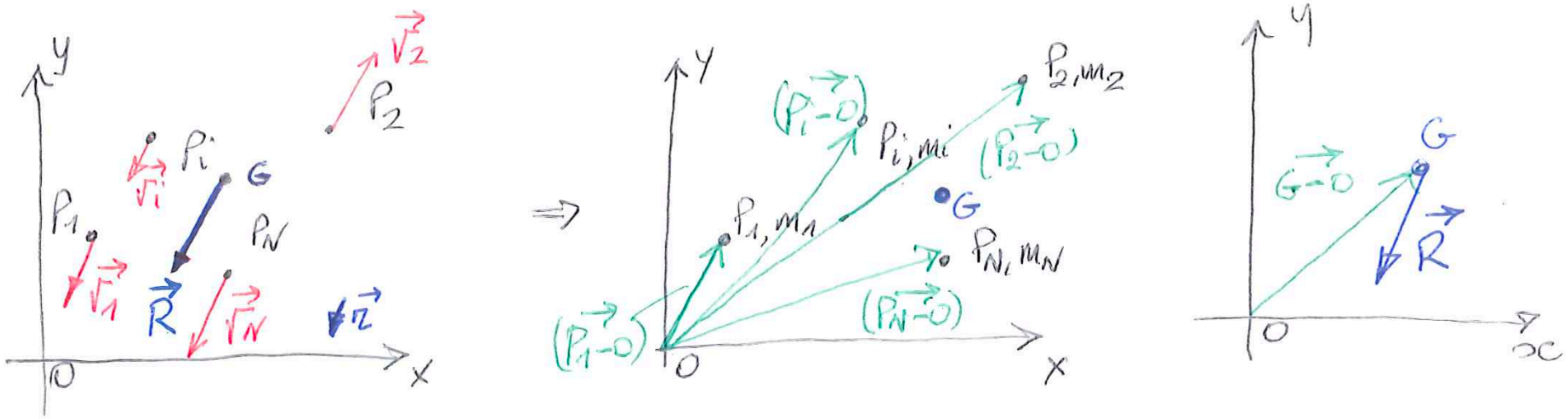
LA MASSA m_i SARÀ QUINDI POSITIVA SE $\vec{v}_i$ È CONCORDE CON $\vec{\iota}$, E NEGATIVA IN CASO OPPOSTO.

SI OSSERVI CHE IN BASE ALLA [1] TUTTE LE MASSE m_i RISULTANO GRANDEZZE FRA LORO OMOGENEE.

DAL PUNTO DI VISTA DELLA DESCRIZIONE DEL SISTEMA (DISCRETO) SI HA CHE SOSTITUENDO AI VETTORI $\vec{v}_i$ LE CORRISPONDENTI MASSE m_i "CONCENTRATE" NEI RISPETTIVI PUNTI DI APPLICAZIONE RISULTA PIÙ AGEVOLE CALCOLARE IL "CENTRO" DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI, CHE VIENE A COINCIDERE CON IL "BARICENTRO" DEL SISTEMA DI MASSE, INDICATO CON G.

A QUESTO SCOPO, SI INTRODUCE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO CHE, PER SEMPLICITÀ SI ASSUME ANCHE ORTOGONALE (BENCHÉ QUESTA CARATTERISTICA NON SIA ESSENZIALE), CON ASSI X E Y:

2



SI HA INFATTI CHE LA POSIZIONE DEL PUNTO G (BARICENTRO = CENTRO DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI) NON DIPENDE DAL VERSORE $\vec{r}$ MA È UNA PROPRIETÀ DEL SISTEMA DI PUNTI P_i E DI MASSE m_i

LA SOMMA (RISULTANTE) DEI VETTORI $\vec{v}_i$, DENOTATA CON $\vec{R}$ E' DATA PER DEFINIZIONE DA:

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \qquad [2]$$

E PER LA [1] RISULTA

$$\vec{R}^{(1)} = \vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{r}) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \vec{r} = M \vec{r}, \qquad [3]$$

DOVE $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ E' LA MASSA TOTALE DEL SISTEMA; SI ASSUME TACITAMENTE CHE SIA $M \neq 0$, IL CHE EQUIVALE AD ASSUMERE $\vec{R} \neq \vec{0}$.

IL MOMENTO RISULTANTE DEL SISTEMA DI VETTORI $\vec{v}_i$ RISPETTO ALL'ORIGINE O DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO E' DATO, PER DEFINIZIONE DA QUESTA ESPRESSIONE

$$\vec{M}^{(1)}_{(O)} = \sum_{i=1}^{N} \left[(\overrightarrow{P_i - O}) \wedge \vec{v}_i \right] \qquad [4]$$

DOVE $(\overrightarrow{P_i - O})$ E' IL VETTORE POSIZIONE DI P_i RISPETTO ALL'ORIGINE O.

SE SI SOSTITUISCE LA [1] NELLA [4] SI TROVA:

$$\vec{M}^{(1)}_{(O)} = \sum_{i=1}^{N} \left[(\overrightarrow{P_i - O}) \wedge m_i \vec{r} \right] = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i (\overrightarrow{P_i - O}) \wedge \vec{r} \right] = \left[\sum_{i=1}^{N} m_i (\overrightarrow{P_i - O}) \right] \wedge \vec{r} \qquad [5]$$

IL SISTEMA EQUIVALENTE A QUELLO DATO È COSTITUITO DA UN UNICO VETTORE, $\vec{R}^{②} = \vec{R}^{①}$ APPLICATO NEL CENTRO G DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI, E TALE CHE IL SUO MOMENTO RISULTANTE, SEMPRE VALUTATO RISPETTO A O E DEFINITO DA

$$\vec{M}^{②}_{(O)} = (\overrightarrow{G-O}) \wedge \vec{R}^{②} \quad [6]$$

SODDISFI LA CONDIZIONE 3

$$M^{②}_{(O)} = M^{①}_{(O)} \quad [7]$$

NE SEGUE, TENENDO CONTO DELLE [1], [3], [5], [6]

$$(\overrightarrow{G-O}) \wedge \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}\right) = (\overrightarrow{G-O}) \wedge \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \vec{r} = (\overrightarrow{G-O}) \wedge M \vec{r} = M(\overrightarrow{G-O}) \wedge \vec{r} \quad [6']$$

E QUINDI:

$$M(\overrightarrow{G-O}) \wedge \vec{r} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\overrightarrow{P_i-O}) \wedge \vec{r} \quad [8]$$

POICHÉ IL VERSORE $\vec{r}$ PER IL QUALE VENGONO MOLTIPLICATI VETTORIALMENTE I VETTORI $M(\overrightarrow{G-O})$ DA UNA PARTE E $\sum_{i=1}^{N} m_i (\overrightarrow{P_i-O})$ DALL'ALTRA È IL MEDESIMO, SI RICAVA L'EGUAGLIANZA

$$M(\overrightarrow{G-O}) = \sum_{i=1}^{N} m_i (\overrightarrow{P_i-O}) \quad [9]$$

E DUNQUE LA POSIZIONE DI G È COMPLETAMENTE DEFINITA DAL VETTORE

$$\overrightarrow{G-O} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{(P_i-O)}}{M} \qquad [9'].$$

PER DETERMINARE $(\overrightarrow{G-O})$ CONVIENE INTRODURRE LE COORDINATE DEI PUNTI CONSIDERATI RISPETTO ALL'ORIGINE $O=(0,0)$:

$$P_1=(x_1,y_1);\quad P_2=(x_2,y_2);\ \ldots;\ P_i=(x_i,y_i);\ \ldots;\ P_N=(x_N,y_N);\quad G=(x_G,y_G)$$

ED ESPRIMERE PER COMPONENTI E MEDIANTE I VERSORI $\vec{i}$ E $\vec{j}$ DEGLI ASSI I VETTORI POSIZIONE:

$$(\overrightarrow{P_i-O}) = x_i\vec{i} + y_i\vec{j}$$
$$(\overrightarrow{G-O}) = x_G\vec{i} + y_G\vec{j}$$

LA [9'] DIVIENE COSÌ:

$$x_G\vec{i} + y_G\vec{j} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i\vec{i}+y_i\vec{j})m_i}{M} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right)\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i y_i\right)\vec{j}}{M} \qquad [9'']$$

DA QUI, SEPARANDO LE COMPONENTI SECONDO X (CIÒ CHE È MOLTIPLICATO PER IL VERSORE $\vec{i}$) E SECONDO Y (CIÒ CHE È MOLTIPLICATO PER IL VERSORE $\vec{j}$) SI PUÒ PASSARE DALL'EQUAZIONE VETTORIALE [9''] ALLE 2 EQUAZIONI SCALARI:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \qquad [10]$$

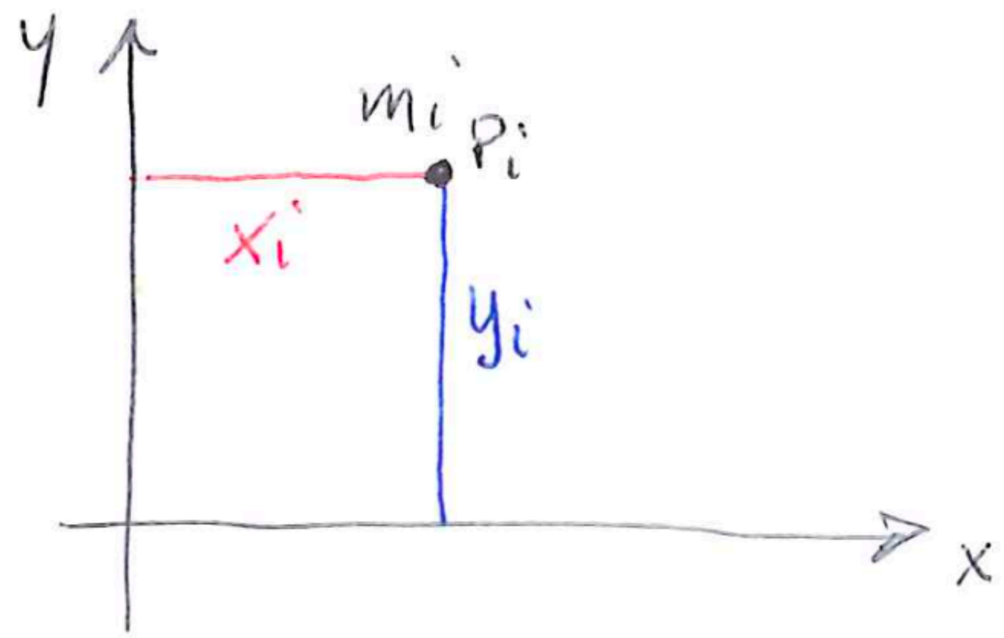
IL BARICENTRO E' QUINDI UNA PROPRIETA' LEGATA ALLA DISTRIBUZIONE DELLE MASSE: IN QUESTO SENSO È APPROPRIATO PARLARE DI "GEOMETRIA DELLE MASSE".

SE SI ESAMINANO PIÙ ACCURATAMENTE LE QUANTITA' CHE COMPAIONO NELLA [10] SI OSSERVA CHE, QUESTE POSSONO ESSERE SCRITTE NELLA FORMA:

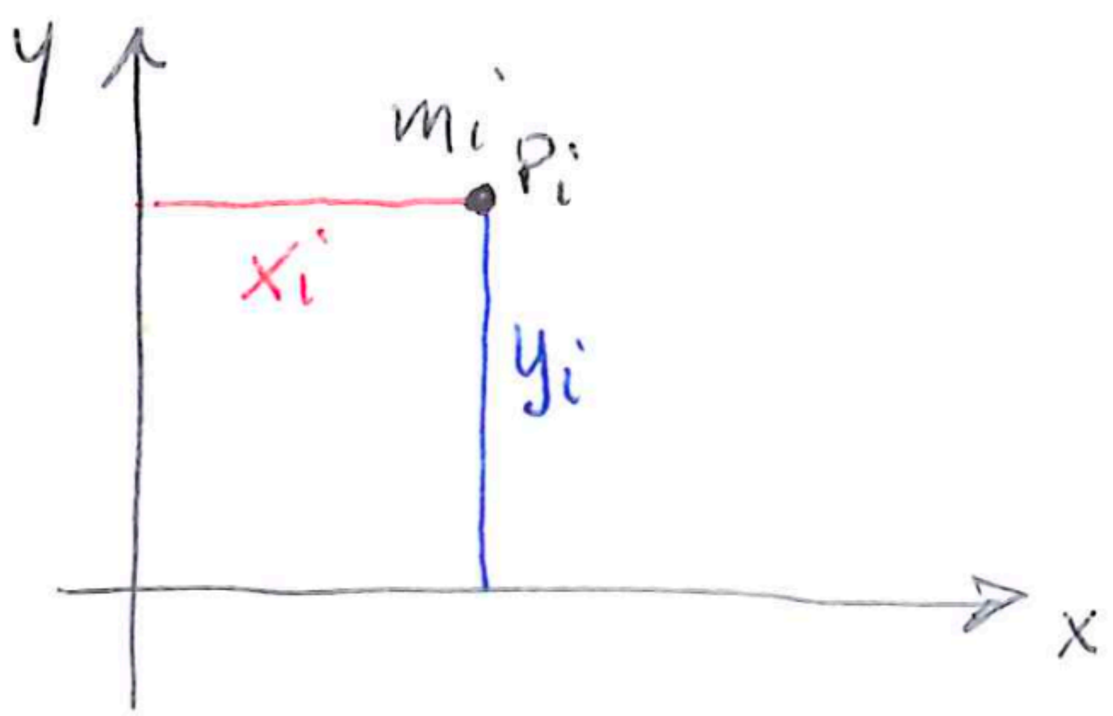
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \; ; \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad [10'] .$$

E A QUESTI "INGREDIENTI" SI PUÒ ASSOCIARE UN PRECISO SIGNIFICATO FISICO.

A QUESTO SCOPO SI CONSIDERA IL SISTEMA DI MASSE m_i, CONCENTRATE NEI PUNTI P_i:



SI OSSERVA CHE LE COORDINATE DEL PUNTO P_i POSSONO ESSERE INTERPRETATE COME LE DISTANZE DEI PUNTI P_i DALL'ASSE X (LE COORDINATE y_i) E LE DISTANZE DEI PUNTI P_i DALL'ASSE Y (LE COORDINATE x_i).



- MOMENTO STATICO (O DEL PRIMO ORDINE) DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE X LA QUANTITÀ

ATTENZIONE: $\underline{S_x}$ CONTIENE LE DISTANZE $\underline{y_i}$!

$$S_x = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i \quad [11]$$

PARI ALLA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE SINGOLE MASSE PER LE DISTANZE (DOTATE DI SEGNO) DALL'ASSE X

- MOMENTO STATICO (O DEL PRIMO ORDINE) DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE Y LA QUANTITÀ

ATTENZIONE: $\underline{S_y}$ CONTIENE LE DISTANZE $\underline{x_i}$!

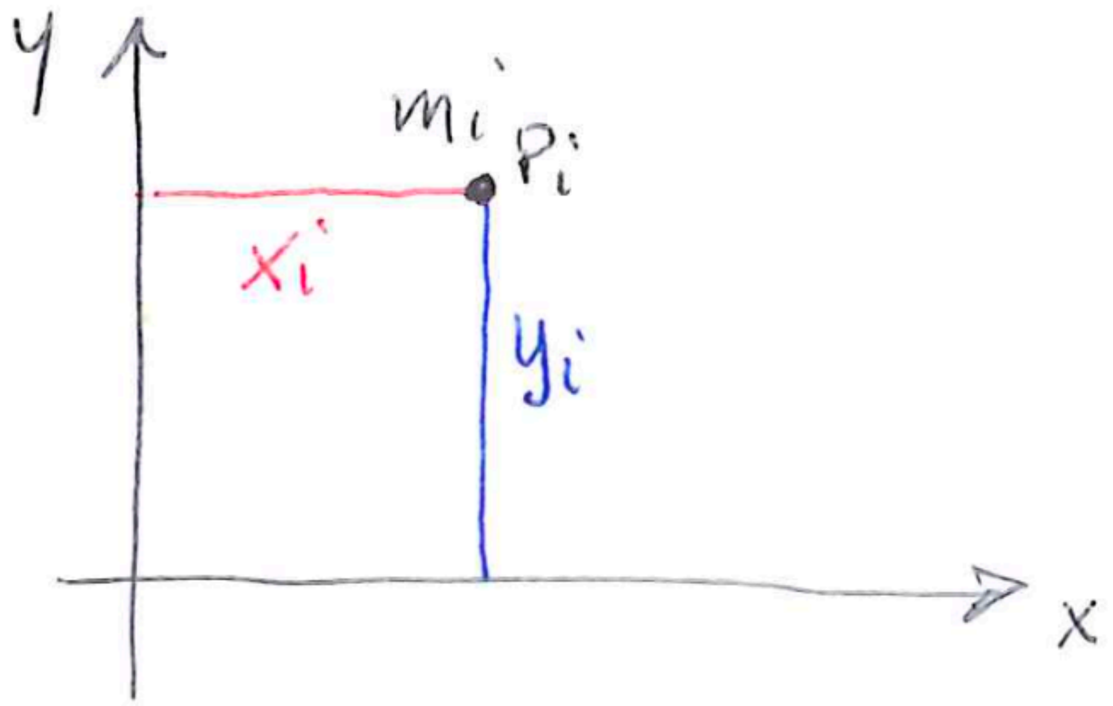
$$S_y = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i \quad [12]$$

PARI ALLA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE SINGOLE MASSE PER LE DISTANZE (DOTATE DI SEGNO) DALL'ASSE Y.

- MASSA TOTALE (O MOMENTO DI ORDINE ZERO) DEL SISTEMA DI MASSE LA QUANTITÀ

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad [13].$$

5



SE ORA SI RIPRENDONO LE [6'] E SI SOSTITUISCONO IN ESSE LE [11], [12], [13] SI OTTIENE:

$$x_G = \frac{S_y}{M} \quad [14']$$

ATTENZIONE! x_G SI CALCOLA USANDO S_y [E NON S_x!]

$$y_G = \frac{S_x}{M} \quad [14'']$$

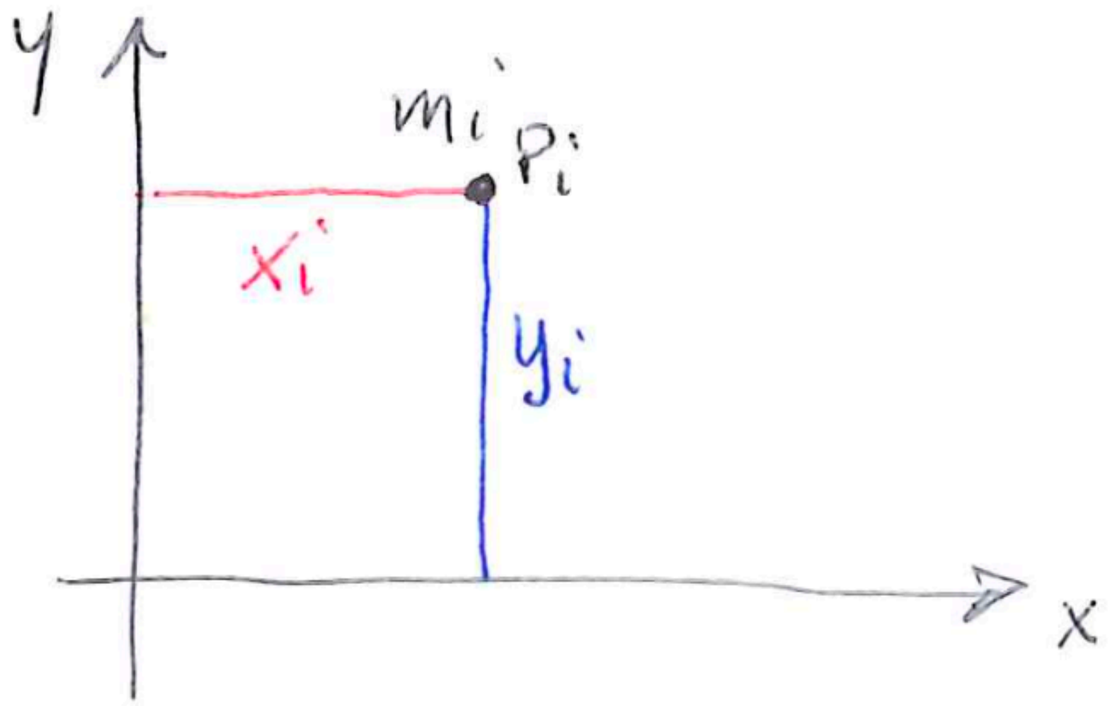
ATTENZIONE! y_G SI CALCOLA USANDO S_x [E NON S_y!]

LE [14'] E [14''] IMPLICANO CHE RISULTI:

$$S_x = M y_G \quad [15']$$

$$S_y = M x_G \quad [15'']$$

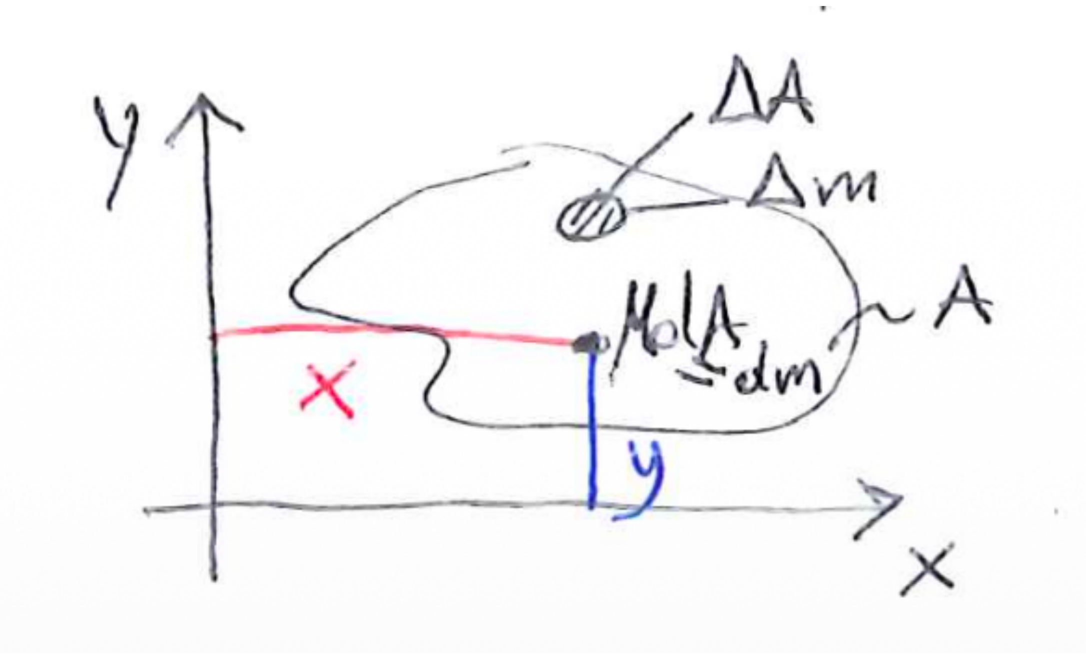
CHE ESPRIMONO IL TEOREMA DI VARIGNON: IL MOMENTO STATICO S_x (o S_y) DI UN SISTEMA DI MASSE PUÒ ESSERE CALCOLATO CONCENTRANDO LA MASSA TOTALE NEL BARICENTRO, G.



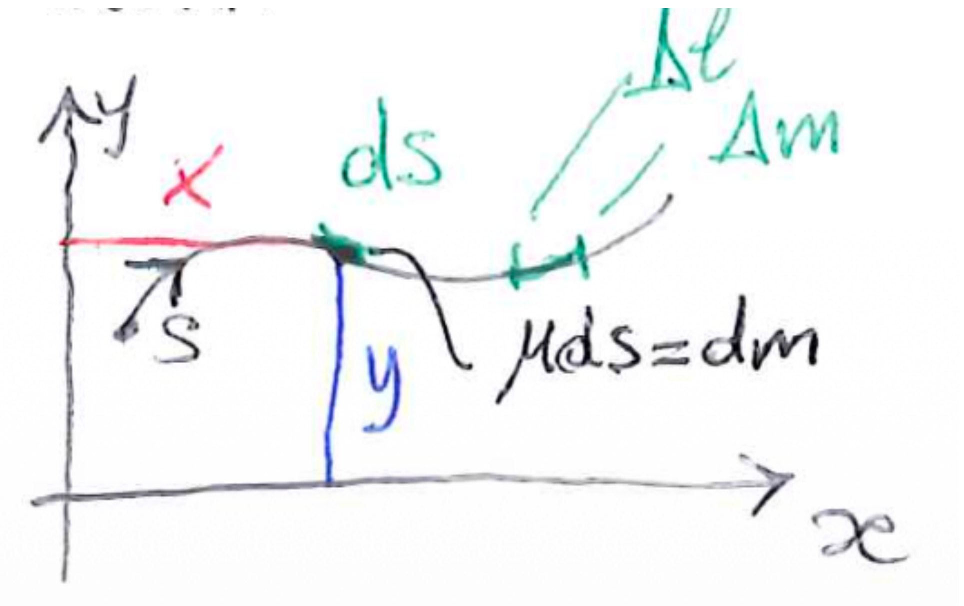
- SE $S_x = 0$, ALLORA L'ASSE x È BARICENTRICO, OVVERO PASSA PER IL BARICENTRO, IN QUANTO LA DISTANZA DI QUESTO DALL'ASSE x, $y_G = 0$
- SE $S_y = 0$, ALLORA L'ASSE y È BARICENTRICO, OVVERO PASSA PER IL BARICENTRO, IN QUANTO LA DISTANZA DI QUESTO DALL'ASSE y, $x_G = 0$.

SE QUINDI $S_x = 0$ E $S_y = 0$, ALLORA L'ORIGINE DEGLI ASSI COINCIDE CON IL BARICENTRO.

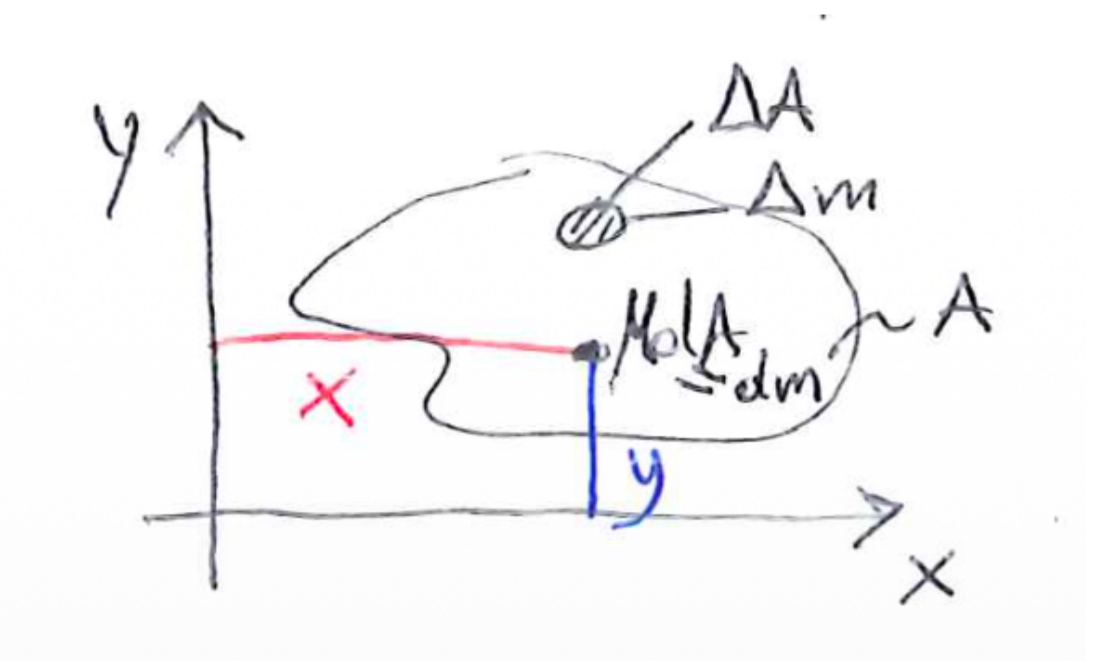
FIN QUI SI SONO MESSE IN CONTO MASSE PUNTIFORMI (CONCENTRATE); SE INVECE LA MASSA RISULTA DISTRIBUITA CON CONTINUITÀ SU UNA SUPERFICIE PIANA O SU UNA LINEA, SI PROCEDE COSÌ.



MASSA DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE A.



MASSA DISTRIBUITA SU UNA LINEA ℓ CON ASCISSA CURVILINEA s.

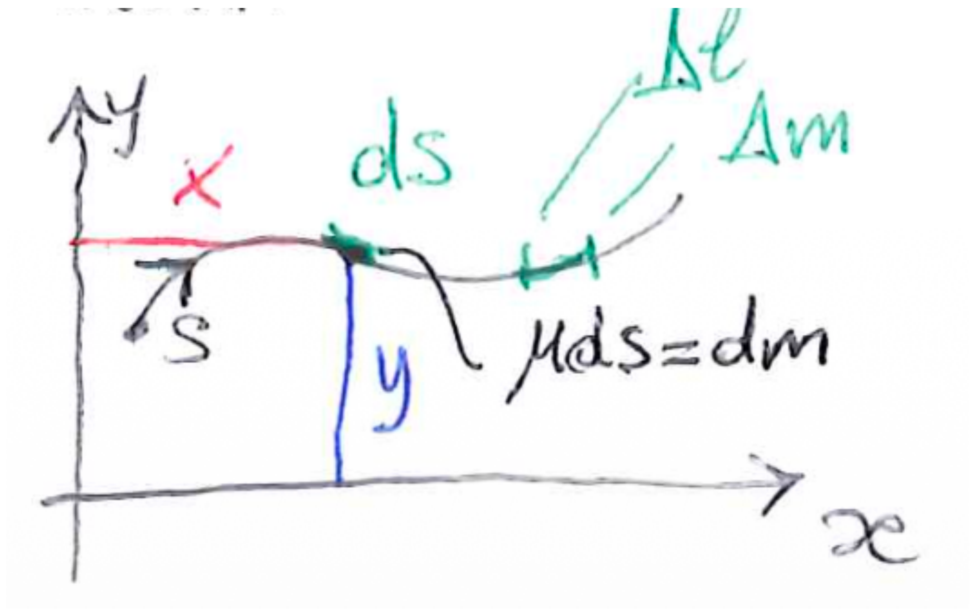


MASSA DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE A.

NEL PRIMO CASO, SE ΔA E' UN ELEMENTO DI SUPERFICIE NELL'INTERNO DI UN PUNTO $P=(x,y)$ E Δm RAPPRESENTA LA SUA MASSA, SI ASSUME CHE IL LIMITE

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \mu(x,y)$$

CIOÈ CHE IL LIMITE ESISTA E SIA FINITO E DEFINISCA UNA FUNZIONE DEL PUNTO, $\mu(x,y)$, LA DENSITÀ SUPERFICIALE DI MASSA (AVENTE DIMENSIONI $[M]/[L^2]$), CHE SI SUPPONE CONTINUA. NEL CASO $\mu(x,y) = \text{CONST}$ SI HA UNA DISTRIBUZIONE UNIFORME DI MASSA.



MASSA DISTRIBUITA SU UNA LINEA ℓ CON ASCISSA CURVILINEA S.

SI HA INFATTI:

$$M = \int_A \mu(x,y)\, dA \qquad [16]$$

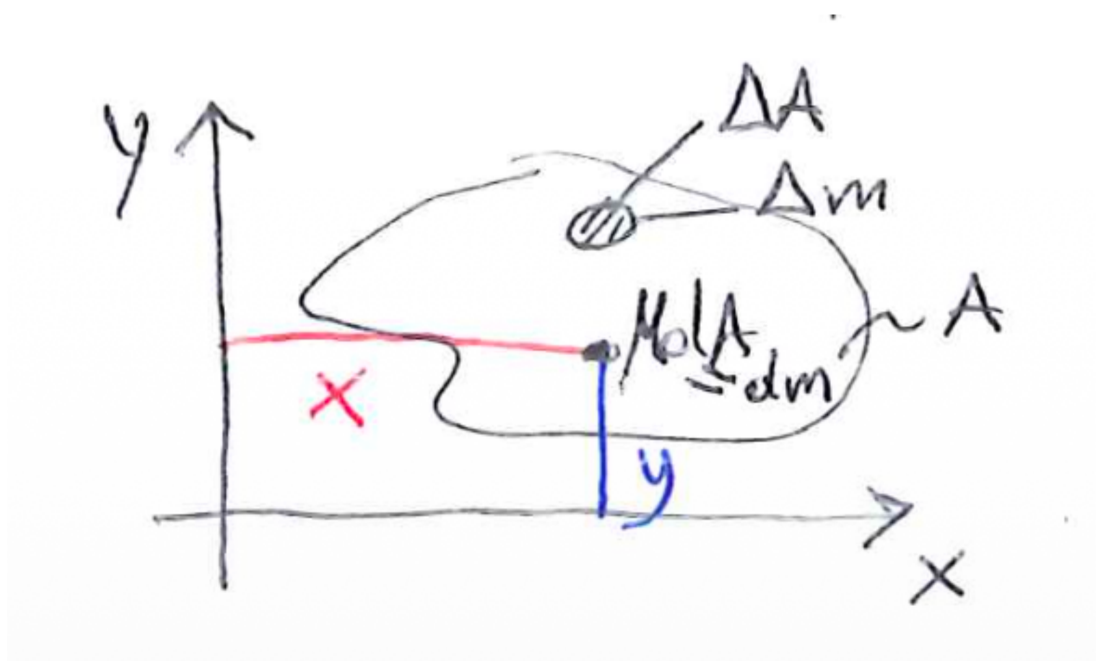
$$S_x = \int_A y\, \mu(x,y)\, dA \qquad [17]$$

$$S_y = \int_A x\, \mu(x,y)\, dA \qquad [18]$$

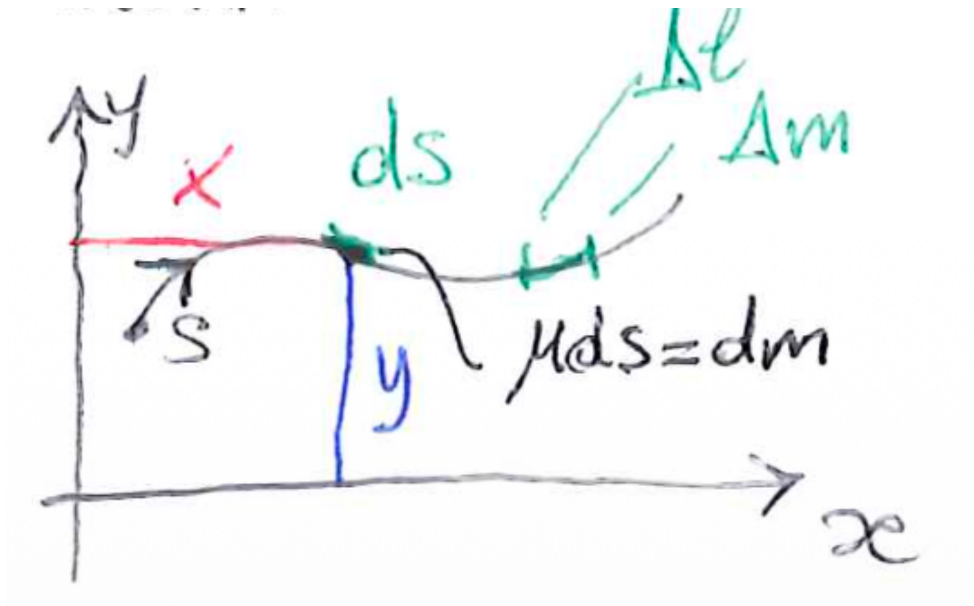
LA POSIZIONE DEL BARICENTRO E' ALLORA DATA DA:

$$x_G = \frac{\int_A x\, \mu(x,y)\, dA}{\int_A \mu(x,y)\, dA} = \frac{S_y}{M} \qquad [19]$$

$$y_G = \frac{\int_A y\, \mu(x,y)\, dA}{\int_A \mu(x,y)\, dA} = \frac{S_x}{M} \qquad [20]$$



MASSA DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE A.



MASSA DISTRIBUITA SU UNA LINEA ℓ CON ASCISSA CURVILINEA S.

NOTA 1. SE NELLE [16] – [18] È $\mu(x,y) = \mu_0$ = CONST SI HA:

$$M = \mu_0 \int_A dA = \mu_0 A \qquad [16\ bis]$$

$$S_x = \mu_0 \int_A y\, dA \qquad [17\ bis]$$

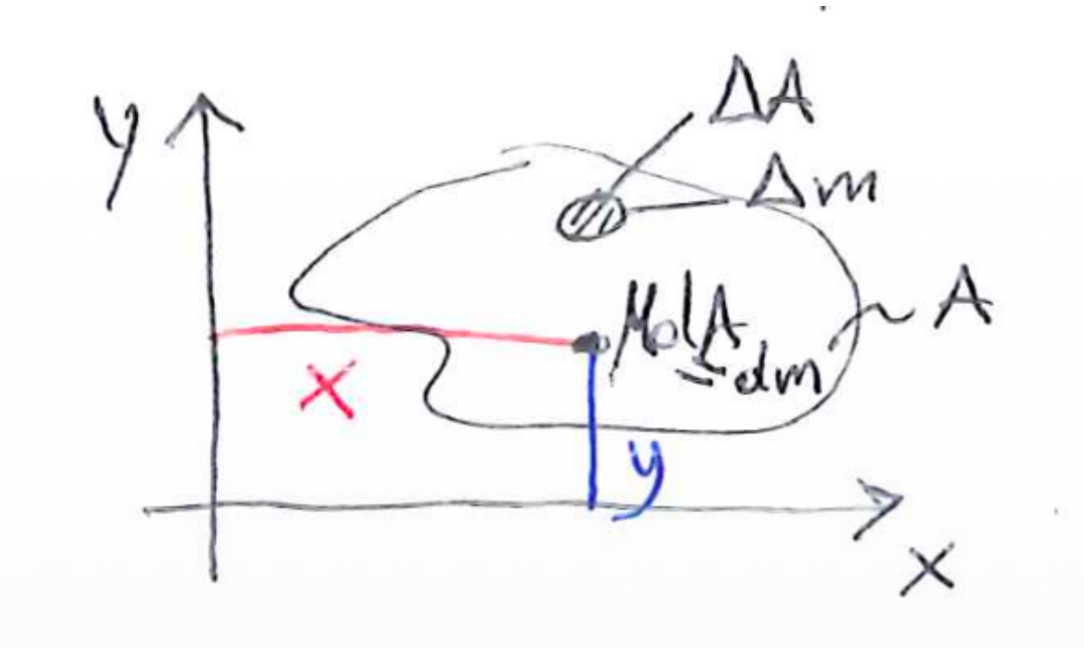
$$S_y = \mu_0 \int_A x\, dA \qquad [18\ bis]$$

NE SEGUE, IN TERMINI DI POSIZIONE DEL BARICENTRO:

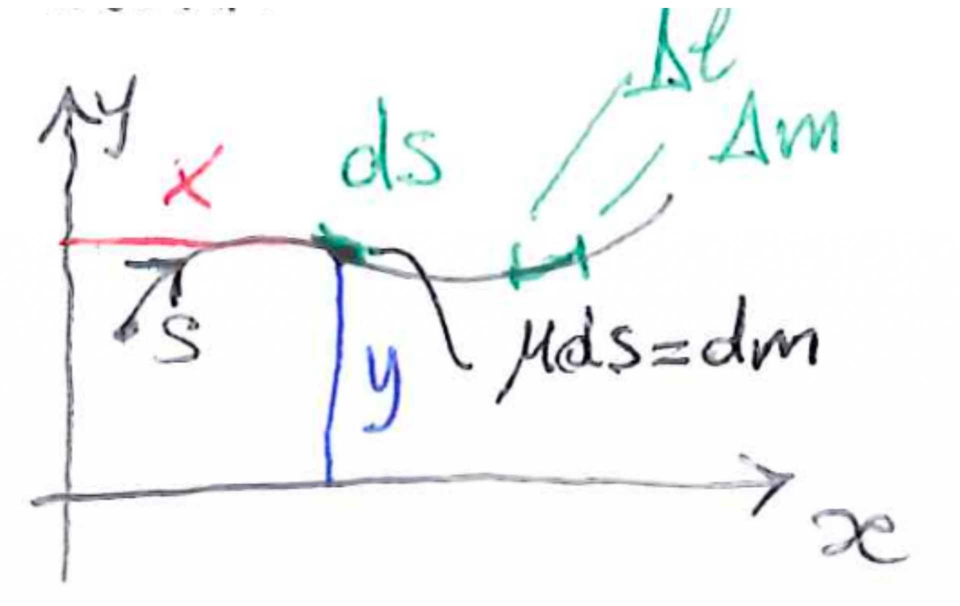
$$x_G = \frac{S_y}{M} = \frac{\cancel{\mu_0} \int_A x\, dA}{\cancel{\mu_0} A} = \underbrace{\frac{\int_A x\, dA}{A}}_{[19\ bis]} ; \quad y_G = \frac{S_x}{M} = \frac{\cancel{\mu_0} \int_A y\, dA}{\cancel{\mu_0} A} = \frac{\int_A y\, dA}{A} \qquad [20\ bis]$$

E IN QUESTO CASO LA POSIZIONE DEL BARICENTRO DIPENDE SOLO DALLA GEOMETRIA DELLA SUPERFICIE: SI HA QUINDI UNA GEOMETRIA DELLE AREE.

II



MASSA DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE A.



MASSA DISTRIBUITA SU UNA LINEA ℓ CON ASCISSA CURVILINEA S.

NEL SECONDO CASO SI PUÒ DEFINIRE, IPOTIZZANDO CHE IL LIMITE

$$\lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \ell} = \mu(s)$$

ESISTA E SIA FINITO, LA DENSITA' DI MASSA LINEARE (DIMENSIONALMENTE, [M]/[L]) FUNZIONE DELL'ASCISSA CURVILINEA S.

NE SEGUE, OSSERVANDO CHE LA MASSA ELEMENTARE dm CHE CORRISPONDE A UN ELEMENTINO INFINITESIMO DI LINEA, ds VALE $dm = \mu(s)ds$ CHE LE DEFINIZIONI DI M, S_x, S_y DIVENGONO:

$$M = \int_\ell \mu(s)\, ds \qquad [21]$$

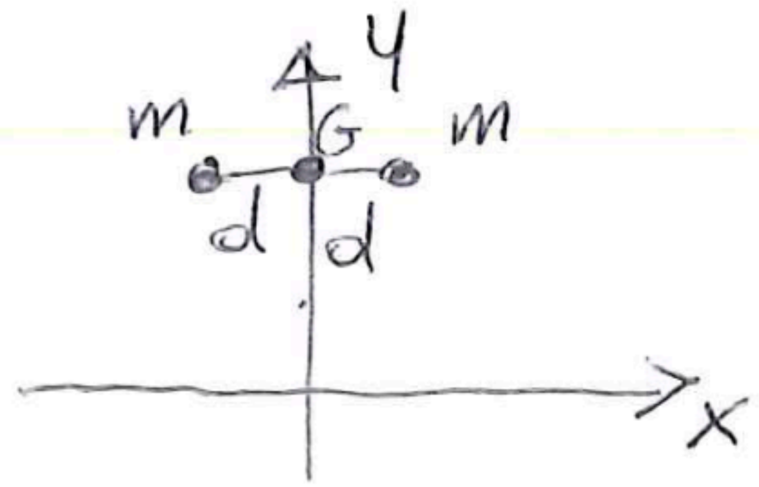
$$S_x = \int_\ell y(s)\,\mu(s)\, ds \qquad [22]$$

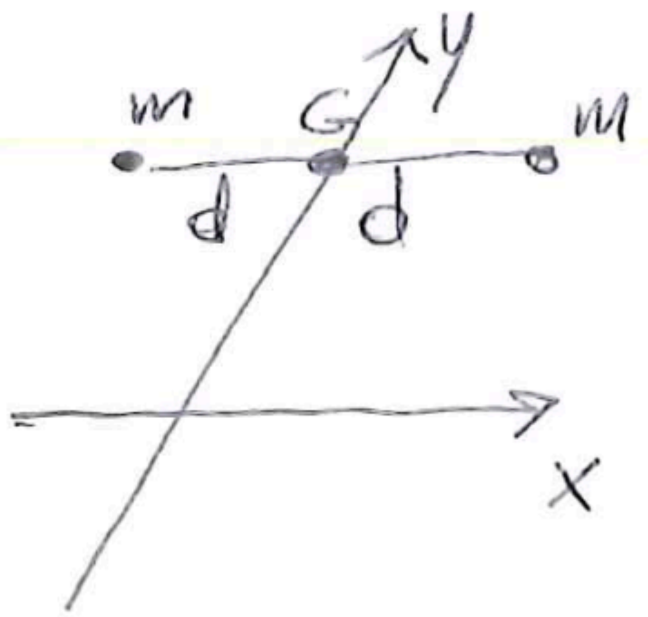
$$S_y = \int_\ell x(s)\,\mu(s)\, ds \qquad [23]$$

E LA POSIZIONE DEL BARICENTRO È DATA DA:

$$x_G = \frac{\int_\ell x(s)\,\mu(s)\,ds}{\int_\ell \mu(s)\,ds} = \frac{S_y}{M} \quad [24]; \qquad y_G = \frac{\int_\ell y(s)\,\mu(s)\,ds}{\int_\ell \mu(s)\,ds} = \frac{S_x}{M} \quad [25]$$

1) QUANDO ESISTE UN ASSE DI SIMMETRIA (ORTOGONALE OD OBLIQUA) PER LA DISTRIBUZIONE DI MASSE, IL BARICENTRO SI TROVA SU TALE ASSE.



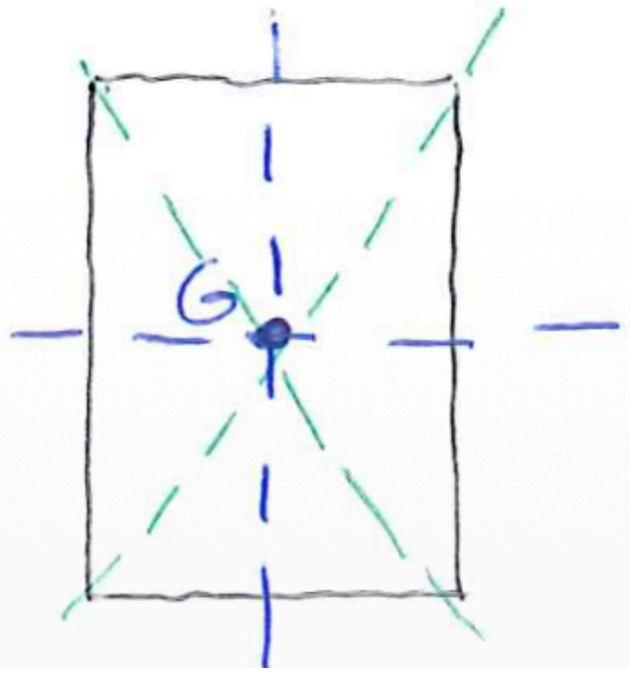


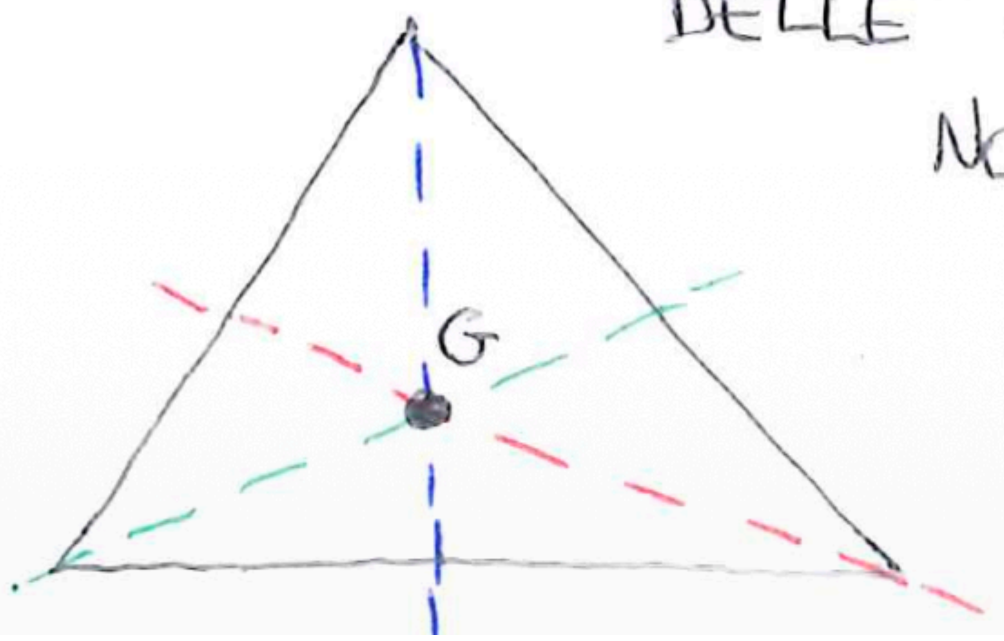
CON RIFERIMENTO ALLE 2 FIGURE, IN ENTRAMBI I CASI $S_y = 0$, POICHÉ

$$S_y = m(-d) + m(d) = 0.$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{S_y}{M} = 0$$

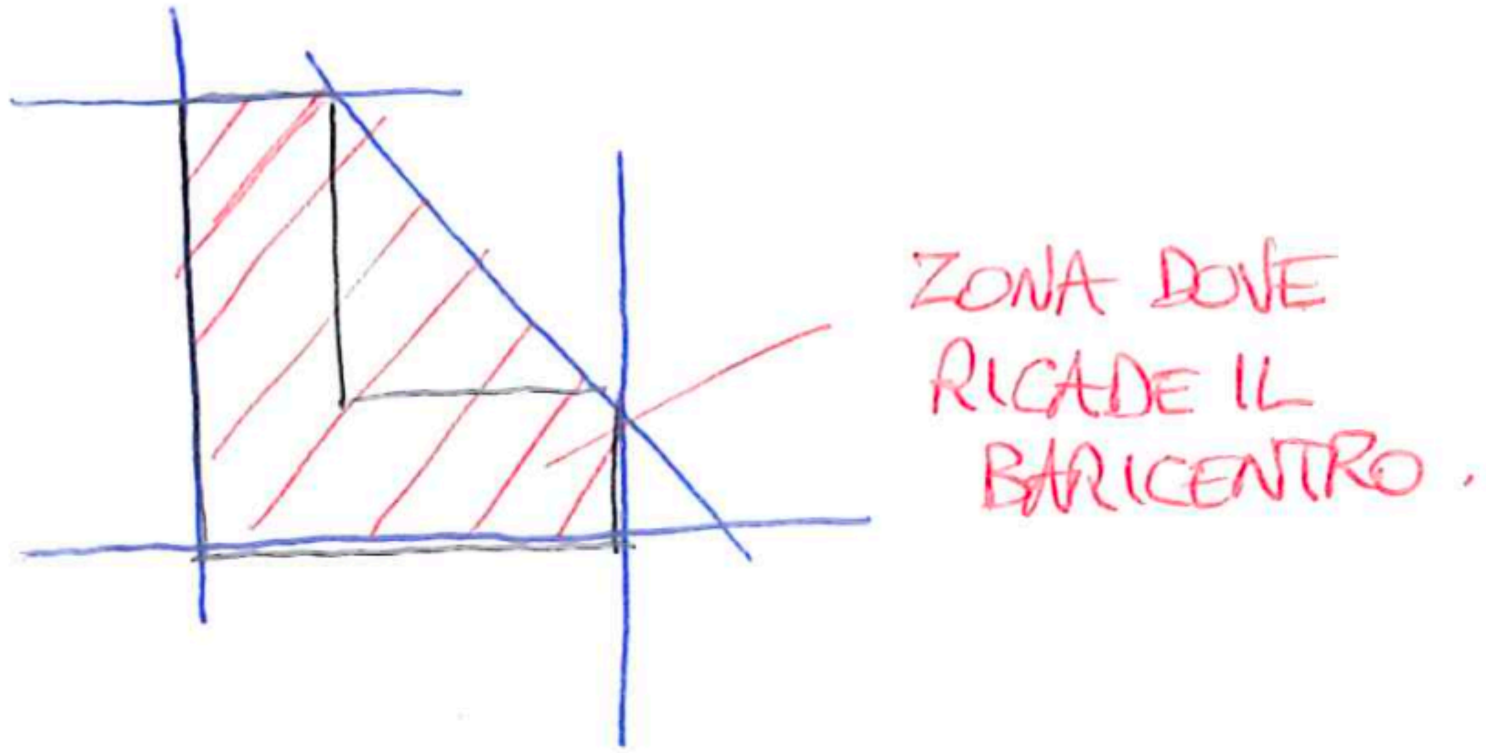
NE SEGUE CHE PER UN RETTANGOLO IL BARICENTRO SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE 2 MEDIANE (LE RETTE CHE UNISCONO I PUNTI MEDI DEI LATI OPPOSTI) O DELLE 2 DIAGONALI (LE RETTE CHE UNISCONO I VERTICI OPPOSTI. IN UN TRIANGOLO SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE TRE MEDIANE (LE RETTE CHE UNISCONO OGNI VERTICE COL PUNTO MEDIO DEL LATO OPPOSTO) IL BARICENTRO SUDDIVIDE OGNI MEDIANA IN 2 PARTI, DI LUNGHEZZA 1/3 (DAL PUNTO MEDIO DEL LATO) E 2/3 (DAL VERTICE) DELLA MEDIANA STESSA.



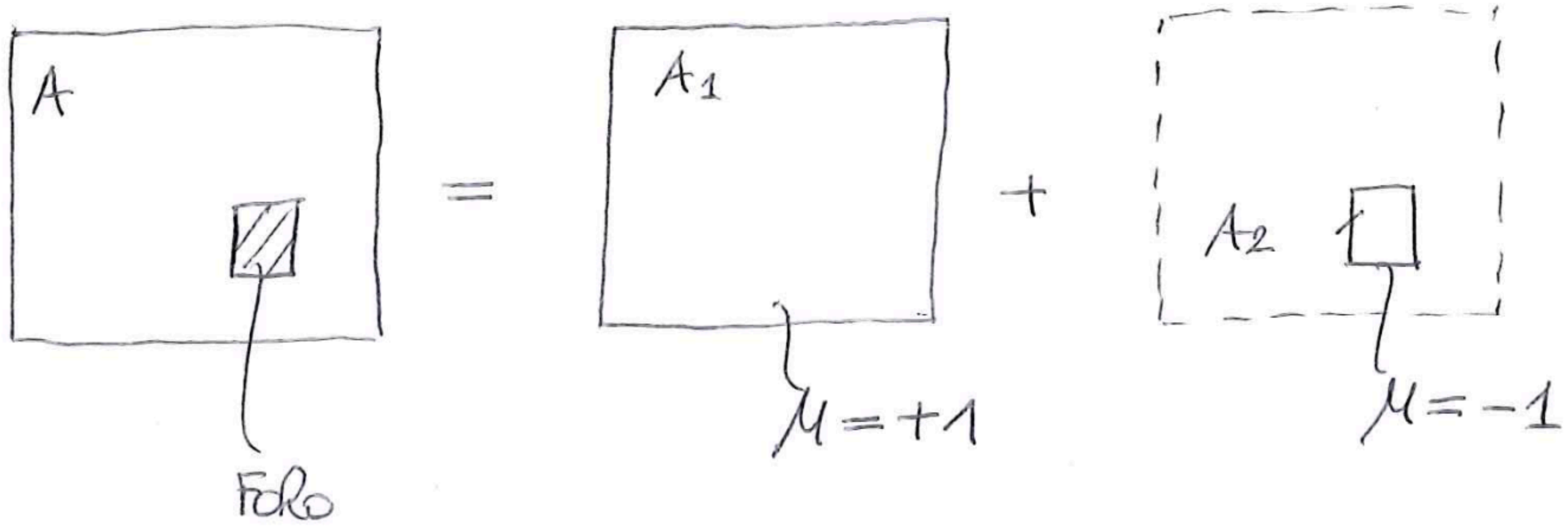


2) SE LE MASSE COSTITUENTI UNA FIGURA PIANA SONO TUTTE POSITIVE, ALLORA IL BARICENTRO DELLA FIGURA È INTERNO ALL'INVILUPPO DELLE RETTE CHE LA CONTORNANO (SENZA SECARLA):

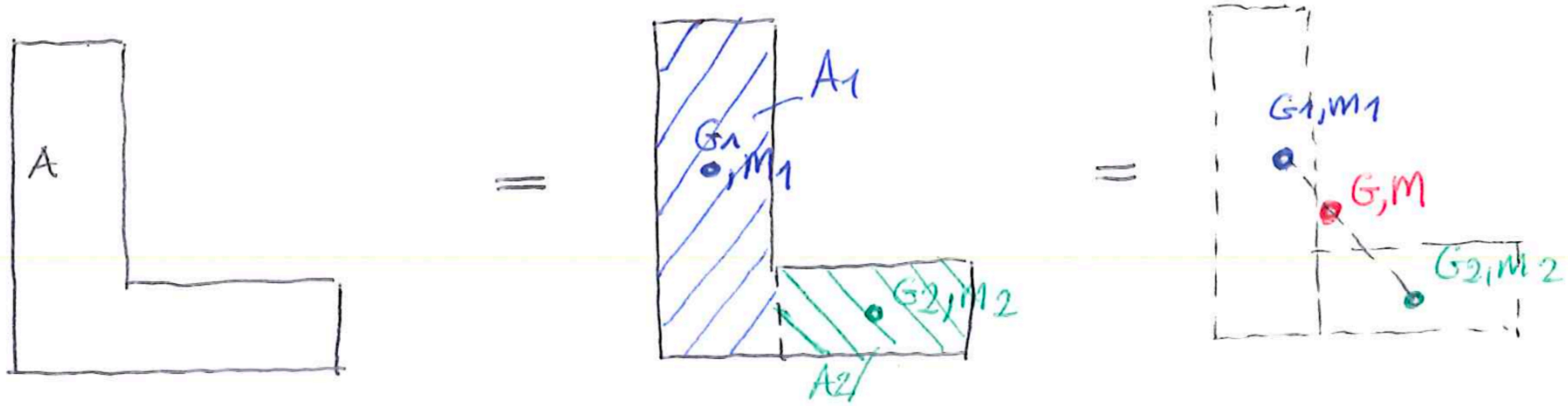
8



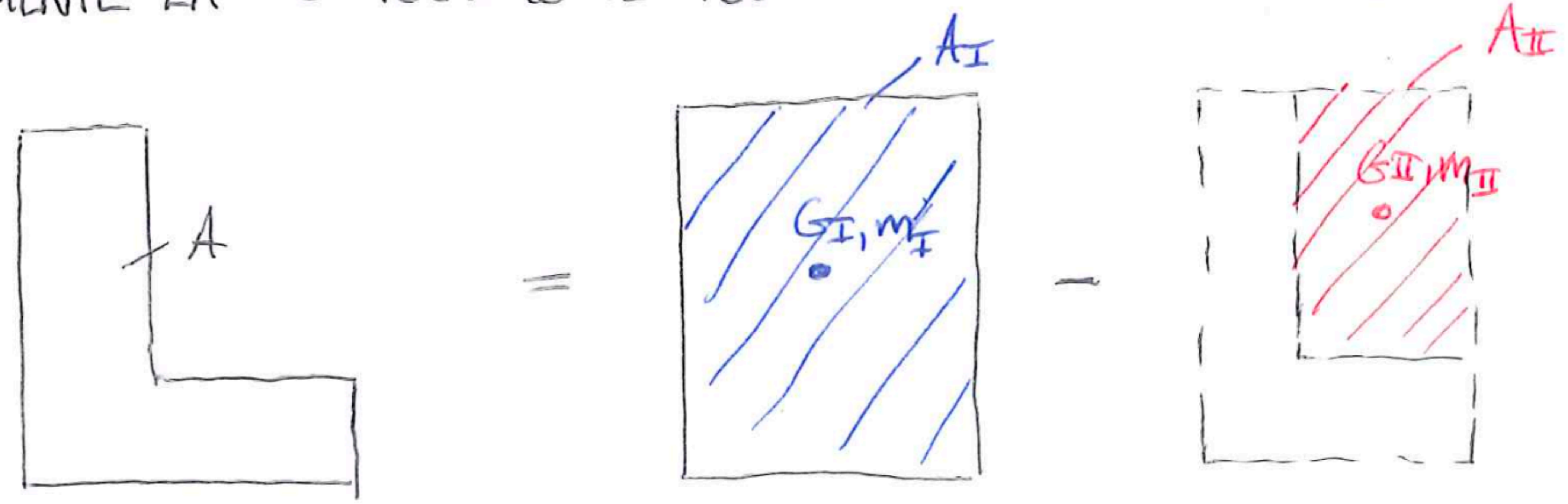
3) SE LA FIGURA È OMOGENEA E DOTATA DI FORI, LA SI PUÒ CONSIDERARE SOMMA DI UNA FIGURA PIENA (PRIVA DI FORI) CON DENSITÀ $\mu = 1$ E DI UNA SECONDA FIGURA PIENA, MA DI DENSITÀ $\mu = -1$ IN CORRISPONDENZA DEI FORI:



4) QUANDO LA FIGURA PIANA È SCOMPONIBILE IN FIGURE SEMPLICI <u>DISGIUNTE</u> (SENZA SOVRAPPOSIZIONI) SI PUÒ CALCOLARE IL BARICENTRO VALENDOSI DEL TEOREMA DI VARIGNON: SI "CONCENTRA" LA MASSA DELLE FIGURE COSTITUENTI NEI RELATIVI BARICENTRI E SI DETERMINA IL BARICENTRO DEL SISTEMA DI MASSE CONCENTRATE COSÌ OTTENUTE:



OVVIAMENTE LA SCOMPOSIZIONE PUÒ CONTENERE ANCHE DEI FORI:

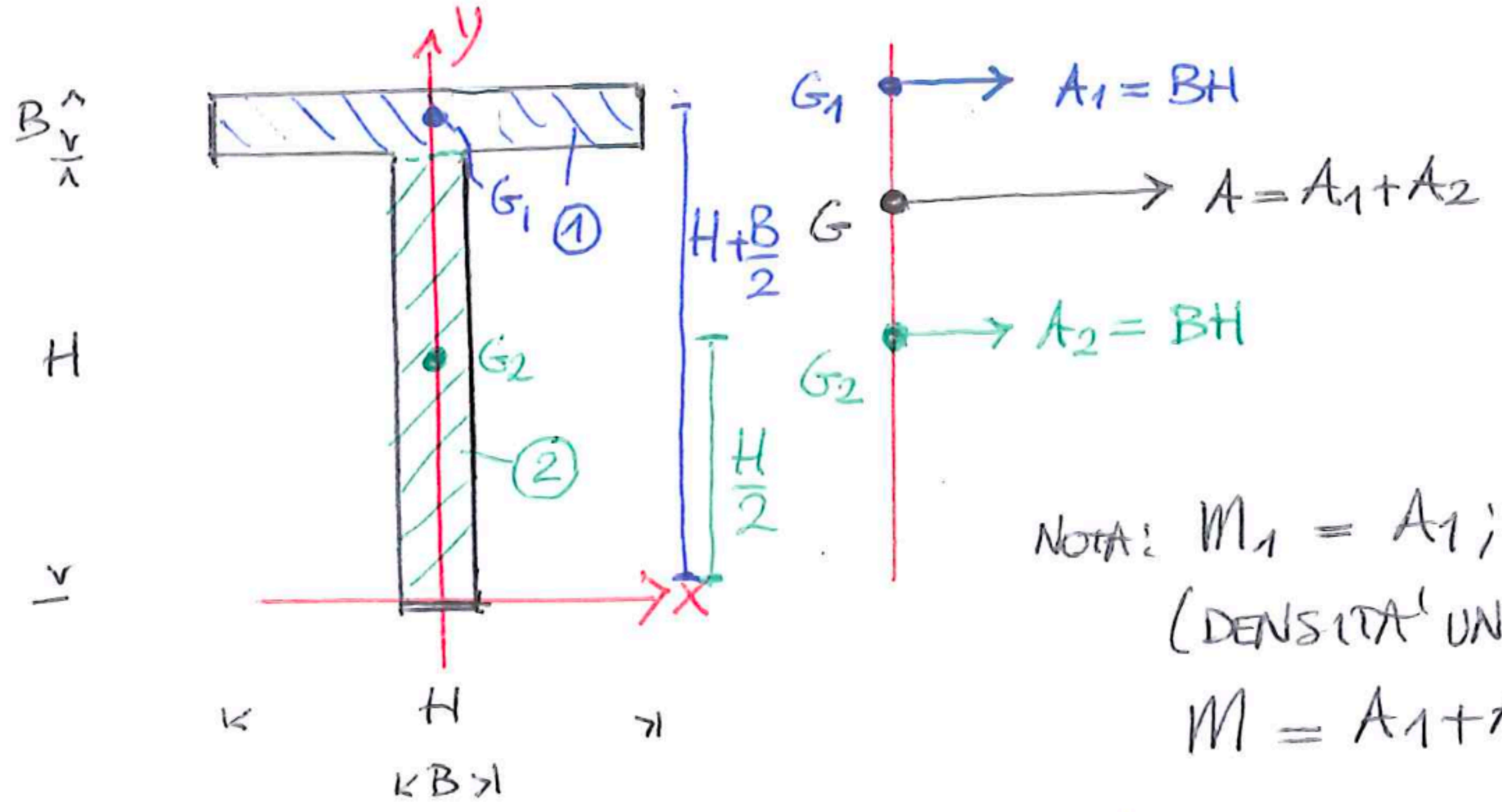


NEI 2 CASI SI HA: $A = A_1 + A_2$; $S_x = S_{x1} + S_{x2}$; $S_y = S_{y1} + S_{y2}$; $x_G = \frac{S_y}{A}$; $y_G = \frac{S_x}{A}$

$A = A_I - A_{II}$; $S_x = S_{xI} - S_{xII}$; $S_y = S_{yI} - S_{yII}$; $x_G = \frac{S_y}{A}$; $y_G = \frac{S_x}{A}$

1) SEZIONE A T.

PER RAGIONI DI SIMMETRIA SI ASSUME L'ASSE y COME INDICATO IN FIGURA: PER QUANTO VISTO RISULTA $x_G = 0$ E PER INDIVIDUARE COMPLETAMENTE LA POSIZIONE DEL BARICENTRO È SUFFICIENTE DETERMINARE LA COORDINATA y_G.



NOTA: $M_1 = A_1$; $M_2 = A_2$ (DENSITÀ UNITARIA) PER CUI $M = A_1 + A_2 = A$.

SUDDIVISA LA FIGURA IN 2 RETTANGOLI, COME INDICATO SI TROVA:

① $A_1 = B \cdot H$; $y_{G1} = H + \frac{B}{2}$

② $A_2 = B \cdot H$; $y_{G2} = \frac{H}{2}$

SI NOTI CHE LE COORDINATE y VANNO CALCOLATE RISPETTO AL MEDESIMO ASSE x !

SI HA QUINDI: $S_{x1} = A_1 \cdot y_{G1} = BH\left(H + \frac{B}{2}\right)$

$$S_{x2} = A_2 \cdot y_{G2} = BH \cdot \frac{H}{2}$$

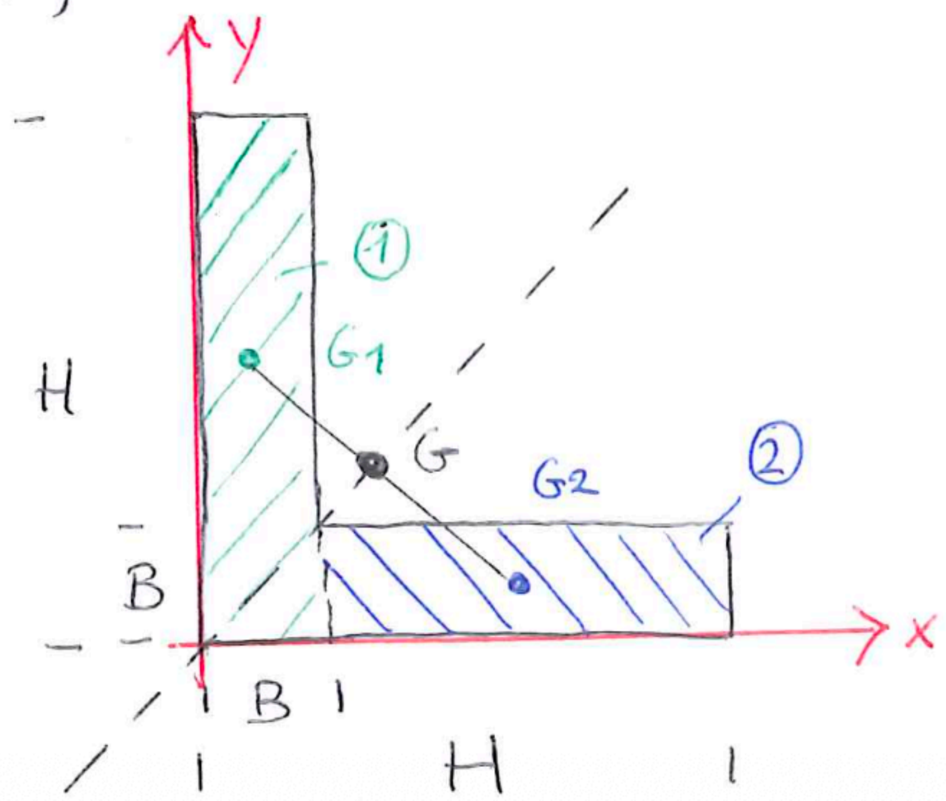
$$S_x = S_{x1} + S_{x2} = BH\left(H + \frac{B}{2} + \frac{H}{2}\right) = \frac{BH}{2}(3H + B)$$

$$A = A_1 + A_2 = BH + BH = 2BH$$

NE SEGUE: $y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{\cancel{BH}}{2}(3H+B)}{2\cancel{BH}} = \frac{3H+B}{4}$

PERTANTO RISPETTO AL SISTEMA DI ASSI CONSIDERATI $G = \left(0, \frac{3}{4}H + \frac{B}{4}\right)$.

2) SEZIONE A L A BRACCI EGUALI:



IN PRIMA ISTANZA SI ASSUMONO GLI ASSI X E Y CHE CONTORNANO (SUL LATO ESTERNO) LA FIGURA.

LA SI SUDDIVIDE IN DUE RETTANGOLI COME INDICATI; NE RISULTA, PER CIASCUNO DI ESSI:

①: $A_1 = H \cdot B \qquad G_1 = \left(\frac{B}{2}, \frac{H}{2}\right)$

②: $A_2 = (H-B) \cdot B \qquad G_2 = \left(B + \frac{H-B}{2}, \frac{B}{2}\right) = \left(\frac{B+H}{2}, \frac{B}{2}\right)$

SI HA QUINDI: $S_{x1} = A_1 \cdot y_{G1} = (H \cdot B) \cdot \frac{H}{2}$; $S_{x2} = A_2 \cdot y_{G2} = (H-B) B \cdot \frac{B}{2}$

$$S_x = \frac{H^2 B}{2} + \frac{HB^2}{2} - \frac{B^3}{2} = S_{x1} + S_{x2} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot B$$

$$S_{y1} = A_1 \cdot x_{G1} = (H \cdot B) \cdot \frac{B}{2}; \quad S_{y2} = A_2 \cdot x_{G2} = (H-B) \cdot B \cdot \frac{B+H}{2} = \frac{(H-B)(H+B) \cdot B}{2}$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = \frac{HB^2}{2} + \frac{(H^2 - B^2) B}{2} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot B$$

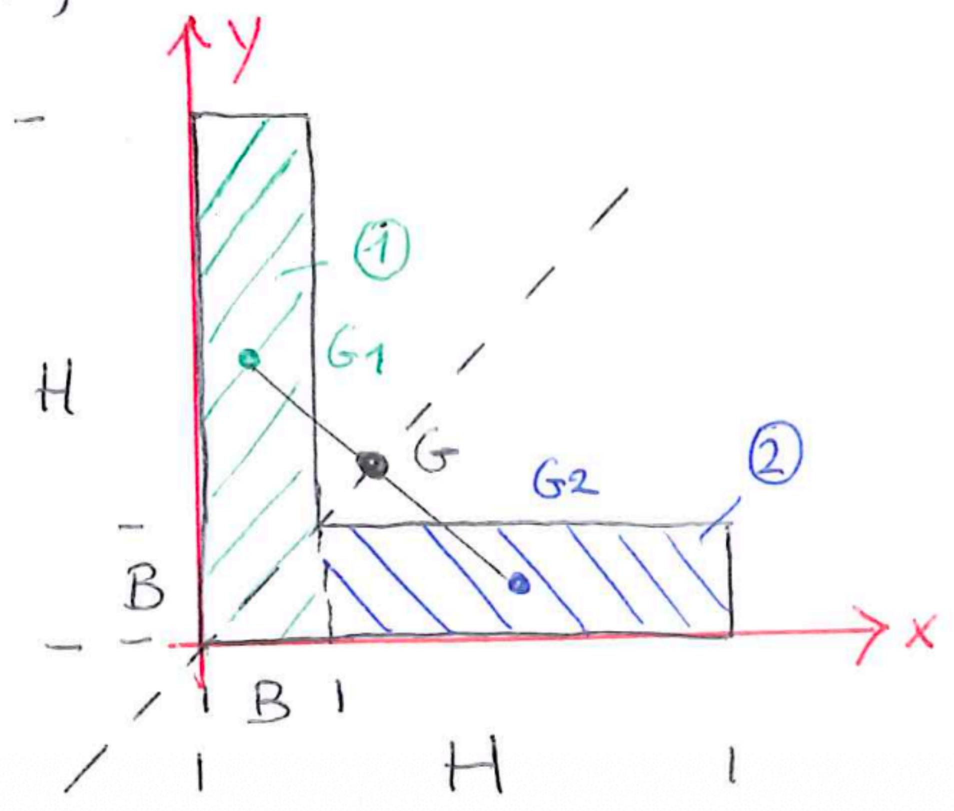
$$A = A_1 + A_2 = H \cdot B + (H-B) \cdot B = HB + HB - B^2 = (2H - B) B$$

SI OTTIENE COSÌ:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot \cancel{B}}{(2H-B) \cdot \cancel{B}} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H-B)}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{H^2 + HB - B^2}{2} \cdot \cancel{B}}{(2H-B) \cdot \cancel{B}} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H-B)}$$

2) SEZIONE A L A BRACCI EGUALI:

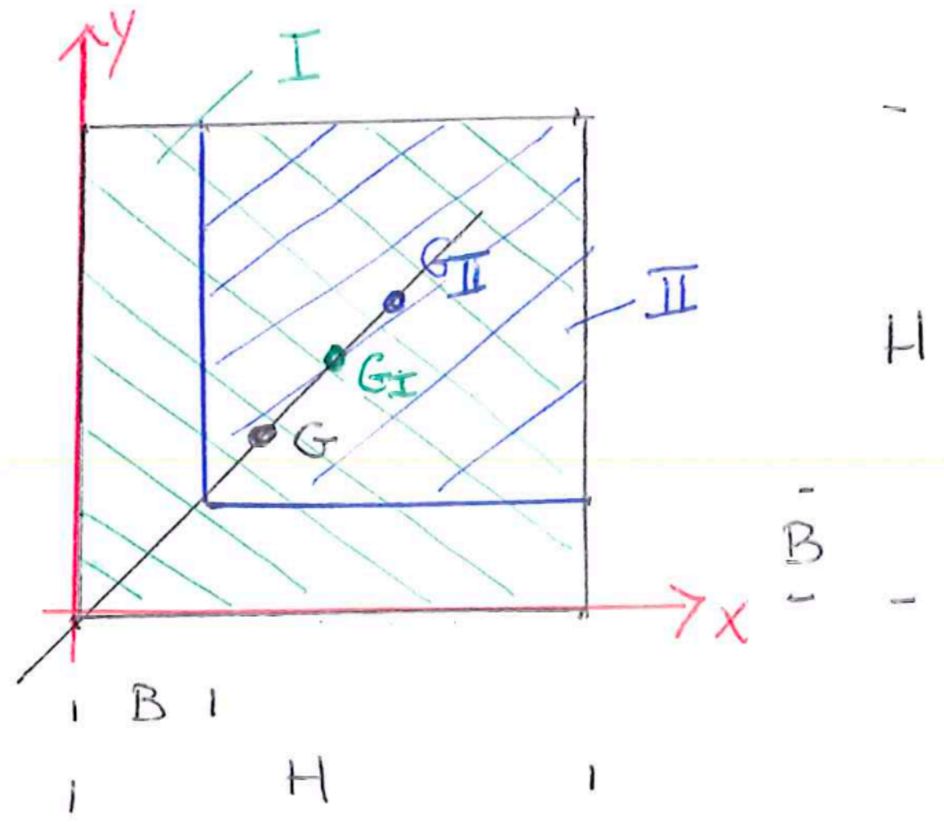


SI TROVA $x_G = y_G$ E DUNQUE IL BARICENTRO G SI TROVA SULLA BISETTRICE DEL PRIMO QUADRANTE, CHE RISULTA ESSERE ASSE DI SIMMETRIA PER LA FIGURA.

SI PUÒ VERIFICARE QUANTO SEGUE:

- IL BARICENTRO SI TROVA SUL SEGMENTO CHE UNISCE G_1 E G_2, ALL'INTERNO DELLO INTERVALLO
- IL BARICENTRO È ESTERNO ALLA FIGURA MA È RACCHIUSO DALL'INVILUPPO DELLE RETTE RADENTI ALLA FIGURA (CIOÈ DELLE RETTE CHE NON LA INTERSECANO).

IN ALTERNATIVA SI PUÒ CONSIDERARE LA FIGURA COME DIFFERENZA DI DUE RETTANGOLI (IN REALTA' DEI QUADRATI) NON CONCENTRICI:



IN QUESTO CASO SI HA:

(I) $A_I = H \cdot H$ $\quad G_I = \left(\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right)$

(II) $A_{II} = (H-B)(H-B)$ $\quad G_{II} = \left(B+\frac{H-B}{2}, B+\frac{H-B}{2}\right)$

$$\Rightarrow G_{II} = \left(\frac{B+H}{2}, \frac{B+H}{2}\right)$$

NE SEGUE

$$A = A_I - A_{II} = H^2-(H-B)^2 = \cancel{H^2}-\cancel{H^2}+2HB-B^2$$

$$\Rightarrow A = (2H-B)B$$

$$S_{xI} = A_I\, y_{GI} = H^2 \cdot \frac{H}{2} \quad ; \quad S_{xII} = A_{II}\, y_{GII} = (H-B)^2 \cdot \frac{B+H}{2} = \frac{H-B}{2}(H-B)(H+B)$$

$$S_x = S_{xI} - S_{xII} = \frac{H^3}{2} - \frac{H-B}{2}(H^2-B^2) = \cancel{\frac{H^3}{2}} - \cancel{\frac{H^3}{2}} + \frac{HB^2}{2} + \frac{H^2B}{2} - \frac{B^3}{2} = \frac{B}{2}(H^2+HB-B^2)$$

$$S_{yI} = A_I \cdot x_{GI} = H^2 \cdot \frac{H}{2} \quad ; \quad S_{yII} = A_{II}\, x_{GII} = (H-B)^2 \cdot \frac{B+H}{2} = \frac{H-B}{2}(H^2-B^2)$$

$$S_y = S_{yI} - S_{yII} = \frac{H^3}{2} - \frac{H-B}{2}(H^2-B^2) = \cancel{\frac{H^3}{2}} - \cancel{\frac{H^3}{2}} + \frac{HB^2}{2} + \frac{H^2B}{2} - \frac{B^3}{2} = \frac{B}{2}(H^2+HB-B^2)$$

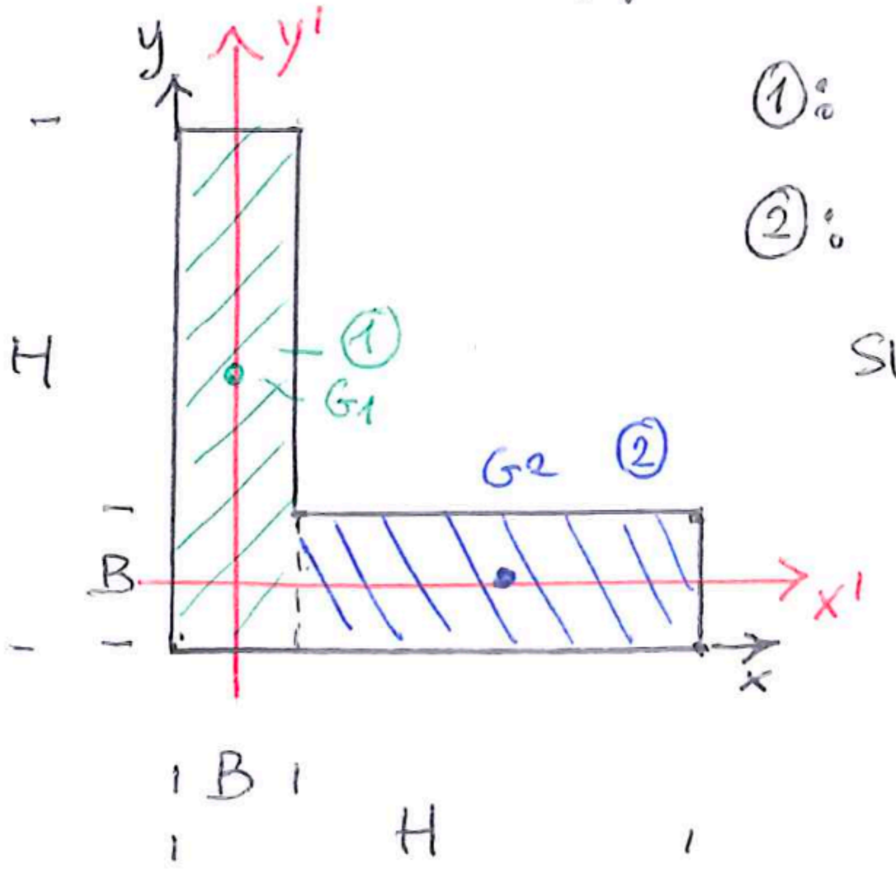
11

DA QUI SI OTTIENE SEMPLICEMENTE:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{\cancel{B}}{2}(H^2+HB-B^2)}{\cancel{B}(2H-B)} = \frac{H^2+HB-B^2}{2(2H-B)}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{\cancel{B}}{2}(H^2+HB-B^2)}{\cancel{B}(2H-B)} = \frac{H^2+HB-B^2}{2(2H-B)}$$

NEL CASO ORA ANALIZZATO PUÒ ESSERE CONVENIENTE ADOTTARE COME ASSI RISPETTO AI QUALI EFFETTUARE I CALCOLI NON QUELLI CHE CONTORNANO ALL'ESTERNO LA FIGURA E DENOTATI x, y, MA GLI ASSI DI SIMMETRIA DI CIASCUNO DEI 2 RETTANGOLI COSTITUENTI, INDICATI CON x', y'. COSÌ FACENDO SI TROVA:



① : $A_1 = B \cdot H$; $G_1' = \left(0, \frac{H}{2} - \frac{B}{2}\right)$

② : $A_2 = (H-B) \cdot B$; $G_2' = \left(\frac{H-B}{2} + \frac{B}{2}, 0\right) = \left(\frac{H}{2}, 0\right)$

SI HA QUINDI: $A = A_1 + A_2 = BH + (BH - B^2) = B(2H - B)$

$$\left.\begin{aligned} S_{x'_1} &= A_1 \cdot y'_{G_1} = BH \cdot \left(\frac{H}{2} - \frac{B}{2}\right) \\ S_{x'_2} &= A_2 \cdot y'_{G_2} = (H-B) \cdot B \cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\} S_{x'} = B\left(\frac{H^2}{2} - \frac{HB}{2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} S_{y'_1} &= A_1 . x'_{G_1} = BH \cdot 0 = 0 \\ S_{y'_2} &= A_2 \, x'_{G_2} = (H-B) . B \, \frac{H}{2} = \frac{B}{2} H (H-B) \end{aligned}\right\} S_{y'} = \frac{B}{2}(H^2 - HB)$$

E DA QUI SI RICAVA: $x'_G = \dfrac{S_{y'}}{A} = \dfrac{\frac{B}{2}(H^2 - HB)}{B(2H-B)} = \dfrac{H^2 - HB}{2(2H-B)}$

$$y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{\frac{B}{2}(H^2 - HB)}{B(2H-B)} = \frac{H^2 - HB}{2(2H-B)}$$

È FACILE OSSERVARE, ESSENDO $x = x' + \frac{B}{2}$; $y = y' + \frac{B}{2}$ CHE

$$x_G = \frac{B}{2} + x'_G = \frac{B}{2} + \frac{H^2 - HB}{2(2H-B)} = \frac{B(2H-B) + H^2 - HB}{2(2H-B)} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H-B)}$$

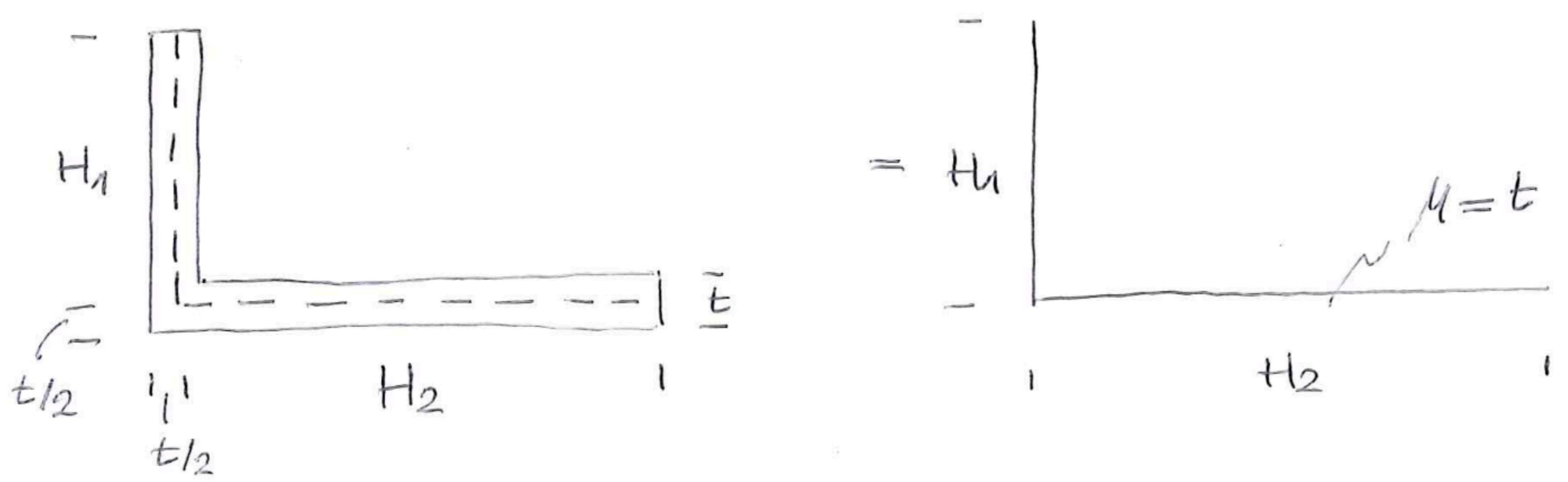
$$y_G = \frac{B}{2} + y'_G = \frac{B}{2} + \frac{H^2 - HB}{2(2H-B)} = \frac{B(2H-B) + H^2 - HB}{2(2H-B)} = \frac{H^2 + HB - B^2}{2(2H-B)}$$

COINCIDENTI CON I RISULTATI PRECEDENTEMENTE OTTENUTI.

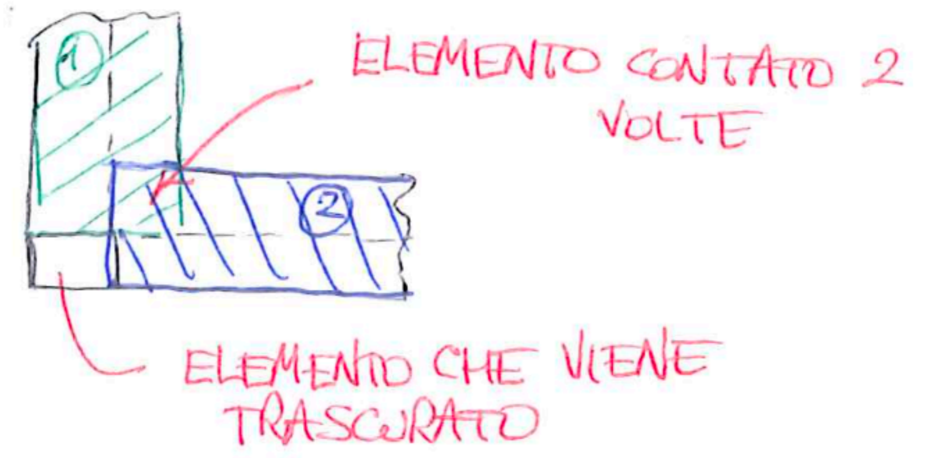
3) APPROSSIMAZIONE PER PROFILI SOTTILI.

PER PROFILI NEI QUALI LO SPESSORE t È MOLTO PICCOLO RISPETTO ALLE DIMENSIONI DELLA FIGURA STESSA SI PUÒ INTRODURRE LA APPROSSIMAZIONE DI RIDURRE LA FIGURA AD UNA LINEA COINCIDENTE CON L'ASSE (LINEA MEDIA) DEL PROFILO STESSO, LUNGO LA QUALE SI ASSUME UNA DENSITÀ LINEARE $\mu(s) = t$, CIOÈ PARI ALLO SPESSORE DEL PROFILO (MISURATO ORTOGONALMENTE ALLA LINEA MEDIA).

GLI EFFETTI DI QUESTA APPROSSIMAZIONE VENGONO VALUTATI CON RIFERIMENTO ALLA SOLUZIONE ESATTA PER UNA SEZIONE A L A BRACCI DISEGUALI:



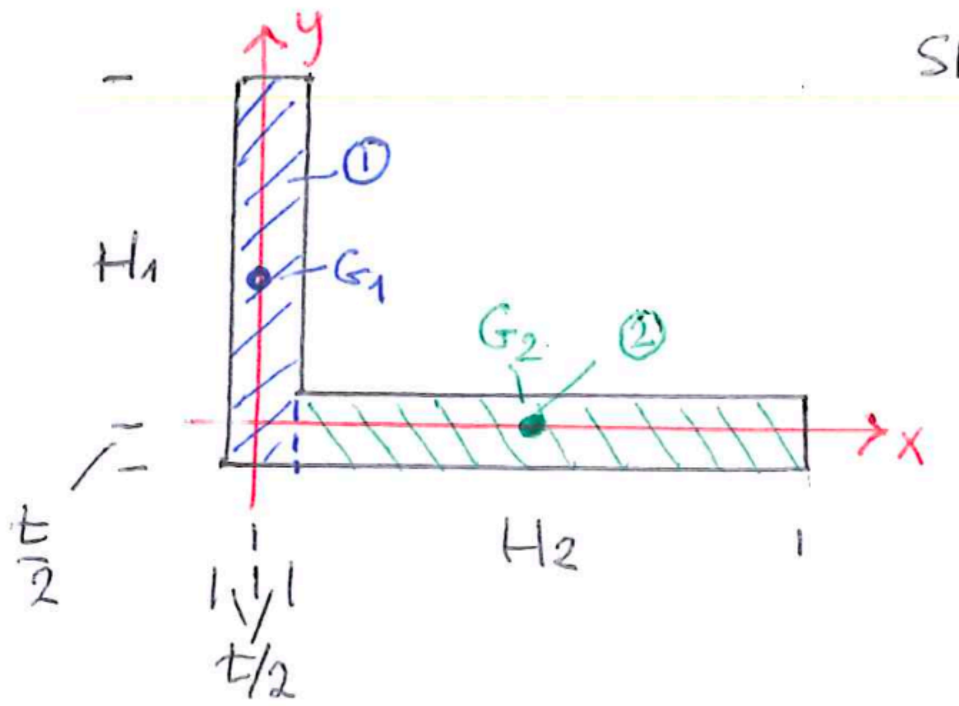
NOTA 2: L'APPROSSIMAZIONE PORTA A SOSTITUIRE LA FIGURA A L CON 2 RETTANGOLI CHE SI INNESTANO L'UNO NELL'ALTRO PRODUCENDO UNA SOVRAPPOSIZIONE, INDICATA NELLA FIGURA CHE COSTITUISCE UN INGRANDIMENTO DEL NODO:



LO SCOPO CHE SI INTENDE RAGGIUNGERE È QUELLO DI VALUTARE L'EFFETTO DELLA APPROSSIMAZIONE INTRODOTTA MEDIANTE IL CONFRONTO CON LA SOLUZIONE ESATTA.

IN ENTRAMBI I CASI SI ASSUMONO GLI ASSI X E Y IN MODO CHE ESSI RAPPRESENTINO GLI ASSI DI SIMMETRIA DEI 2 RETTANGOLI.

(A) SOLUZIONE ESATTA.



SI HA FACILMENTE:

① $A_1 = \left(H_1 + \frac{t}{2}\right)t$ $\qquad G_1 = \left(0, \underbrace{\frac{H_1 + \frac{t}{2}}{2}}_{\text{DISTANZA DA LEMBO ESTERNO}} - \underbrace{\frac{t}{2}}_{\text{DISTANZA ASSE X DA LEMBO ESTERNO}}\right) = \left(0, \frac{H_1}{2} - \frac{t}{4}\right)$

② $A_2 = \left(H_2 - \frac{t}{2}\right)t$ $\qquad G_2 = \left(\underbrace{\frac{H_2 - \frac{t}{2}}{2}}_{\text{DISTANZA DA LEMBO INTERNO}} + \underbrace{\frac{t}{2}}_{\text{DISTANZA ASSE Y DA LEMBO INTERNO}}, 0\right) = \left(\frac{H_2}{2} + \frac{t}{4}, 0\right)$

SI HA COSÌ: $A = A_1 + A_2 = t\left[\left(H_1 + \frac{t}{2}\right) + \left(H_2 - \frac{t}{2}\right)\right] = t\left[H_1 + H_2\right]$

$$S_{x1} = A_1 \cdot y_{G1} = \left(H_1 + \frac{t}{2}\right)t\left(H_1 - \frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{t}{2}\left(H_1^2 - \frac{t^2}{4}\right); \quad S_{x2} = A_2 \cdot y_{G2} = 0$$

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} = \frac{t}{2}\left(H_1^2 - \frac{t^2}{4}\right)$$

$$S_{y1} = A_1 \cdot x_{G1} = 0; \quad S_{y2} = A_2 x_{G2} = \left(H_2 - \frac{t}{2}\right)t\left(H_2 + \frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(H_2^2 - \frac{t^2}{4}\right)\frac{t}{2}$$

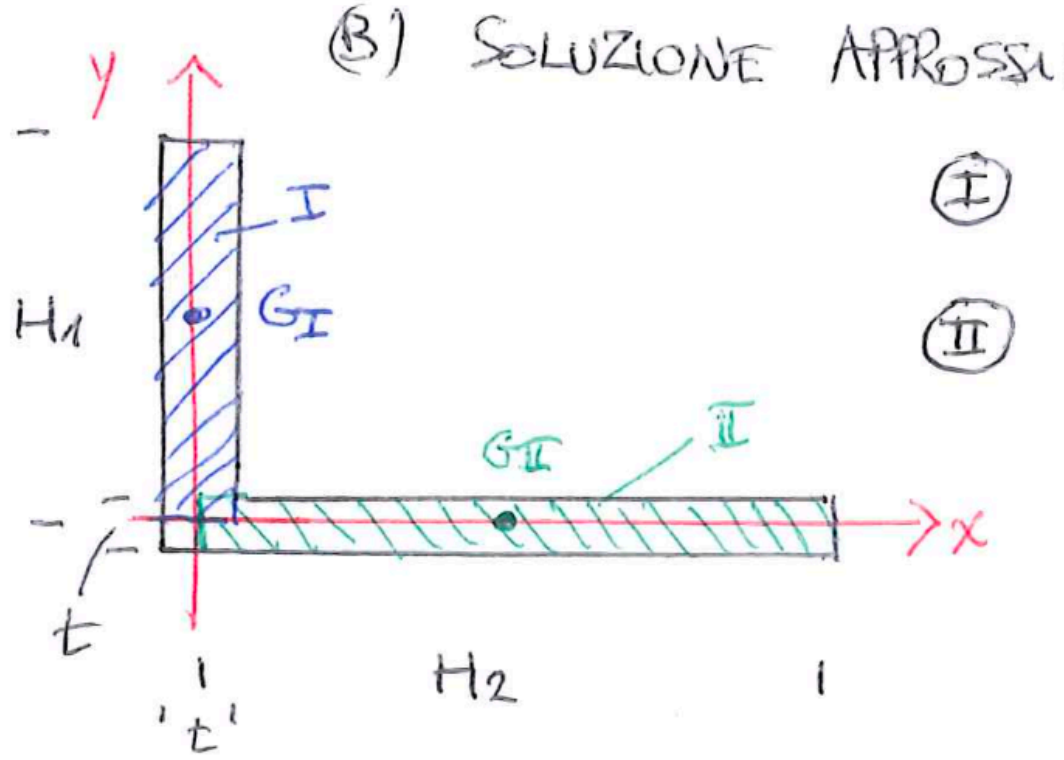
$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = \frac{t}{2}\left(H_2^2 - \frac{t^2}{4}\right)$$

SI TROVA COSÌ:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{\cancel{t}}{2}\left(H_2^2 - \frac{t^2}{4}\right)}{\cancel{t}\left[H_1 + H_2\right]} = \frac{H_2^2 - \frac{t^2}{4}}{2\left[H_1 + H_2\right]}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{\cancel{t}}{2}\left(H_1^2 - \frac{t^2}{4}\right)}{\cancel{t}\left[H_1 + H_2\right]} = \frac{H_1^2 - \frac{t^2}{4}}{2\left[H_1 + H_2\right]}$$

B) SOLUZIONE APPROSSIMATA



(I) $A_I = H_1 \cdot t \qquad G_I = \left(0, \frac{H_1}{2}\right)$

(II) $A_{II} = H_2 t \qquad G_{II} = \left(\frac{H_2}{2}, 0\right)$

SI HA COSÌ:

$$A = A_I + A_{II} = H_1 t + H_2 t = (H_1 + H_2) t$$

$$S_{xI} = A_I \cdot y_{GI} = H_1 t \cdot \frac{H_1}{2} = \frac{H_1^2}{2} t \; ; \quad S_{xII} = A_{II} \cdot y_{GII} = 0$$

$$S_x = S_{xI} + S_{xII} = \frac{H_1^2}{2} t$$

$$S_{yI} = A_I \cdot x_{GI} = 0 \; ; \quad S_{yII} = A_{II} \cdot x_{GII} = H_2 t \cdot \frac{H_2}{2} = \frac{H_2^2}{2} t \qquad S_y = S_{yI} + S_{yII} = \frac{H_2^2}{2} t$$

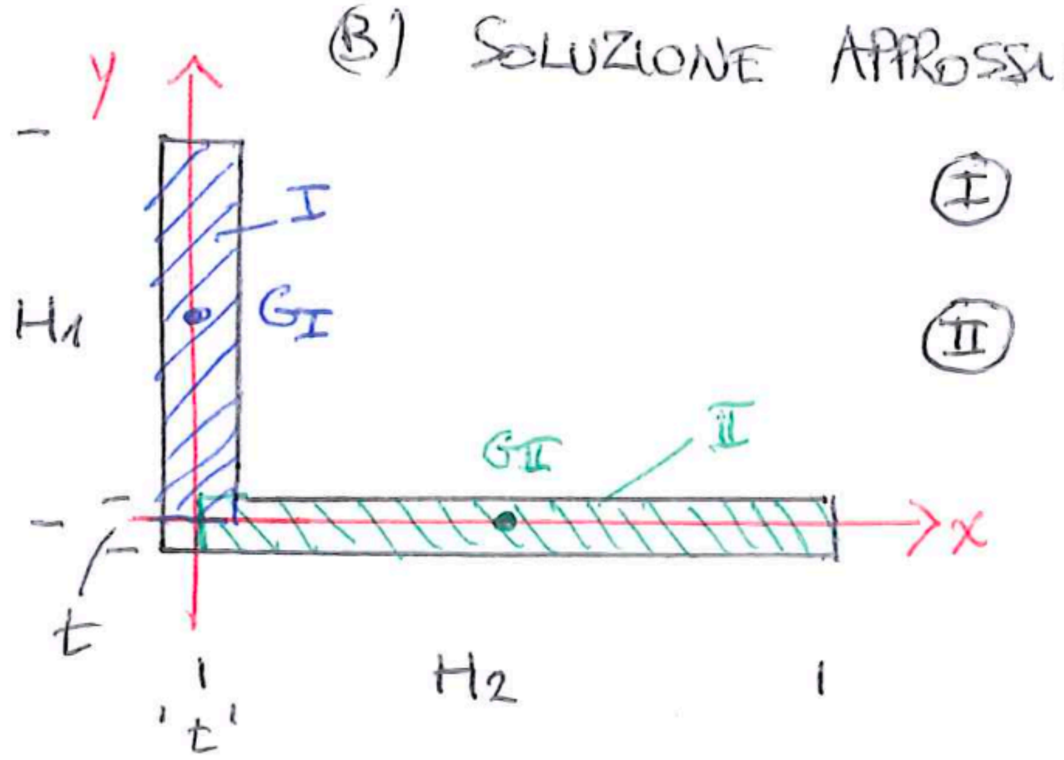
E IN QUESTO MODO SI TROVA:

$$x_G^* = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{H_2^2}{2}\cancel{t}}{(H_1+H_2)\cancel{t}} = \frac{H_2^2}{2(H_1+H_2)}$$

$$y_G^* = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{H_1^2}{2}\cancel{t}}{(H_1+H_2)\cancel{t}} = \frac{H_1^2}{2(H_1+H_2)}$$

UNICA

B) SOLUZIONE APPROSSIMATA



(I) $A_I = H_1 \cdot t \qquad G_I = \left(0, \frac{H_1}{2}\right)$

(II) $A_{II} = H_2 t \qquad G_{II} = \left(\frac{H_2}{2}, 0\right)$

SI HA COSÌ:

$$A = A_I + A_{II} = H_1 t + H_2 t = (H_1 + H_2)t$$

$$S_{xI} = A_I \cdot y_{GI} = H_1 t \cdot \frac{H_1}{2} = \frac{H_1^2 t}{2} \; ; \quad S_{xII} = A_{II} \cdot y_{GII} = 0$$

$$S_x = S_{xI} + S_{xII} = \frac{H_1^2 t}{2}$$

$$S_{yI} = A_I \cdot x_{GI} = 0 \; ; \quad S_{yII} = A_{II} \cdot x_{GII} = H_2 t \cdot \frac{H_2}{2} = \frac{H_2^2 t}{2} \qquad S_y = S_{yI} + S_{yII} = \frac{H_2^2 t}{2}$$

E IN QUESTO MODO SI TROVA:

$$x_G^* = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{H_2^2}{2}\cancel{t}}{(H_1+H_2)\cancel{t}} = \frac{H_2^2}{2(H_1+H_2)}$$

$$y_G^* = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{H_1^2}{2}\cancel{t}}{(H_1+H_2)\cancel{t}} = \frac{H_1^2}{2(H_1+H_2)}$$

<u>NOTA 3</u> SI OSSERVA CHE IN ENTRAMBI I CASI IL VALORE DELL'AREA È CORRETTO, DUNQUE AI FINI DEL CALCOLO DELL'AREA È IRRILEVANTE LA POSIZIONE DEL RETTANGOLINO CHE VIENE TRASCURATO E DI QUELLO CHE VIENE CONTEGGIATO DUE VOLTE, PURCHÉ QUESTI SIANO EGUALI (CIOÈ ABBIANO EGUALE AREA).

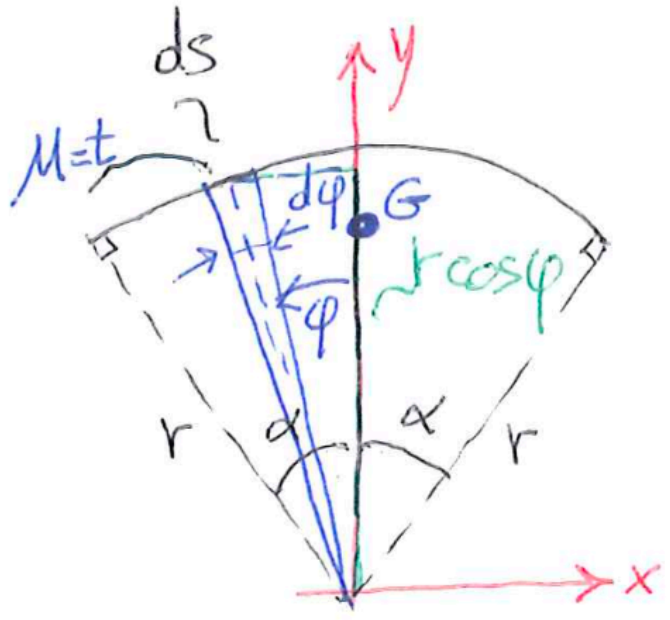
I VALORI DEI MOMENTI STATICI SONO INVECE DIFFERENTI (E CIÒ SI RIFLETTE NELLA POSIZIONE DEL BARICENTRO) POICHÉ IN QUESTO CASO LE POSIZIONI DEI DUE RETTANGOLINI <u>INFLUENZANO</u> IL CALCOLO, SEPPURE A PARITÀ DI AREA DEI MEDESIMI.

L'ERRORE CHE SI COMPIE NELLA DETERMINAZIONE DEL BARICENTRO:

$$\Delta x_G = x_G - x_G^* = -\frac{t^2/4}{2(H_1+H_2)} \; ; \qquad \Delta y_G = y_G - y_G^* = \frac{-t^2/4}{2(H_1+H_2)}$$

È DELL'ORDINE DI t^2, ACCETTABILE SE $t \ll (H_1+H_2)$. $\square$

4) BARICENTRO DI UNA LINEA COSTITUITA DA UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI ANGOLO AL CENTRO 2α E DI SPESSORE COSTANTE E PARI A t.



CONVIENE ASSUMERE GLI ASSI COME IN FIGURA; PER RAGIONI DI SIMMETRIA (y È ASSE DI SIMMETRIA PER LA LINEA) $x_G = 0$.

LA MASSA TOTALE DELL'ARCO È DATA DAL PRODOTTO DELLA LUNGHEZZA SVILUPPATA DELL'ARCO PER LA "DENSITÀ" $\mu = t$.
NE SEGUE

$$M = 2\alpha r \mu = 2\alpha r t.$$

PER VALUTARE IL MOMENTO STATICO S_x (L'UNICO CHE SERVE IN QUESTO CASO: $x_G = 0 \Rightarrow S_y = 0$) SI CONSIDERA UN PUNTO DELL'ARCO E L'ARCHETTO $ds = r\,d\varphi$ CHE NE COSTITUISCE L'INTORNO.
LA DISTANZA DALL'ASSE x DELL'ELEMENTO VALE $r\cos\varphi$; PERTANTO $dS_x = \mu\, ds \cdot r\cos\varphi$

NE SEGUE

$$S_x = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \mu\, ds \cdot r\cos\varphi = \mu \int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2 \cos\varphi\, d\varphi = t r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\, d\varphi = 2 t r^2 \int_{0}^{\alpha} \cos\varphi\, d\varphi$$

↑ FUNZIONE PARI INTEGRATA SU UN INTERVALLO SIMMETRICO

$$S_x = 2 t r^2 \left[+\sin\varphi \right]_0^{\alpha} = 2 t r^2 \sin\alpha$$

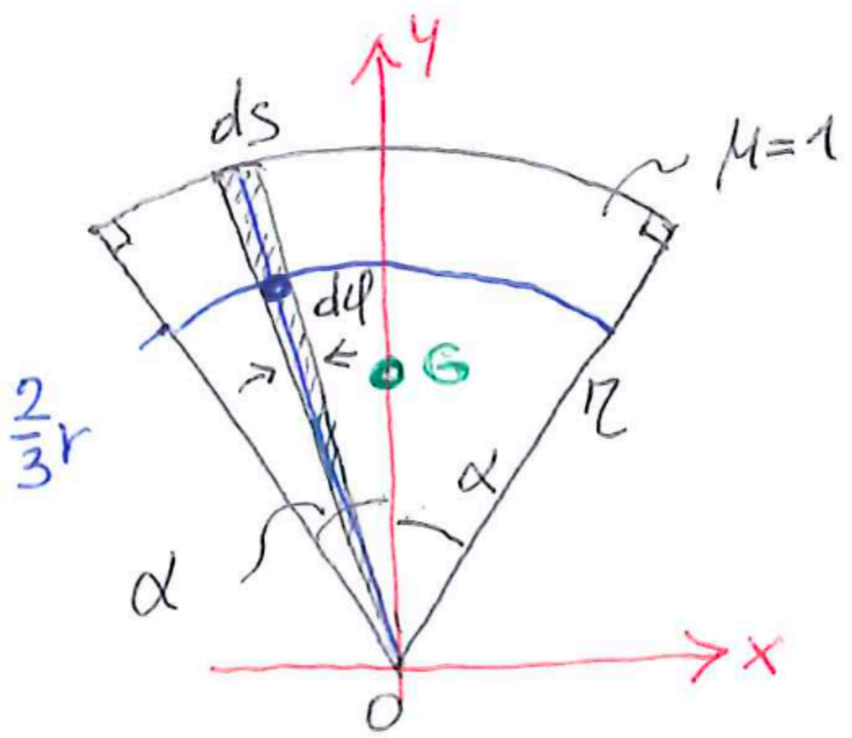
SI HA QUINDI:

$$y_G = \frac{S_x}{M} = \frac{\cancel{2}\cancel{t} r^{\cancel{2}} \sin\alpha}{\cancel{2}\alpha \cancel{r}\cancel{t}} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha} \qquad [\leq r!]$$

IL RISULTATO È ANALOGO A QUANTO VISTO NEL CALCOLARE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DI UN CARICO DISTRIBUITO UNIFORMEMENTE IN DIREZIONE ORIZZONTALE PER UN ARCO CIRCOLARE, GIÀ VISTO NELLA LEZIONE 13, PAG. 5.
SI OSSERVA CHE LA POSIZIONE DEL BARICENTRO È INDIPENDENTE DALLO SPESSORE t.

UNICA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

5) BARICENTRO DI UN SETTORE CIRCOLARE DI ANGOLO AL CENTRO 2α NEL CASO DI DENSITÀ SUPERFICIALE COSTANTE.



LA FIGURA PUÒ ESSERE SCOMPOSTA IN TANTE "FETTE" TRIANGOLARI INFINITESIME, DI RAGGIO r (ALTEZZA) E BASE $ds = r d\varphi$.

STANTE IL CARATTERE INFINITESIMO DELLE "FETTE", SI PUÒ ASSUMERE CHE LA BASE SIA RETTILINEA.

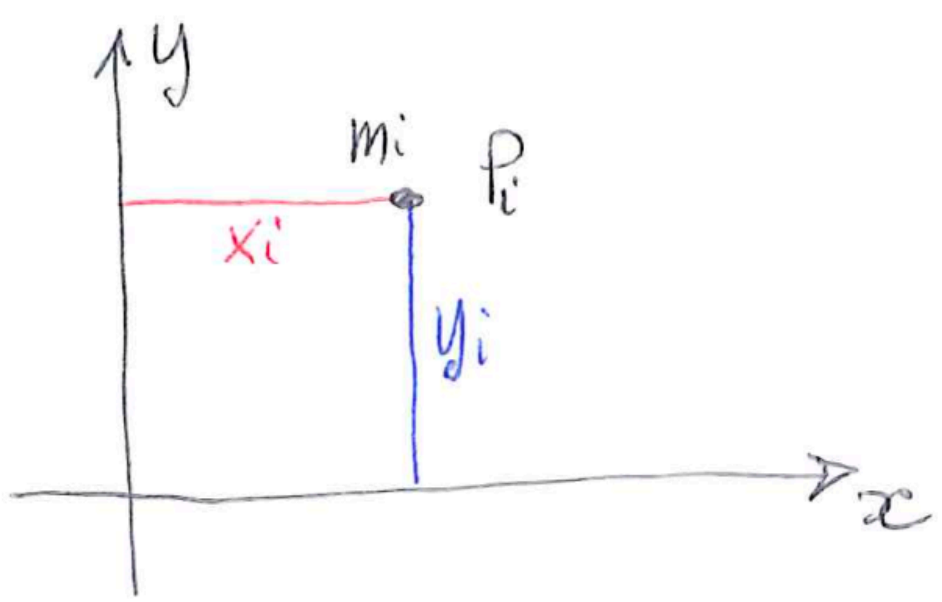
PER CIASCUN TRIANGOLINO SIFFATTO, SI PUÒ CONCENTRARE LA MASSA

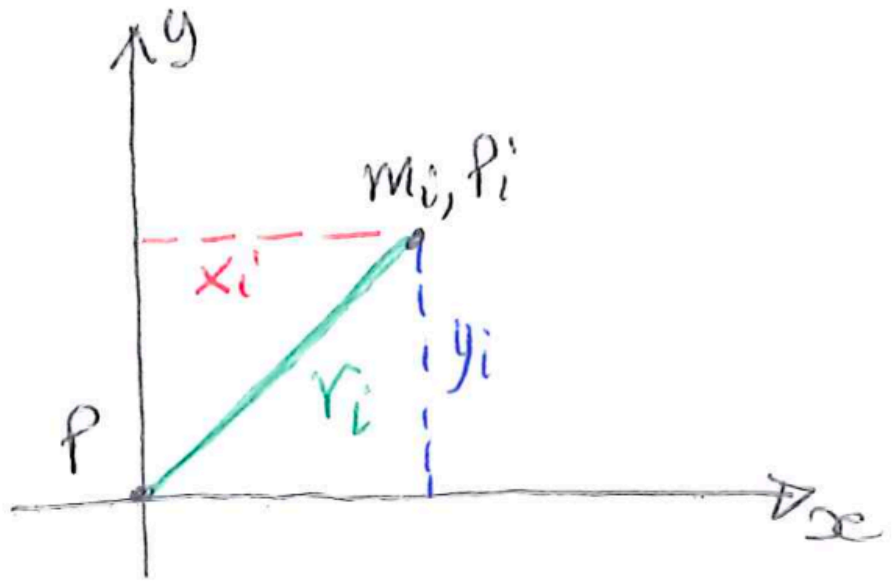
$$dm = \mu \frac{1}{2} r\,ds = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$ NEL PROPRIO BARICENTRO,

POSTO A DISTANZA 2/3 r DA O. I BARICENTRI DI TUTTI I TRIANGOLI INFINITESIMI SONO COLLOCATI SU UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\frac{2}{3}r$. E DI DENSITÀ LINEARE COSTANTE (DATA DA dm/ds).

CI SI PUÒ RICONDURRE AL CASO PRECEDENTE IN CUI L'ARCO DI CIRCONFERENZA DI DENSITÀ COSTANTE HA RAGGIO $\frac{2}{3}r$. NE SEGUE $y_G = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ MENTRE $x_G = 0$ PER RAGIONI DI SIMMETRIA.

MOMENTI DEL SECONDO ORDINE





- MOMENTO DI INERZIA ASSIALE DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE X:

$$J_x = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2 \quad [26] \Leftarrow$$ J_x CONTIENE LE DISTANZE (AL QUADRATO) DALL'ASSE X: y_i^2 !

- MOMENTO DI INERZIA ASSIALE DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO ALL'ASSE Y:

$$J_y = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2 \quad [27] \Leftarrow$$ J_y CONTIENE LE DISTANZE (AL QUADRATO) DALL'ASSE Y: x_i^2 !

- MOMENTO CENTRIFUGO DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO AGLI ASSI X E Y:

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i \quad [28] \Leftarrow$$ J_{xy} CONTIENE I PRODOTTI DELLE DISTANZE (CON SEGNO) DAGLI ASSI X E Y: $y_i \cdot x_i$!

- MOMENTO DI INERZIA POLARE DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTO AL POLO P:

$$J_P = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \quad [29].$$

SI OSSERVA CHE

(1) SE $m_i > 0 \ \forall i$ ALLORA $J_x \geq 0$ ED È $J_x = 0$ SOLO SE TUTTE LE MASSE SONO ALLINEATE SULL'ASSE X (CIOÈ $y_i = 0 \ \forall i$); ANALOGAMENTE $J_y \geq 0$ ED È $J_y = 0$ SOLO SE TUTTE LE MASSE SONO ALLINEATE SULL'ASSE Y, CIOÈ SE $x_i = 0 \ \forall i$

(2) J_{xy} PUÒ ESSERE $\gtrless 0$ ANCHE SE $m_i > 0 \ \forall i$; IN PARTICOLARE LE MASSE COLLOCATE NEL 1° E 3° QUADRANTE DANNO CONTRIBUTO > 0 A J_{xy}, MENTRE LE MASSE COLLOCATE NEL 2° E 4° QUADRANTE DANNO CONTRIBUTO < 0.

(3) $J_p \geq 0$ SE $m_i > 0 \ \forall i$ E $J_p = 0$ SOLO SE LE MASSE SONO TUTTE COLLOCATE NEL POLO; PERALTRO SI OSSERVA CHE, RISULTANDO

$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ È ANCHE $$J_p = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2}_{J_x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2}_{J_y}$$

DA CUI SEGUE $J_p = J_x + J_y$. [30]

(4) DALLE [26], [27] E [29] SEGUONO LE DEFINIZIONI DI RAGGI (O GIRATORI) DI INERZIA DEL SISTEMA DI MASSE RISPETTIVAMENTE RISPETTO ALL'ASSE x, RISPETTO ALL'ASSE y E RISPETTO AL POLO P:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{m}} \Rightarrow \rho_x^2 = \frac{J_x}{m} \qquad [30]$$

$$\rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{m}} \Rightarrow \rho_y^2 = \frac{J_y}{m} \qquad [31]$$

$$\rho_P = \sqrt{\frac{J_P}{m}} \Rightarrow \rho_P^2 = \frac{J_P}{m} \qquad [32]$$

MEDIANTE LE [30] - [32] SI PUÒ DARE SIGNIFICATO FISICO A QUESTE GRANDEZZE OSSERVANDO CHE

$$\rho_x^2 m = J_x \; ; \; \rho_y^2 m = J_y \; ; \; \rho_P^2 m = J_P$$

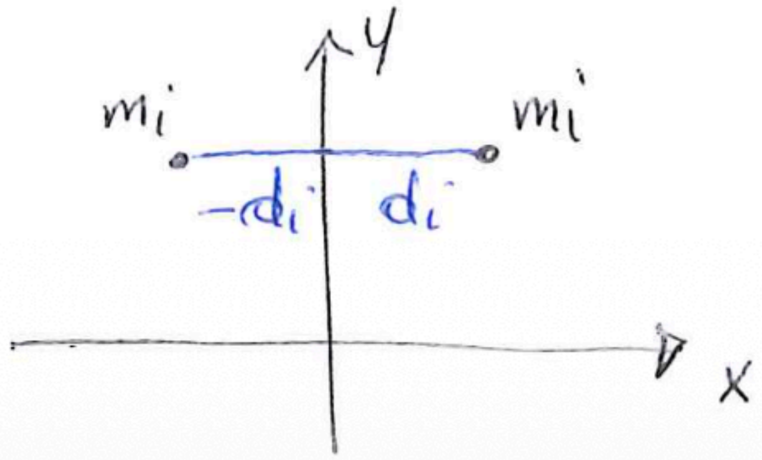
SICCHÉ ρ_x, ρ_y, ρ_P SONO LE DISTANZE (DALL'ASSE x; DALL'ASSE y; DAL POLO P) A CUI SI DEVE "COLLOCARE" LA MASSA TOTALE PER OTTENERE LO STESSO VALORE DI J_x, J_y, J_P RISPETTIVAMENTE.

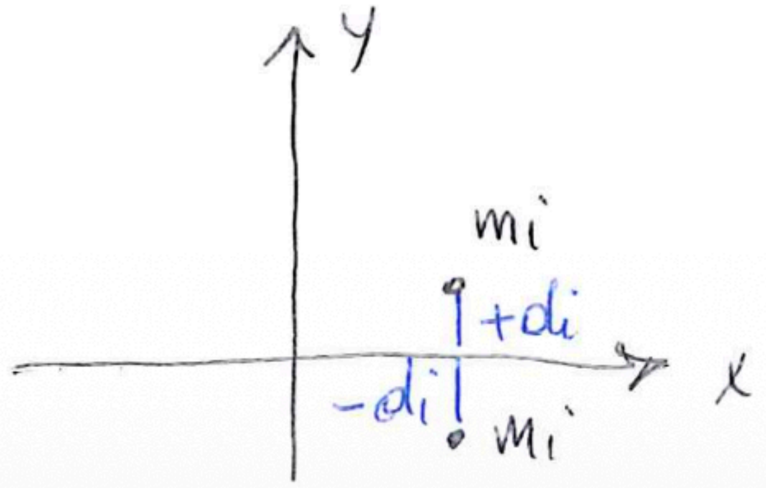
LA [30] E LA [31] SONO LE CONTROPARTI, QUANDO SI OPERA CON I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE, DELLE RELAZIONI CHE LEGANO COORDINATE DEL BARICENTRO E MOMENTI STATICI:

$$x_G = \frac{S_y}{m} \Rightarrow x_G m = S_y$$

$$y_G = \frac{S_x}{m} \Rightarrow y_G m = S_x.$$

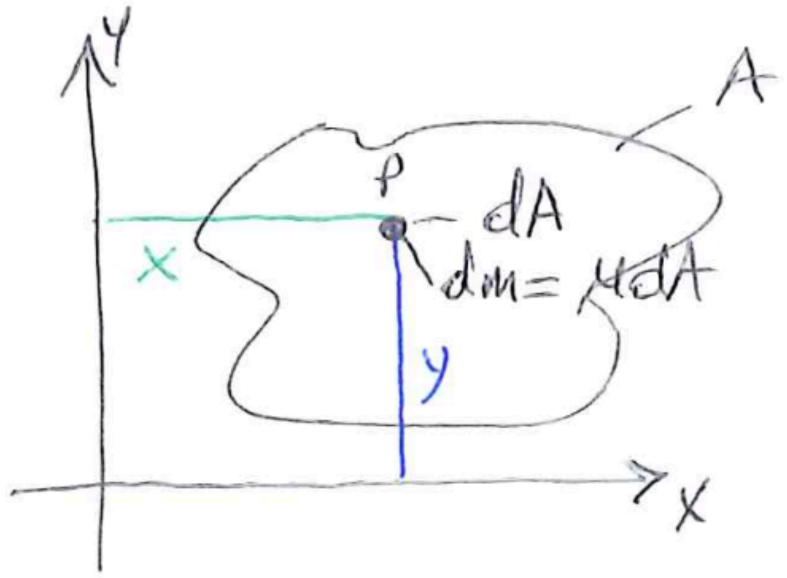
(5) SE IL SISTEMA DI MASSE È TALE CHE L'ASSE y (O L'ASSE x) SIA UN ASSE DI SIMMETRIA, ALLORA A OGNI MASSA m_i COLLOCATA A DISTANZA $+d_i$ DALL'ASSE NE CORRISPONDE SEMPRE UNA, EGUALE, COLLOCATA A DISTANZA $-d_i$: I CONTRIBUTI DI QUESTE MASSE AL MOMENTO CENTRIFUGO SI NEUTRALIZZANO E RISULTA $J_{xy} = 0$.





LA GENERALIZZAZIONE AL CASO DI DISTRIBUZIONI CONTINUE DI MASSA SI OTTIENE PROCEDENDO COME GIA' VISTO NEL CASO DEI MOMENTI DEL PRIMO ORDINE.

LIMITANDOSI, PER SEMPLICITA', ALLE SOLE DISTRIBUZIONI SUPERFICIALI DI MASSA (IL CASO DI DISTRIBUZIONI LINEARI È CONCETTUALMENTE ANALOGO) SI HA:



PRESO UN PUNTO P ($P = (x,y)$) AL QUALE È ASSOCIABILE UN'AREOLA INFINITESIMA dA, SI HA CHE LA CORRISPONDENTE MASSA ELEMENTARE dm VALE

$$dm = \mu(x,y)\, dA \, . \quad [33]$$

LE DEFINIZIONI DI MOMENTI D'INERZIA, CENTRIFUGO E POLARI DIVENGONO ALLORA:

$$J_x = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \mu(x,y)\, dA \quad [34]$$

$$J_y = \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \mu(x,y)\, dA \quad [35]$$

$$J_{xy} = \int_A xy\, dm = \int_A xy\, \mu(x,y)\, dA \quad [36]$$

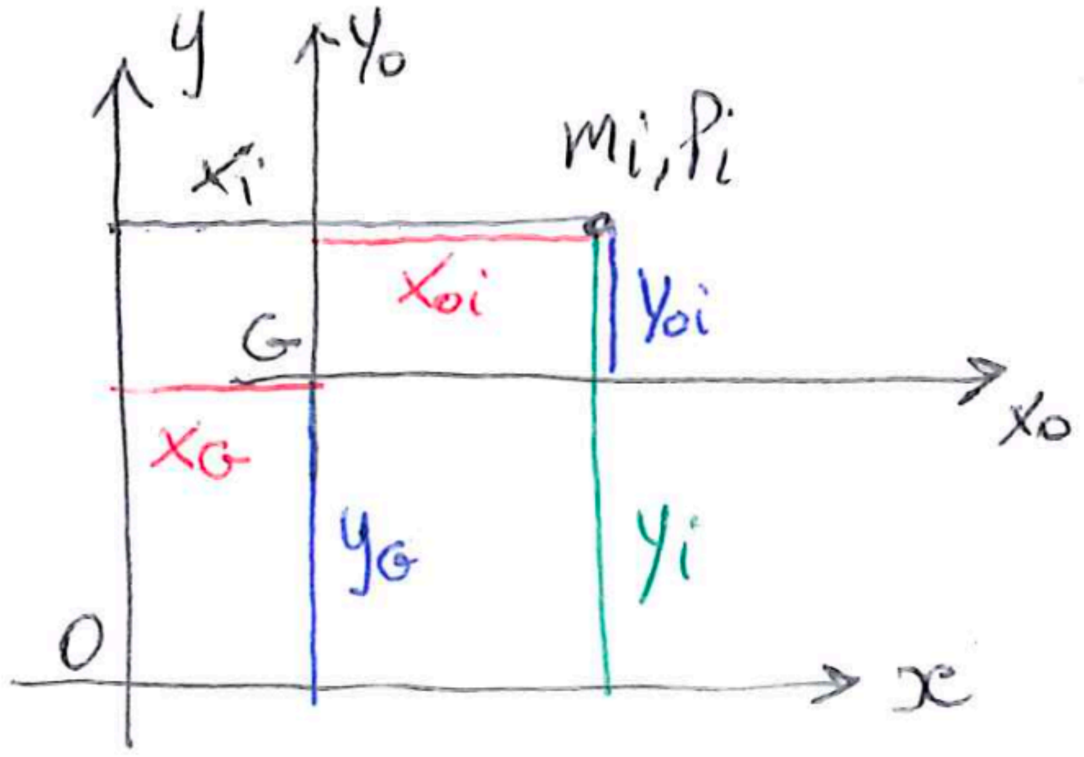
$$J_P = \int_A r^2 dm = \int_A r^2 \mu(x,y)\, dA = \int_A (x^2+y^2)\mu(x,y)\, dA = J_x + J_y \, . \quad [37]$$

TEOREMI DI TRASPORTO

CONSENTONO DI VALUTARE MOMENTI DI INERZIA E CENTRIFUGHI PER SISTEMI DI RIFERIMENTO CARTESIANI ORTOGONALI OTTENUTI PER TRASLAZIONE DEL "NUOVO" SISTEMA RISPETTO AL "VECCHIO".

IN PARTICOLARE DATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO $O-x-y$ ASSUME INTERESSE CONSIDERARE UN NUOVO SISTEMA $G-x_0-y_0$ CON L'ORIGINE COLLOCATA NEL BARICENTRO DEL SISTEMA DI MASSE E GLI ASSI x_0, y_0 PARALLELI AGLI ASSI x, y

CON RIFERIMENTO A SISTEMI DISCRETI DI MASSE (IL CASO DI SISTEMI CONTINUI È DI IMMEDIATA GENERALIZZAZIONE SE SI SOSTITUISCONO LE SOMMATORIE $[\Sigma_i]$ CON LE SOMME INTEGRALI $[\int]$) SI HA IL SEGUENTE LEGAME FRA LE COORDINATE DEL PUNTO P_i NEL S.R. ORIGINALE: $P_i = (x_i; y_i)$ E IN QUELLO MODIFICATO: $P_i = (x_{0i}, y_{0i})$



$$x_i = x_{0i} + x_G$$

$$y_i = y_{0i} + y_G$$

DOVE (x_G, y_G) SONO LE COORDINATE DELL'ORIGINE G DEL NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO RISPETTO AL PRECEDENTE: $G = (x_G, y_G)$. [NEL NUOVO SISTEMA SI HA $G = (0,0)$, OVVIAMENTE].

RISULTA QUINDI:

$$J_x = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_{0i} + y_G)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_{0i}^2 + 2 y_{0i} y_G + y_G^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i y_{0i}^2 + 2 y_G \sum_{i=1}^{N} m_i y_{0i} + y_G^2 \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad [38]$$

MA $\sum_{i=1}^{N} m_i y_{0i}^2 = J_{x_0}$ MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO x_0

$\sum_{i=1}^{N} m_i y_{0i} = S_{x_0} = 0$ POICHÉ IL MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO x_0 È NULLO

$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$ MASSA TOTALE

SI TROVA DUNQUE:

$$J_x = J_{x_0} + M y_G^2 \qquad [39]$$

IN MODO ANALOGO:

$$J_y = J_{y_0} + M x_G^2 \qquad [40]$$

PER IL MOMENTO CENTRIFUGO SI HA INVECE:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_{0i} + x_G)(y_{0i} + y_G) = \sum_{i=1}^{N} (m_i x_{0i} y_{0i} + m_i x_{0i} y_G + m_i x_G y_{0i} + m_i x_G y_G)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i x_{0i} y_{0i} + y_G \sum_{i=1}^{N} m_i x_{0i} + x_G \sum_{i=1}^{N} m_i y_{0i} + x_G y_G \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad [41]$$

MA $\sum_{i=1}^{N} m_i x_{0i} y_{0i} = J_{x_0 y_0}$ MOMENTO CENTRIFUGO RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI x_0, y_0

$\sum_{i=1}^{N} m_i x_{0i} = S_{y_0} = 0$ POICHÉ IL MOMENTO STATICO RISPETTO ALL'ASSE BARICENTRICO y_0 È NULLO

$\sum_{i=1}^{N} m_i y_{0i} = S_{x_0} = 0$ PER LO STESSO MOTIVO SOPRA INDICATO (ASSE x_0 È BARICENTRICO)

$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$ MASSA TOTALE

PERTANTO

$$J_{xy} = J_{x_0 y_0} + M x_G y_G \qquad [41']$$

LE [39], [40], [41'] ESPRIMONO IL TEOREMA DEL TRASPORTO DI HUYGENS.

SI NOTI CHE, SE $m_i \geq 0 \ \forall i$, ALLORA J_{x_0} E J_{y_0} RAPPRESENTANO I MINIMI VALORI CHE I MOMENTI DI INERZIA J_x E J_y POSSONO ASSUMERE IN CORRISPONDENZA DI TUTTI GLI ASSI PARALLELI A QUELLI DATI. INOLTRE, POICHÉ

$$J_{x_0} = J_x - M y_G^2 \, ; \qquad J_{y_0} = J_y - M x_G^2$$

DEVONO SEMPRE RISULTARE, NELL'IPOTESI FATTA, QUANTITÀ ≥ 0, NE SEGUE

CHE I CORRISPONDENTI RAGGI DI INERZIA: 19

$$\rho_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{M}} = \sqrt{\frac{J_x}{M} - y_G^2} = \sqrt{\rho_x^2 - y_G^2} \qquad [42]$$

$$\rho_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{M}} = \sqrt{\frac{J_y}{M} - x_G^2} = \sqrt{\rho_y^2 - x_G^2} \qquad [43]$$

ASSUMONO IL MINIMO VALORE POSSIBILE IN CORRISPONDENZA DI ASSI BARICENTRICI, PER I QUALI SI HA $y_G = 0$; $x_G = 0$.

$$\rho_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{M}} = \sqrt{\frac{J_x}{M} - y_G^2} = \sqrt{\rho_x^2 - y_G^2} \qquad [42]$$

$$\rho_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{M}} = \sqrt{\frac{J_y}{M} - x_G^2} = \sqrt{\rho_y^2 - x_G^2} \qquad [43]$$

LE [42] - [43] RIVELANO CHE PER OGNI COPPIA DI ASSI x, y NON BARICENTRICI È SEMPRE

$$\begin{cases} \rho_x^2 \geq y_G^2 \\ \rho_y^2 \geq x_G^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_x \geq y_G \\ \rho_y \geq x_G \end{cases}$$

SICCHÉ IL PUNTO P^* NEL QUALE SI DEVE CONCENTRARE LA MASSA TOTALE M PER OTTENERE LO STESSO VALORE DEI MOMENTI DI INERZIA J_x, J_y:

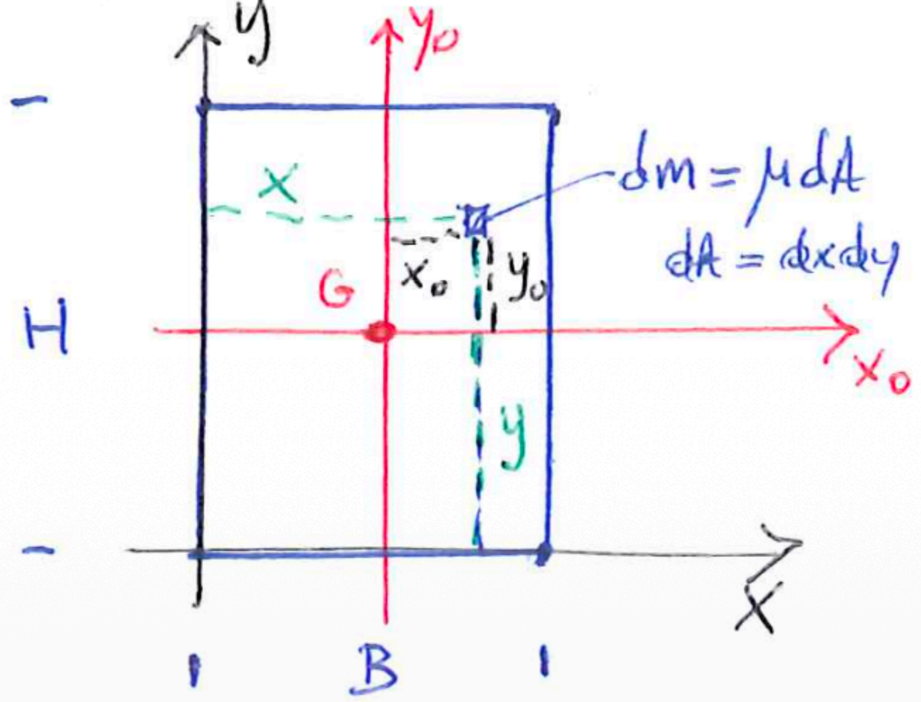
$$\begin{aligned} J_x &= M \rho_x^2 \\ J_y &= M \rho_y^2 \end{aligned} \Rightarrow P^* = (\rho_y, \rho_x)$$

[IN QUESTO ORDINE: J_x CONTIENE LE COORDINATE y DEL SISTEMA DI MASSE E J_y LE COORDINATE x!

È <u>PIÙ DISTANTE</u> DAGLI ASSI x, y DEL BARICENTRO $G = (x_G, y_G)$

UNICA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

i) SEZIONE RETTANGOLARE DI LATI B (BASE) E H (ALTEZZA)



PER QUANTO GIA' NOTO RISULTA

$$M = A = BH$$ ← OMOGENEA A $[L^2]$

OMOGENEE A $[L]$

$$x_G = \frac{B}{2}, \quad y_G = \frac{H}{2} \Rightarrow G = \left(\frac{B}{2}, \frac{H}{2}\right)$$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x_0, y_0 È $G = (0,0)$.

$$J_x = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \mu \, dA = \underset{\mu}{\overset{}{1}} \int_A y^2 dA = \int_0^B dx \int_0^H y^2 dy = \int_0^B \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^H dx = \frac{H^3}{3}\int_0^B 1 dx = \frac{H^3}{3}[x]_0^B$$

20

PERTANTO: $\boxed{J_x = \frac{BH^3}{3}}$ [44] ← OMOGENEO A $[L^4]$

$$J_y = \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \mu \, dA = \underset{\mu}{1} \cdot \int_A x^2 dA = \int_0^B x^2 dx \int_0^H 1 \, dy = \int_0^B [y]_0^H x^2 dx = H\int_0^B x^2 dx = H\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^B$$

DUNQUE: $\boxed{J_y = \frac{B^3 H}{3}}$ [45] ← OMOGENEO A $[L^4]$

$$J_{xy} = \int_A xy \, dm = \int_A xy\mu \, dA = \underset{\mu}{1} \cdot \int_A xy \, dA = \int_0^B x \, dx \int_0^H y \, dy = \int_0^B \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H x \, dx = \frac{H^2}{2}\int_0^B x \, dx = \frac{H^2}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^B$$

E QUINDI $\boxed{J_{xy} = \frac{B^2 H^2}{4}}$ [46] ← OMOGENEO A $[L^4]$.

PASSANDO AGLI ASSI BARICENTRICI È CONVENIENTE UTILIZZARE IL TEOREMA DI HUYGENS PER CALCOLARE J_{x_0}, J_{y_0} E $J_{x_0 y_0}$; SI LASCIA COME VERIFICA CALCOLARE LE SUDDETTE QUANTITÀ MEDIANTE GLI INTEGRALI, TENENDO CONTO CHE IN QUESTO CASO CAMBIANO GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE: SE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO xy SI HA, PER ESEMPIO CHE

$$M = \int_A dm = \int_A \mu\, dA = \underset{\mu}{1} \cdot \int_A dA = \int_0^B dx \int_0^H dy = \int_0^B [y]_0^H dx = H[x]_0^B = BH$$

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x_0, y_0 È INVECE:

$$M = \int_A dm = \int_A \mu\, dA = \underset{\mu}{1} \cdot \int dA = \int_{-B/2}^{B/2} dx \int_{-H/2}^{H/2} dy = \int_{-B/2}^{B/2} [y]_{-H/2}^{H/2} dx = H[x]_{-B/2}^{B/2} = BH.$$

E COSÌ VIA.

PASSANDO AGLI ASSI BARICENTRICI E' CONVENIENTE UTILIZZARE IL TEOREMA DI HUYGENS PER CALCOLARE J_{x_0}, J_{y_0} E $J_{x_0y_0}$; SI LASCIA COME VERIFICA CALCOLARE LE SUDDETTE QUANTITA' MEDIANTE GLI INTEGRALI, TENENDO CONTO CHE IN QUESTO CASO CAMBIANO GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE: SE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO xy SI HA, PER ESEMPIO CHE

PER IL TEOREMA DEL TRASPORTO RISULTA:

$$J_x = J_{x_0} + M\, y_G^2 \Rightarrow J_{x_0} = J_x - M y_G^2 \Rightarrow J_{x_0} = \frac{BH^3}{3} - BH\left(\frac{H}{2}\right)^2$$

NE SEGUE IMMEDIATAMENTE $\quad J_{x_0} = \frac{BH^3}{3} - \frac{BH^3}{4} \Rightarrow \boxed{J_{x_0} = \frac{BH^3}{12}} \quad [47]$

$$J_y = J_{y_0} + M\, x_G^2 \Rightarrow J_{y_0} = J_y - M x_G^2 \Rightarrow J_{y_0} = \frac{B^3H}{3} - BH\left(\frac{B}{2}\right)^2$$

DA CUI SEGUE: $\quad J_{y_0} = \frac{B^3H}{3} - \frac{B^3H}{4} \Rightarrow \boxed{J_{y_0} = \frac{B^3H}{12}} \quad [48]$

21

$$J_{xy} = J_{x_0y_0} + M\, x_G y_G \Rightarrow J_{x_0y_0} = J_{xy} - M x_G y_G \Rightarrow J_{x_0y_0} = \frac{B^2H^2}{4} - BH\left(\frac{B}{2}\right)\left(\frac{H}{2}\right)$$

E PERTANTO

$$J_{x_0y_0} = \frac{B^2H^2}{4} - \frac{B^2H^2}{4} \Rightarrow \boxed{J_{x_0y_0} = 0} \quad [49].$$

IN TERMINI DI RAGGI D'INERZIA SI HA, PER LE [44], [47] E PER LE [45], [48]:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{BH^3}{3}}{BH}} = \frac{H}{\sqrt{3}} \; ; \quad \rho_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{BH^3}{12}}{BH}} = \frac{H}{\sqrt{12}} = \frac{H}{2\sqrt{3}}$$

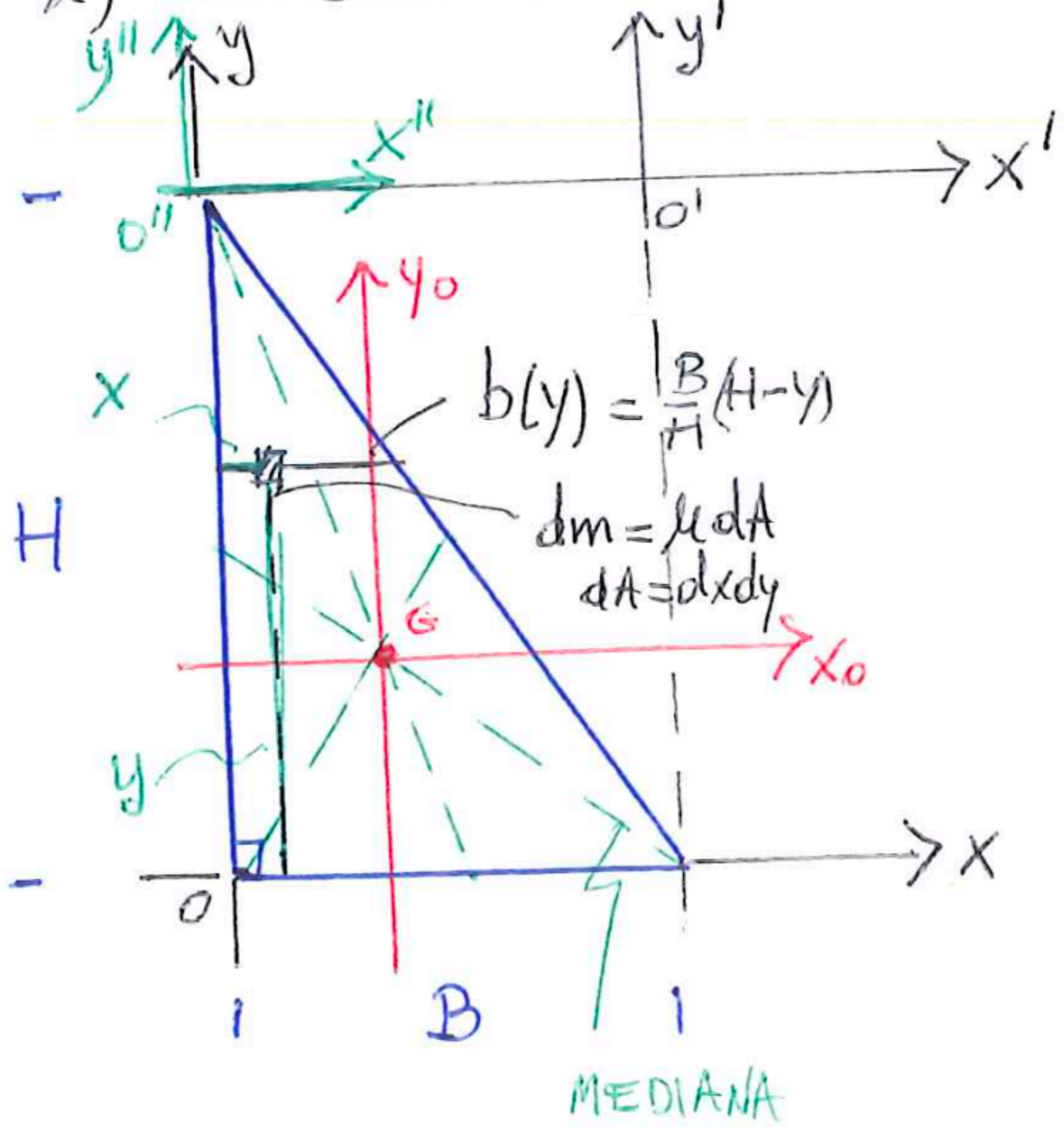
$$\rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{B^3H}{3}}{BH}} = \frac{B}{\sqrt{3}} \; ; \quad \rho_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{B^3H}{12}}{BH}} = \frac{B}{\sqrt{12}} = \frac{B}{2\sqrt{3}}$$

QUINDI NEL CASO SPECIFICO $J_{x_0} = \frac{1}{4} J_x \Rightarrow \rho_{x_0} = \frac{1}{2} \rho_x \; ; \; J_{y_0} = \frac{1}{4} J_y \Rightarrow \rho_{y_0} = \frac{1}{2} \rho_y$.

PER QUANTO RIGUARDA $J_{x_0y_0}$ IL RISULTATO È PLAUSIBILE POICHÉ ENTRAMBI GLI ASSI x_0 E y_0 SONO DI SIMMETRIA PER LA FIGURA (IN REALTÀ NE BASTEREBBE UNO SOLO) E DUNQUE NECESSARIAMENTE, PER QUANTO GIÀ VISTO, $J_{x_0y_0} = 0$.

IL RISULTATO PUÒ ESSERE ULTERIORMENTE GIUSTIFICATO SE SI OSSERVA CHE LA FIGURA SI ESTENDE IN MISURA EGUALE IN TUTTI E QUATTRO I QUADRANTI INDIVIDUATI DAGLI ASSI x_0 E y_0; PERTANTO I CONTRIBUTI POSITIVI DOVUTI AL 1° E 3° QUADRANTE VENGONO NEUTRALIZZATI DAI CORRISPONDENTI CONTRIBUTI NEGATIVI DEL 2° E 4° QUADRANTE.

2) SEZIONE A FORMA DI TRIANGOLO RETTANGOLO DI BASE B E ALTEZZA H.



PER QUANTO GIÀ NOTO RISULTA:

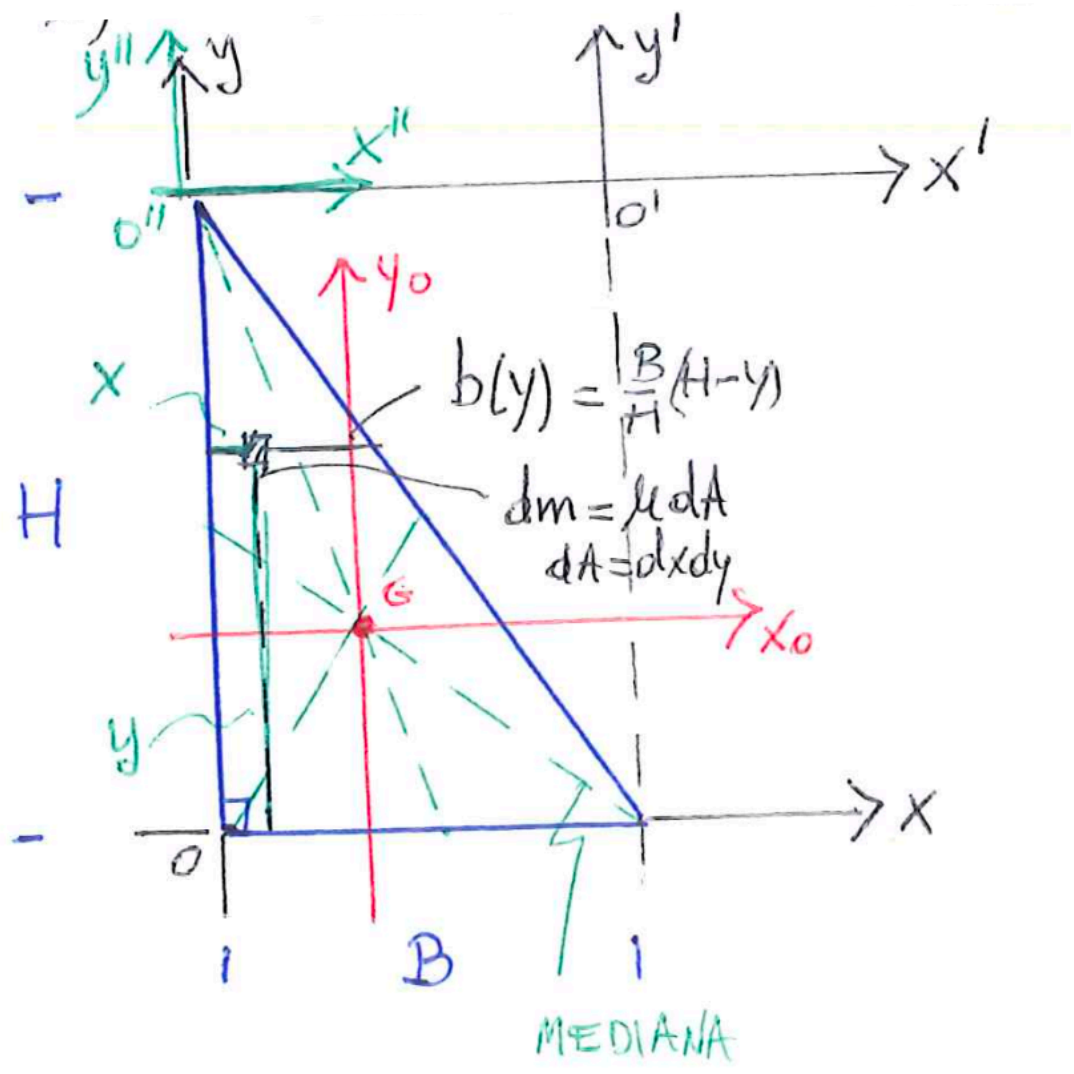
$$M = A = \frac{1}{2} BH$$

$$x_G = \frac{B}{3}, \quad y_G = \frac{H}{3} \Rightarrow G = \left(\frac{B}{3}, \frac{H}{3}\right) \text{ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO } (x, y)$$

È INVECE $G = (0,0)$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x_0, y_0

E $G = \left(-\frac{2}{3}B, -\frac{2}{3}H\right)$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO x', y'.

CON GLI ASSI CHE CONTORNANO I VERTICI DEL TRIANGOLO CON ANGOLI ACUTI.



PER ESEGUIRE LE INTEGRAZIONI, SI OSSERVA CHE TUTTI GLI ASSI PARALLELI A X CHE INTERSECANO LA FIGURA PRODUCONO TRIANGOLI SIMILI, LA CUI BASE b(y) SI OTTIENE CON LA SEGUENTE PROPORZIONE: $\frac{B}{H} = \frac{b(y)}{H-y}$, SICCHÉ $b(y) = \frac{B}{H}(H-y)$. SI OTTIENE PERCIÒ:

$$I_x = \int_A y^2 dm = \int_A y^2 \mu\, dA = \underset{\mu}{1} \cdot \int_A y^2 dA = \int_0^H y^2 \left[\int_0^{B\frac{H-y}{H}} 1 \cdot dx\right] dy = \int_0^H y^2 \left[x\right]_0^{B\frac{H-y}{H}} dy = \int_0^H B\frac{H-y}{H} y^2 dy$$

$$I_x = \frac{B}{H}\int_0^H (Hy^2 - y^3)\, dy = \frac{B}{H}\left[\frac{Hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^H = \frac{B}{H}\left[\frac{H^4}{3} - \frac{H^4}{4}\right] = \frac{B}{\cancel{H}} \frac{H^{\cancel{4}3}}{12} \Rightarrow \boxed{I_x = \frac{BH^3}{12}} \quad [50]$$

$$I_y = \int_A x^2 dm = \int_A x^2 \mu\, dA = \underset{\mu}{1} \cdot \int_A x^2 dA = \int_0^H 1 \cdot \left[\int_0^{B\frac{H-y}{H}} x^2 dx\right] dy = \int_0^H \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{B\left(\frac{H-y}{H}\right)} dy = \int_0^H \frac{B^3 (H-y)^3}{3\, H^3} dy$$

$$I_y = \frac{B^3}{3H^3}\int_0^H (H-y)^3 dy = \frac{B^3}{3H^3}\left[\frac{[H-y]^4}{-4}\right]_0^H = \frac{B^3}{3H^3}\left(0 + \frac{H^4}{4}\right) = \frac{B^3 H^{\cancel{4}}}{12 \cancel{H^3}} \Rightarrow \boxed{I_y = \frac{B^3 H}{12}} \quad [51]$$

$$I_{xy} = \int_A xy\, dm = \int_A xy \mu\, dA = \underset{1}{1} \cdot \int_A xy\, dA = \int_0^H y \left[\int_0^{B\frac{H-y}{H}} x\, dx\right] dy = \int_0^H y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{B}{H}(H-y)} dy = \int_0^H \frac{B^2}{2H^2}(H-y)^2 y\, dy$$

$$I_{xy} = \frac{B^2}{2H^2}\int_0^H (H^2 y - 2Hy^2 + y^3)\, dy = \frac{B^2}{2H^2}\left[\frac{H^2 y^2}{2} - \frac{2Hy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^H = \frac{B^2}{2H^2}\left(\frac{H^4}{2} - \frac{2}{3}H^4 + \frac{H^4}{4}\right) = \frac{B^2 H^{\cancel{4}2}}{2\cancel{H^2}}\left(\frac{6-8+3}{12}\right)$$

$$I_{xy} = \frac{B^2 H^2}{2} \cdot \frac{9-8}{12} \Rightarrow \boxed{I_{xy} = \frac{B^2 H^2}{24}} \quad [52]$$

PER IL CALCOLO DEI MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI RISULTA IN QUESTO CASO ESTREMAMENTE UTILE RICORRERE AL TEOREMA DI HUYGENS, STANTE LA COMPLICAZIONE DI DEFINIRE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE NEL CALCOLO DIRETTO.

RISULTA, PER QUANTO GIÀ VISTO:

$$J_{x_0} = J_x - M y_G^2 \Rightarrow J_{x_0} = \frac{BH^3}{12} - \frac{BH}{2}\left(\frac{H}{3}\right)^2 = \frac{BH^3}{12} - \frac{BH^3}{18} = \frac{3-2}{36} BH^3$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{x_0} = \frac{BH^3}{36}} \qquad [53]$$

$$J_{y_0} = J_y - M x_G^2 \Rightarrow J_{y_0} = \frac{B^3H}{12} - \frac{BH}{2}\left(\frac{B}{3}\right)^2 = \frac{B^3H}{12} - \frac{B^3H}{18} = \frac{3-2}{36} B^3H$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{y_0} = \frac{B^3H}{36}} \qquad [54]$$

$$J_{x_0y_0} = J_{xy} - M(x_G)(y_G) \Rightarrow J_{x_0y_0} = \frac{B^2H^2}{24} - \frac{BH}{2}\left(\frac{B}{3}\right)\left(\frac{H}{3}\right) = \frac{B^2H^2}{24} - \frac{B^2H^2}{18} = \frac{3-4}{72} B^2H^2$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{x_0y_0} = -\frac{B^2H^2}{72}} \qquad [55]$$

PER CALCOLARE I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI x',y' SI USA ANCORA IL TEOREMA DI HUYGENS:

$$J_{x'} = J_{x_0} + M(y'_G)^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{BH}{2}\left(-\frac{2}{3}H\right)^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{BH}{2}\left(\frac{4}{9}H^2\right) = \frac{BH^3}{36} + \frac{4BH^3}{18} = \frac{\overbrace{1+8}^{\cancel{9}\,1}}{\cancel{36}\,4}BH^3$$

QUINDI $\boxed{J_{x'} = \frac{BH^3}{4}}$ [56]

$$J_{y'} = J_{y_0} + M(x'_G)^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{BH}{2}\left(-\frac{2}{3}B\right)^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{4}{18}B^3H = \frac{1+8}{36}B^3H = \frac{\cancel{9}\,1}{\cancel{36}\,4}B^3H$$

DUNQUE $\boxed{J_{y'} = \frac{B^3H}{4}}$ [57]

$$J_{x'y'} = J_{x_0y_0} + M(x'_G)(y'_G) = -\frac{B^2H^2}{72} + \frac{BH}{2}\left(-\frac{2}{3}B\right)\left(-\frac{2}{3}H\right) = -\frac{B^2H^2}{72} + \frac{B^2H^2}{18}\cdot 4 = \frac{\overbrace{-1+16}^{\cancel{15}\,5}}{\cancel{72}\,24}B^2H^2$$

PERTANTO $\boxed{J_{x'y'} = +\frac{5}{24}B^2H^2}$ [58]

NOTA 4: SI OSSERVI CHE PER APPLICARE IL TEOREMA DI HUYGENS PER DETERMINARE I MOMENTI DI INERZIA RISPETTO A NUOVI ASSI (PER ESEMPIO x', y') OCCORRE CONOSCERE I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI x_0, y_0.

SE SI VOLESSERO DETERMINARE I VALORI DI $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{x'y'}$ A PARTIRE DAI VALORI DI J_x, J_y, J_{xy}, CON x E y ASSI NON BARICENTRICI NON SI POSSONO USARE LE [38], [39], [40] NELLE QUALI I CONTRIBUTI DEI MOMENTI STATICI S_{x_0}, S_{y_0} SONO STATI ELIMINATI SOLO PERCHE' GLI ASSI SONO BARICENTRICI.

NEL CASO GENERALE, SE LE COORDINATE DELL'ORIGINE O' DEGLI ASSI x', y' RISPETTO AGLI ASSI x, y SONO $O' = (x_{0'}, y_{0'})$ LA ESPRESSIONE GENERALE DEL TEOREMA DEL TRASPORTO DIVIENE:

$$J_x = J_{x'} + 2\, y_{0'} S_{x'} + (y_{0'})^2 M \quad [59]$$

E ANALOGHE ESPRESSIONI PER J_y, J_{xy}.

IN QUANTO
$$x_i = x_i' + x_{0'}$$
$$y_i = y_i' + y_{0'}$$

NELLA [59] COMPARE ESPLICITAMENTE IL MOMENTO STATICO DELLA FIGURA RISPETTO ALLO ASSE x!

ANALOGAMENTE AL CASO ORA ANALIZZATO, SE SI VOLESSERO CALCOLARE I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE $J_{x''}$, $J_{y''}$, $J_{x''y''}$ RISPETTO AGLI ASSI x'', y'', RISPETTO AI QUALI

LE COORDINATE DEL BARICENTRO $G=(x''_G, y''_G)$ VALGONO: $G=\left(\frac{B}{3}, -\frac{2}{3}H\right)$ SI TROVEREBBE

$$J_{x''} = J_{x_0} + M(y''_G)^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{BH}{2}\left(-\frac{2}{3}H\right)^2 = \frac{BH^3}{36} + \frac{4BH^3}{18} = \frac{1+8}{36}BH^3 = \frac{\cancel{9}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,4}}BH^3$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{x''} = \frac{BH^3}{4}} \quad [60]$$

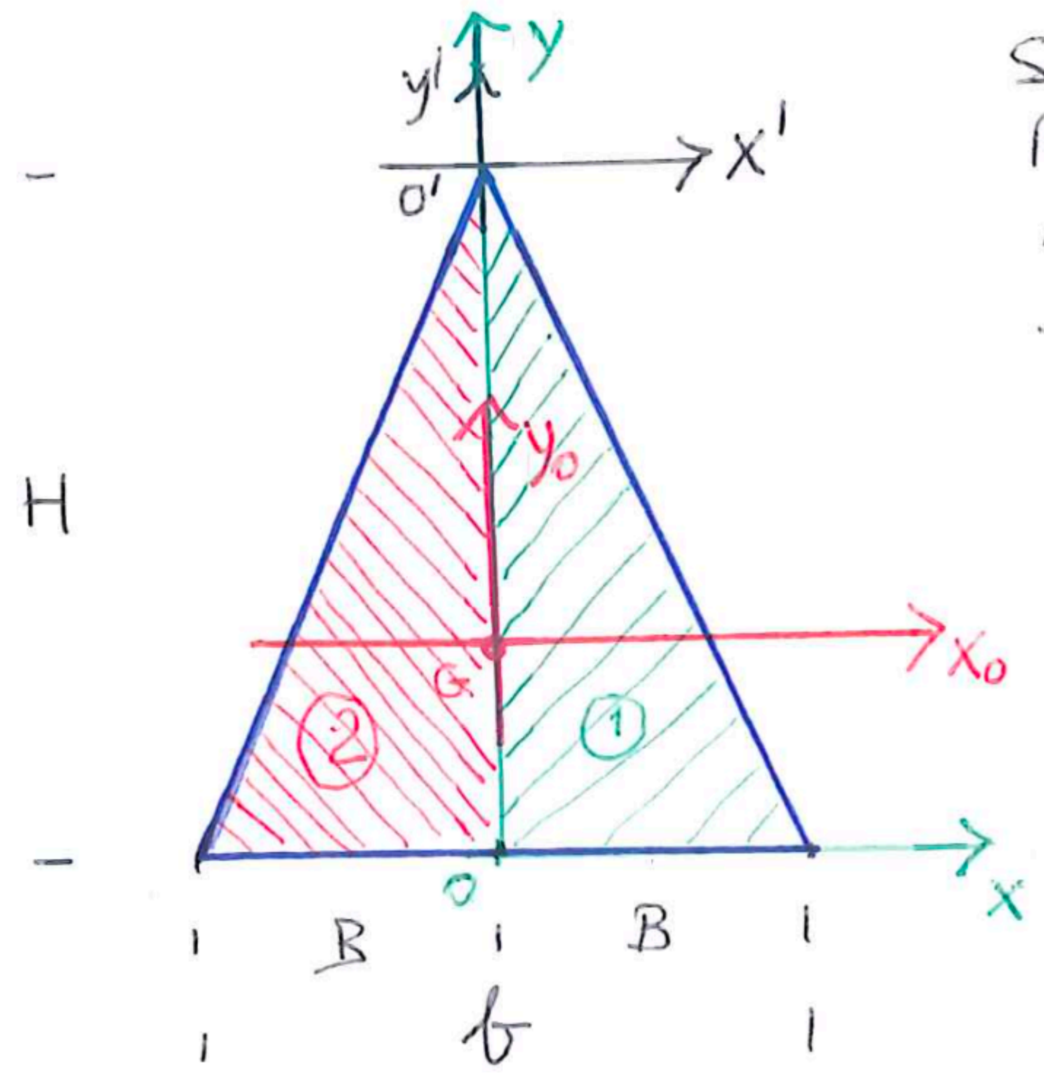
$$J_{y''} = J_{y_0} + M(x''_G)^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{BH}{2}\cdot\left(\frac{B}{3}\right)^2 = \frac{B^3H}{36} + \frac{B^3H}{18} = \frac{1+2}{36}B^3H = \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,12}}B^3H$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{y''} = \frac{B^3H}{12}} \quad [61]$$

$$J_{x''y''} = J_{x_0y_0} + M(x''_G)(y''_G) = -\frac{B^2H^2}{72} + \frac{BH}{2}\left(\frac{B}{3}\right)\left(-\frac{2H}{3}\right) = -\frac{B^2H^2}{72} - \frac{2B^2H^2}{18} = \frac{\overbrace{-1-8}^{-\cancel{9}\,1}}{\cancel{72}_{\,8}}B^2H^2$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{x''y''} = -\frac{B^2H^2}{8}} \quad [62]$$

3) SEZIONE PIANA A FORMA DI TRIANGOLO ISOSCELE DI BASE $b = 2B$ E DI ALTEZZA H. $(\mu=1)$



SI RICONOSCE CHE LA FIGURA È SCOMPONIBILE IN 2 TRIANGOLI RETTANGOLI, DI BASE $B = b/2$ E ALTEZZA H, ACCOSTATI LUNGO L'ALTEZZA.

TENUTO CONTO CHE LE COORDINATE DEL BARICENTRO G VALGONO NEI 3 SISTEMI DI RIFERIMENTO x, y ; x_0, y_0 ; x', y' :

$$\begin{cases} G = (x_G, y_G) = \left(0, \frac{H}{3}\right) \\ G = (x_{0G}, y_{0G}) = (0, 0) \\ G = (x'_G, y'_G) = \left(0, -\frac{2}{3}H\right) \end{cases}$$

E CHE $M = \dfrac{bH}{2}$

SI RICAVA AGEVOLMENTE DALLE [50], [51], [52]:

$$J_x = 2 \cdot \frac{BH^3}{12} = \frac{(2B)H^3}{12} = \frac{bH^3}{12} \Rightarrow \boxed{J_x = \frac{bH^3}{12}} \quad [63]$$

$$J_y = 2 \cdot \frac{B^3 H}{12} = \frac{2\left(\frac{b}{2}\right)^3 H}{12} = \frac{\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} b^3 H}{12} \Rightarrow \boxed{J_y = \frac{b^3 H}{48}} \quad [64]$$

$$J_{xy} = \frac{B^2H^2}{24} - \frac{B^2H^2}{24} = 0 \Rightarrow \boxed{J_{xy} = 0} \quad [65]$$

IL TRIANGOLO RETTANGOLO (2) È NEL 2° QUADRANTE!

APPLICANDO IL TEOREMA DI HUYGENS SI TROVA QUINDI:

$$I_{x_0} = I_x - M y_G^2 = \frac{bH^3}{12} - \frac{bH}{2}\left(\frac{H}{3}\right)^2 = \frac{bH^3}{12} - \frac{bH^3}{18} = \frac{3-2}{36}\, bH^3 \Rightarrow \boxed{I_{x_0} = \frac{bH^3}{36}} \quad [66]$$

$$I_{y_0} = I_y - M x_G^2 = \frac{b^3H}{48} - \frac{bH}{2}\cdot 0^2 = \frac{b^3H}{48} \Rightarrow \boxed{I_{y_0} = \frac{b^3H}{48}} \quad [67]$$

$$I_{x_0y_0} = I_{xy} - M x_G \cdot y_G = 0 - \frac{bH}{2}\cdot 0 \cdot \frac{H}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{I_{x_0y_0} = 0} \quad [68]$$

SE SI VALUTANO INVECE I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI X', Y':

$$I_{x'} = I_{x_0} + M(y_G')^2 = \frac{bH^3}{36} + \frac{bH}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}H\right)^2 = \frac{bH^3}{36} + \frac{4}{18}\, bH^3 = \frac{1+8}{36}\, bH^3 = \frac{\cancel{9}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,4}}\, bH^3$$

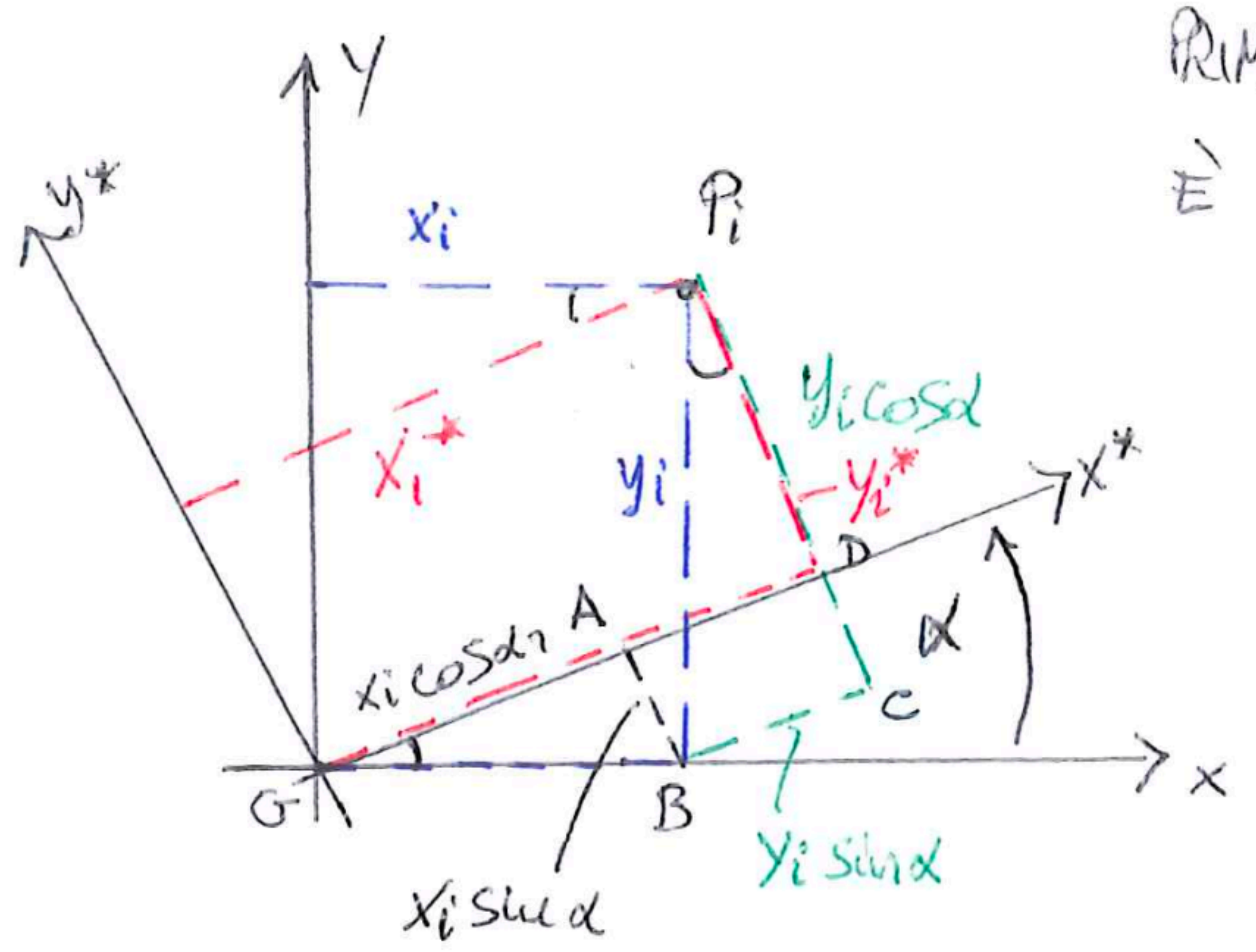
PERTANTO: $\boxed{I_{x'} = \frac{bH^3}{4}}$ [69]

$$I_{y'} = I_{y_0} + M(x_G')^2 = \frac{b^3H}{48} + \frac{bH}{2}\cdot 0^2 = \frac{b^3H}{48} \Rightarrow \boxed{I_{y'} = \frac{b^3H}{48}} \quad [70]$$

$$I_{x'y'} = I_{x_0y_0} + M\, x_G' y_G' = 0 + \frac{bH}{2}\cdot 0 \cdot\left(-\frac{2}{3}H\right) = 0 \Rightarrow \boxed{I_{x'y'} = 0} \quad [71].$$

LEGGE DI VARIAZIONE DEI MOMENTI DEL SECONDO ORDINE PER ROTAZIONI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

SI CONSIDERANO 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO, ENTRAMBI CENTRATI SUL BARICENTRO G E INDIVIDUATI L'UNO DAGLI ASSI x, y (SAREBBERO GLI ASSI x_0 E y_0 UTILIZZATI IN PRECEDENZA: PER PRATICITA' DI SCRITTURA SI TRALASCIA L'INDICE "0"), L'ALTRO DAGLI ASSI x^* E y^*, RUOTATI DI UN ANGOLO α RISPETTO AI PRECEDENTI.



SE LE COORDINATE DI UN PUNTO P_i SONO $P_i = (x_i, y_i)$ NEL PRIMO SISTEMA DI RIFERIMENTO E $P_i = (x_i^*, y_i^*)$ NEL SECONDO, È AGEVOLE VERIFICARE CHE VALGONO QUESTE RELAZIONI:

$$\overline{P_iC} = y_i \cos\alpha$$
$$\overline{BC} = y_i \sin\alpha = \overline{AD}$$
$$\overline{GA} = x_i \cos\alpha$$
$$\overline{AB} = x_i \sin\alpha = \overline{DC}$$

$$\overline{P_iD} = y_i^* = \overline{P_iC} - \overline{DC} = y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha$$
$$\overline{DG} = x_i^* = \overline{GA} + \overline{AD} = x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha$$

PERTANTO FRA LE COORDINATE x_i^*, y_i^* E LE COORDINATE x_i, y_i SUSSISTONO QUESTI LEGAMI:

$$\begin{cases} x_i^* = x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha \\ y_i^* = -x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha \end{cases} \qquad [87]$$

I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI SONO DATI, NEL CASO DI MASSE DISCRETE (NEL CASO DI MASSE DISTRIBUITE CON CONTINUITA' LA GENERALIZZAZIONE È SEMPLICE, RICHIEDENDO SOLO DI SOSTITUIRE LE SOMMATORIE CON SOMME INTEGRALI E LE MASSE PUNTIFORMI m_i CON LA DISTRIBUZIONE CONTINUA $\mu(x,y)$ [O $\mu(s)$]):

$$J_x = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2 \qquad [88]$$

$$J_y = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2 \qquad [89]$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i \qquad [90]$$

QUELLI RISPETTO AI NUOVI ASSI x^*, y^* SONO ANALOGAMENTE COSÌ DEFINITI:

$$J_{x^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^{*2} = \sum_{i=1}^{N} m_i (-x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha)^2 \qquad [91]$$

$$J_{y^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^{*2} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha)^2 \qquad [92]$$

$$J_{x^*y^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^* y_i^* = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha)(-x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha) \qquad [93]$$

SE ORA SI ESPANDONO LE [91] - [93] (OTTENUTE SFRUTTANDO LE 87) SI GIUNGE A ESPRIMERE I MOMENTI DEL 2° ORDINE NEL SISTEMA RUOTATO IN FUNZIONE DI J_x, J_y, J_{xy}

PROCEDENDO SI TROVA:

31

$$J_{x^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 \sin^2\alpha + y_i^2 \cos^2\alpha - 2 x_i y_i \sin\alpha \cos\alpha\right)$$

$$J_{y^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 \cos^2\alpha + y_i^2 \sin^2\alpha + 2 x_i y_i \sin\alpha \cos\alpha\right)$$

$$J_{x^*y^*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(-x_i^2 \sin\alpha\cos\alpha + y_i^2 \sin\alpha\cos\alpha + [x_i y_i](\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right)$$

OVVERO:

$$J_{x^*} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2\right) \sin^2\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2\right) \cos^2\alpha - 2\left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i\right) \sin\alpha\cos\alpha$$

$$J_{y^*} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2\right) \cos^2\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2\right) \sin^2\alpha + 2\left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right) \sin\alpha\cos\alpha$$

$$J_{x^*y^*} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2\right) \sin\alpha\cos\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2\right) \sin\alpha\cos\alpha + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i\right) (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

DA QUI, TENENDO CONTO DELLE [88] - [90] SI RICAVA:

$$J_{x^*} = J_y \sin^2\alpha + J_x \cos^2\alpha - 2 J_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \quad [91']$$

$$J_{y^*} = J_y \cos^2\alpha + J_x \sin^2\alpha + 2 J_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \quad [92']$$

$$J_{x^*y^*} = - J_y \sin\alpha \cos\alpha + J_x \sin\alpha \cos\alpha + J_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad [93']$$

D'ALTRA PARTE PER LE [*], [**] DI PAG. 26 E PER NOTE RELAZIONI TRIGONOMETRICHE SI HA:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \quad \cos^2 2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \quad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha; \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

SI ARRIVA A RISCRIVERE LE [91'] - [93'] IN QUESTA FORMA:

$$J_{x^*} = J_y \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) + J_x (1+\cos 2\alpha) - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{y^*} = J_y \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) + J_x (1-\cos 2\alpha) + J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{x^*y^*} = -\frac{1}{2} J_y \sin 2\alpha + \frac{1}{2} J_x \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

SI ARRIVA A RISCRIVERE LE [91']-[93'] IN QUESTA FORMA:

$$J_{x^*} = J_y \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) + J_x (1+\cos 2\alpha) - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{y^*} = J_y \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) + J_x (1-\cos 2\alpha) + J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{x^*y^*} = -\frac{1}{2} J_y \sin 2\alpha + \frac{1}{2} J_x \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

OVVERO ANCHE, RIORDINANDO I TERMINI:

$$J_{x^*} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \quad [94]$$

$$J_{y^*} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \quad [95]$$

$$J_{x^*y^*} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \quad [96]$$

LE [94]-[96] PERMETTONO DI DETERMINARE IMMEDIATAMENTE, NOTI J_x, J_y, J_{xy} E L'ANGOLO DI ROTAZIONE α, I NUOVI VALORI DEI MOMENTI DEL 2° ORDINE: J_{x^*}, J_{y^*}, $J_{x^*y^*}$.

NOTA 5: SI OSSERVI CHE LA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE ESPRESSA DALLE [87], QUANDO LA SI RISCRIVE IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{Bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \qquad [87']$$

ALTRO NON RAPPRESENTA CHE UNA ROTAZIONE RIGIDA FINITA.
SE SI OSSERVA INFATTI CHE $\begin{Bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{Bmatrix}$ ALTRO NON E' CHE IL VETTORE POSIZIONE DEL PUNTO P_i NEL "NUOVO" SISTEMA DI RIFERIMENTO, SICCHÉ $P_i=(x_i^*, y_i^*)=P_i^*$ E DUNQUE $(\vec{P_i^*-G})$ MENTRE $\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}$ ALTRO NON E' CHE IL VETTORE POSIZIONE DEL MEDESIMO PUNTO P_i NEL "VECCHIO" SISTEMA DI RIFERIMENTO, $P_i(x_i, y_i)=P_i$ E DUNQUE $(\vec{P_i-G})$ SI PUÒ RISCRIVERE LA [87'] COME

$$(\vec{P^*-G}) = \underline{\underline{R}}'(\vec{P-G}) \qquad [87'']$$

DOVE IL TENSORE DI ROTAZIONE $\underline{\underline{R}}'$ È DEFINITO DALLA MATRICE $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

QUESTO DIFFERISCE DA $\underline{\underline{R}}$ DEFINITO NELLA LEZIONE 14, PAG. 2 PERCHÉ IN QUESTO CASO NON È IL VETTORE CHE RUOTA MA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO, ED È AGEVOLE RICONOSCERE CHE $\underline{\underline{R}}' = \underline{\underline{R}}^T$ CIOÈ È IL TRASPOSTO DEL TENSORE $\underline{\underline{R}}$, SICCHÉ, NELLA RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE LE DUE MATRICI SONO L'UNA LA TRASPOSTA DELL'ALTRA.

□

DATE LE [94]-[96] È SENSATO RICERCARE PER QUALI VALORI DI α IL MOMENTO DI INERZIA J_{x^*} (O J_{y^*}) ATTINGE UN VALORE MASSIMO O MINIMO.

A QUESTO SCOPO SI IMPONE LA CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ:

$$\frac{d J_{x^*}}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha\right] = 0 \qquad [97]$$

CALCOLANDO LE DERIVATE SI OTTIENE

$$\frac{J_x - J_y}{2}\frac{d\cos 2\alpha}{d\alpha} - J_{xy}\frac{d\sin 2\alpha}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{J_x - J_y}{2}(-2\sin 2\alpha) - J_{xy}\cdot 2\cos 2\alpha = 0$$

CHE, SEMPLIFICATA, FORNISCE:

$$\boxed{\frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha = 0} \qquad [97']$$

EGUALE ALLA [96] POSTA EGUALE A ZERO.

SI DEDUCE QUINDI CHE I VALORI DI α CHE RENDONO STAZIONARIO J_{x^*} (O, CON CONTI ANALOGHI, J_{y^*}) SONO QUELLI PER I QUALI $J_{x^*y^*} = 0$.

PERTANTO DETTI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA (IN QUESTO CASO, POICHÉ GLI ASSI SONO ANCHE BARICENTRICI SI PARLA PIÙ PROPRIAMENTE DI ASSI CENTRALI DI INERZIA) QUEGLI ASSI RISPETTO AI QUALI IL MOMENTO D'INERZIA È STAZIONARIO (O

MASSIMO, O MINIMO), SI HA CHE RISPETTO A QUESTI ASSI, CHE RISULTANO ORTOGONALI, È NULLO IL MOMENTO CENTRIFUGO.

ALTERNATIVAMENTE, SE IL MOMENTO CENTRIFUGO SI ANNULLA RISPETTO A UNA COPPIA DI ASSI ORTOGONALI, QUESTI RISULTANO ESSERE ASSI PRINCIPALI D'INERZIA

DALLA [97'] SE SI DIVIDONO I TERMINI PER $\cos 2\alpha \neq 0$ SI OTTIENE:

$$\frac{J_x - J_y}{2} \tan 2\alpha + J_{xy} = 0$$

DA CUI SEGUE

$$\tan 2\alpha = \frac{-J_{xy}}{\frac{J_x - J_y}{2}} = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y} \qquad [98]$$

RICORDANDO CHE LA FUNZIONE tan È PERIODICA DI PERIODO π, SE SI SCEGLIE L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE $-\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ SI PUÒ RICAVARE LA SOLUZIONE DELLA [98] UTILIZZANDO LA FUNZIONE INVERSA:

$$2\alpha = \arctan\left(\frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y}\right)$$

LE 2 RADICI CORRISPONDONO A DUE DISTINTE ROTAZIONI DELL'ASSE x, CHE INDIVIDUANO 2 DIREZIONI FRA LORO ORTOGONALI, CHE DEFINISCONO UN NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTOGONALE, COSTITUITO DAGLI ASSI PRINCIPALI DI INERZIA.
QUESTI GODONO DELLA SEGUENTE PROPRIETÀ: OGNI ASSE DI SIMMETRIA ORTOGONALE È ANCHE ASSE PRINCIPALE D'INERZIA.

PER STABILIRE A QUALE ANGOLO DI ROTAZIONE FRA α_0 E α_1 CORRISPONDA IL MASSIMO O IL MINIMO VALORE DEL MOMENTO D'INERZIA, SI VALUTA LA DERIVATA SECONDA DELLA [94]:

$$\left.\frac{d^2 J_{x^*}}{d\alpha^2}\right|_{\alpha_0} = -2\left(J_x - J_y\right)\cos 2\alpha + 4 J_{xy} \sin 2\alpha = \left.\cos 2\alpha \left[-2\left(J_x - J_y\right) + 4 J_{xy} \tan 2\alpha\right]\right|_{\alpha_0} \quad [*]$$

MA $\tan 2\alpha_0 = \dfrac{-2J_{xy}}{J_x - J_y}$ SICCHÉ SI OTTIENE DALLA [*]:

$$\cos 2\alpha_0 \left[-2\left(J_x - J_y\right) - \frac{8 J_{xy}^2}{J_x - J_y}\right] = -\frac{\cos 2\alpha_0}{J_x - J_y}\left[2\left(J_x - J_y\right)^2 + 8 J_{xy}^2\right] \quad [99]$$

NELLA [99] IL TERMINE FRA [ ] È SEMPRE POSITIVO, COME PURE $\cos 2\alpha_0$ (DATO CHE α_0 È DEFINITO DA $-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$).

PERTANTO IL SEGNO DI $\left.\dfrac{d^2 J_{x^*}}{d\alpha^2}\right|_{\alpha_0}$ È COMPLETAMENTE DEFINITO DAL TERMINE $-\left(J_x - J_y\right)$.

RICORDANDO CHE SE LA DERIVATA SECONDA IN UN PUNTO DI STAZIONARIETÀ DI UNA FUNZIONE È < 0, ALLORA LA FUNZIONE È MASSIMA NEL PUNTO, MENTRE SE RISULTA > 0, ALLORA LA FUNZIONE È MINIMA NEL PUNTO SI RICAVA:

- SE $J_x - J_y > 0$ — α_0 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MASSIMO, $J_{max} = J_\xi$
  α_1 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MINIMO, $J_{min} = J_\eta$
- SE $J_x - J_y < 0$ — α_0 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MINIMO, $J_{min} = J_\eta$
  α_1 DENOTA ASSE DI MOMENTO D'INERZIA MASSIMO, $J_{max} = J_\xi$

OCCORRE TRATTARE SEPARATAMENTE IL CASO IN CUI $J_x = J_y = J$; IN TAL CASO LE [94]-[96] DIVENGONO:

$$J_{x^*} = \frac{J_x + J_y}{2} - J_{xy} \sin 2\alpha = J - J_{xy} \sin 2\alpha \quad [94']$$

$$J_{y^*} = \frac{J_x + J_y}{2} + J_{xy} \sin 2\alpha = J + J_{xy} \sin 2\alpha \quad [95']$$

$$J_{x^*y^*} = J_{xy} \cos 2\alpha \quad [96'].$$

LA CONDIZIONE DI STAZIONARIETA' FORNISCE:

$$\frac{d J_{x^*}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 J_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad [100].$$

ANCORA EQUIVALENTE ALLA [96'], E AMMETTE QUESTE SOLUZIONI:

$$\begin{cases} \text{SE } J_{xy} = 0 \Rightarrow 2\alpha \text{ QUALSIASI} \\ \text{SE } J_{xy} \neq 0 \quad \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

PERTANTO NEL PRIMO CASO ($J_{xy} = 0$), CHE SI VERIFICA SEMPRE NEL CASO DI MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AD ASSI BARICENTRICI PER POLIGONI REGOLARI, SI HA CHE OGNI VALORE DI α INDIVIDUA UNA DIREZIONE PRINCIPALE DI INERZIA.

NEL SECONDO CASO $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ E $\alpha_1 = \frac{3}{4}\pi$; PER LA DETERMINAZIONE DELL'ASSE DI MASSIMO/MINIMO MOMENTO DI INERZIA, SI VALUTA IL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA $\frac{d^2 J_{x^*}}{d\alpha^2}$ IN CORRISPONDENZA DI α_0 E DI α_1.

SI HA:

$$\frac{d^2 J_x}{d\alpha^2} = +4 J_{xy} \sin 2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_0 = 4 J_{xy} \; [\sin 2\alpha_0 = +1] & \begin{matrix} >0 & \text{SE } J_{xy} > 0 \\ <0 & \text{SE } J_{xy} < 0 \end{matrix} \\ \alpha = \alpha_1 = -4 J_{xy} \; [\sin 2\alpha_1 = -1] & \begin{matrix} <0 & \text{SE } J_{xy} > 0 \\ >0 & \text{SE } J_{xy} < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

PERTANTO SE $J_{xy} < 0$ α_0 CORRISPONDE A $J_{max} = J_\xi$ E α_1 A $J_{min} = J_\eta$

SE $J_{xy} > 0$ α_1 CORRISPONDE A $J_{max} = J_\xi$ E α_0 A $J_{min} = J_\eta$.

A QUESTO PUNTO SOSTITUENDO I VALORI DI α_0 (O DI α_1) NELLE [94]-[95] O NELLE [94']-[95'] (NEL CASO SPECIALE $J_x - J_y = 0$) SI POSSONO DETERMINARE I VALORI DI $J_\xi = J_{max}$ E DI $J_\eta = J_{min}$.

35

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE QUESTI RISULTANO COSÌ ESPRESSI:

$$\left.\begin{matrix} J_\xi \\ J_\eta \end{matrix}\right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \qquad [101]$$

DOVE IL SEGNO (+) FORNISCE J_ξ E IL SEGNO (−) J_η.

OPERATIVAMENTE I PASSI DA SEGUIRE SONO QUESTI:

1) SI STABILISCONO (SE NON SONO GIA' ASSEGNATI) GLI ASSI DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE CHE RENDANO PIÙ AGEVOLI I CALCOLI (PER ESEMPIO: ASSI CHE LAMBISCONO LA FIGURA; OPPURE ASSI PASSANTI PER IL BARICENTRO DELLA FIGURA [SE QUESTA E' SEMPLICE] O DI PARTI SALIENTI DELLA FIGURA).

2) SE NECESSARIO SI SCOMPONE LA FIGURA IN PORZIONI DISGIUNTE, PIÙ SEMPLICI

3) SI DETERMINANO LE MASSE (AREE, NEL CASO OMOGENEO) CORRISPONDENTI ALLE PARTI COSTITUENTI LA FIGURA E SI DETERMINANO LE COORDINATE DEI RELATIVI BARICENTRI, RIFERITI AGLI ASSI INDIVIDUATI AL PUNTO 1)

4) CON QUESTI DATI SI VALUTANO I MOMENTI STATICI RELATIVI AGLI ASSI DI TUTTE LE PARTI COSTITUENTI COSÌ DA OTTENERE I MOMENTI STATICI COMPLESSIVI DELLA FIGURA, S_y E S_x E LA MASSA TOTALE, M

5) MEDIANTE LE [14'], [15'] (PAG. 5) SI VALUTANO LE COORDINATE DEL BARICENTRO DELLA FIGURA, G.

6) SI PASSA A CALCOLARE, ANCORA PROCEDENDO SEPARATAMENTE PER TUTTE LE PARTI COSTITUENTI I MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AGLI ASSI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

7) SI SOMMANO I CONTRIBUTI DI TUTTE LE PARTI COSTITUENTI, DETERMINANDO J_x, J_y, J_{xy} PER L'INTERA FIGURA.

8) MEDIANTE I TEOREMI DI TRASPORTO SI DETERMINANO I MOMENTI DEL 2° ORDINE RISPETTO AGLI ASSI BARICENTRICI PARALLELI A QUELLI DATI, J_{x_0}, J_{y_0}, $J_{x_0y_0}$.

9) MEDIANTE LA [98] (O LA [100] NEL CASO $J_{x_0} = J_{y_0}$ MA $J_{x_0y_0} \neq 0$) SI DETERMINANO LE DIREZIONI α_0 E α_1 DEGLI ASSI PRINCIPALI D'INERZIA, ξ ED η.

10) MEDIANTE LA [101] SI GIUNGE INFINE A DETERMINARE $J_\xi = J_{max}$ E $J_\eta = J_{min}$

IL PROCEDIMENTO E' ILLUSTRATO NELL'ESEMPIO CONCLUSIVO PRESENTATO DI SEGUITO.

> Indicazioni bibliografiche

A | Per i **contenuti del corso**:

A-1. M. Capurso, Lezioni di scienza delle costruzioni, Pitagora: Bologna, 1971. (Argomenti 1,4-10)

A-2. D. Bigoni, et al. , Geometria delle masse, Progetto Leonardo: Bologna, 1995. (Argomento 3)

A-3. E. Guagenti et al., Statica – Fondamenti di meccanica strutturale, McGraw-Hill: Milano, 2005. (Argomenti 0-2)

> altre Informazioni

Appunti per alcuni approfondimenti, esercizi di autovalutazione e l'intera collezione dei temi d'esame risolti sono resi disponibili (in formato PDF) sul sito web dei docenti:

> Pagina docente prof. Reccia
> Pagina docente prof. Cazzani