

Es. 1 (5 punti)

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 1

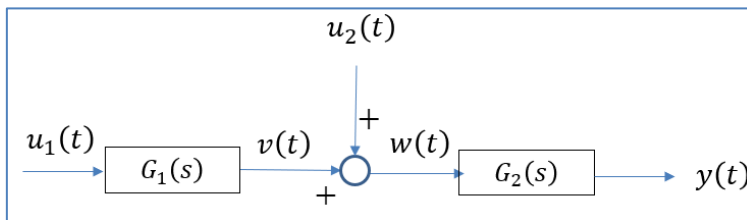
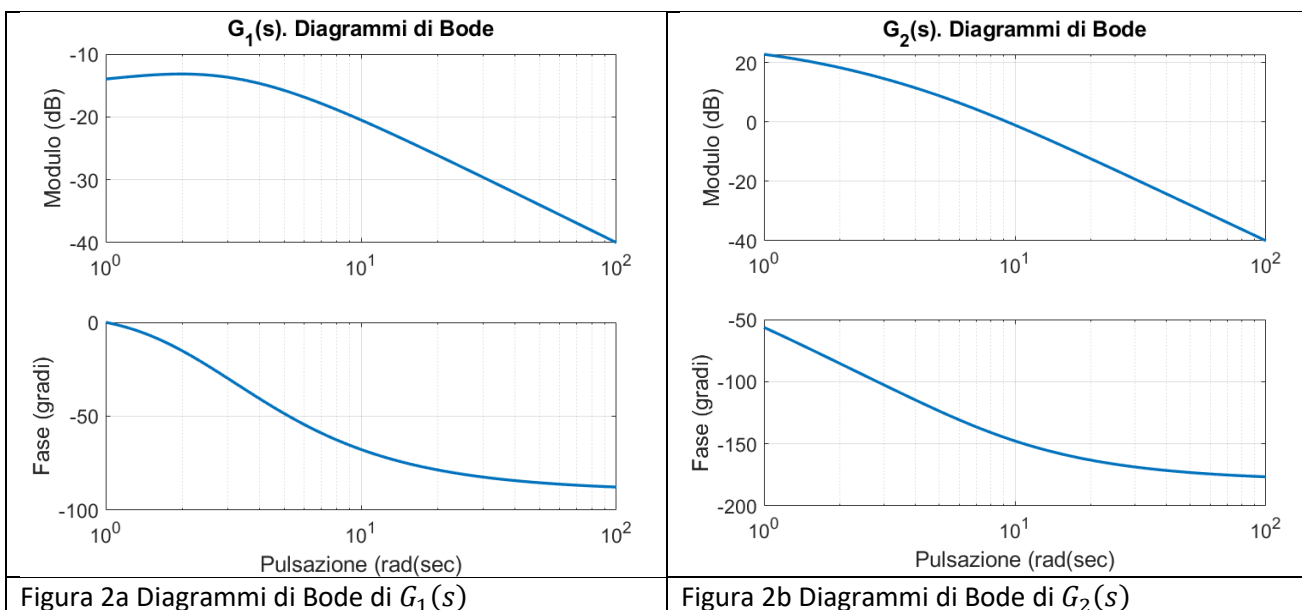


Figura 1

in cui $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono due sistemi dinamici asintoticamente stabili aventi i diagrammi di risposta armonica riportati in Figura 2a e 2b, e i segnali di ingresso $u_1(t)$ ed $u_2(t)$ sono espressi come segue:

$u_1(t) = 15 \cos(9t)$, $u_2(t) = 3 \sin(20t + 0.1)$. Determinare l'evoluzione di regime del segnale $y(t)$.

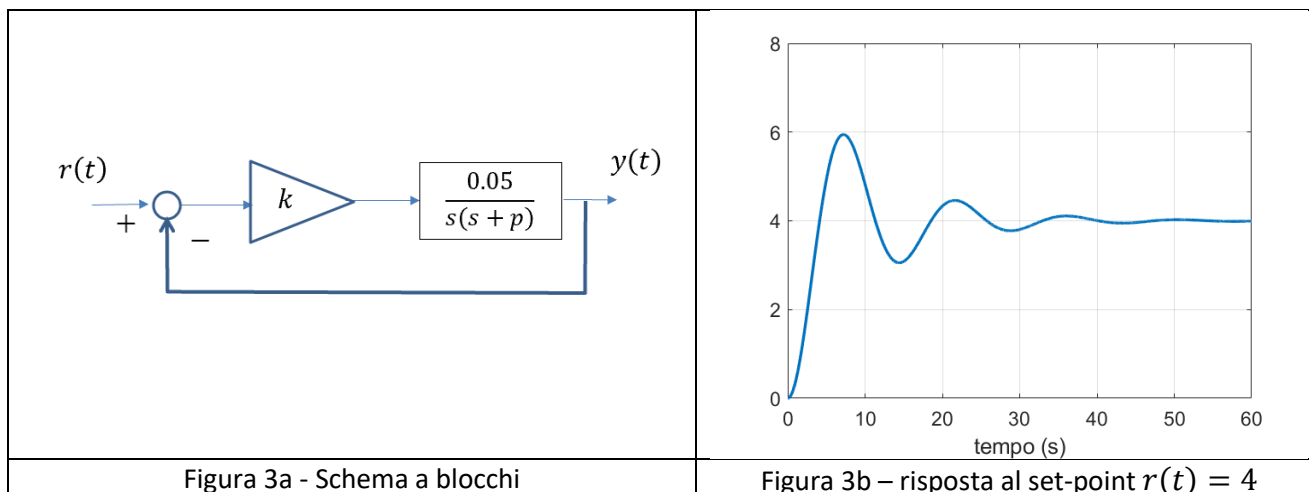


Es. 2 (6 punti)

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 3a, in cui k e p sono parametri sconosciuti da determinarsi sulla base della risposta al set point costante $r(t) = 4$ riportata nella Figura 3b.

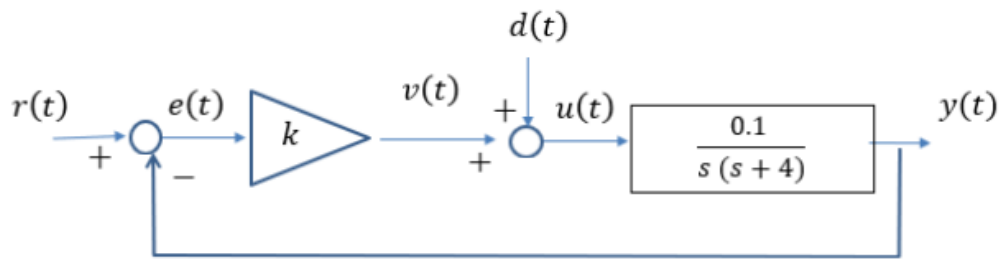
2.A (4 punti) Determinare i parametri k e p

2.B (2 punti) Determinare il comportamento di regime dell'uscita in risposta al set point a rampa $r(t) = 0.2t$



Es. 3 (6 punti)

Con riferimento al seguente sistema di controllo in retroazione

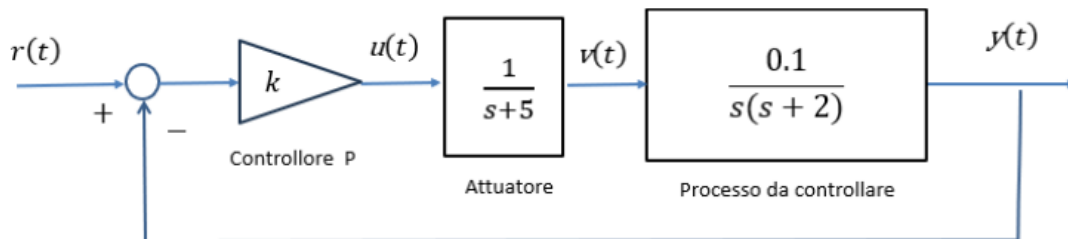


Determinare l'intervallo di valori ammissibile per il guadagno k tale da garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche

- S1) Precisione statica
- S2) Tempo di assestamento non superiore a 5 secondi
- S3) Sovraelongazione percentuale non superiore al 5%.

Es. 4 (6 punti)

Con riferimento al seguente sistema di controllo in retroazione



valutare le proprietà di stabilità a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k . Tracciare in maniera il più accurata possibile la risposta al gradino a ciclo chiuso per valori progressivamente crescenti del guadagno $k > 0$.

Es. 5 (10 punti)

Si consideri un processo descritto dalla equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) = 0.1\dot{u}(t) + 0.1u(t) + 0.2d(t)$$

in cui $u(t)$ rappresenta l'ingresso manipolabile, $y(t)$ è l'uscita, e $d(t)$ è un disturbo.

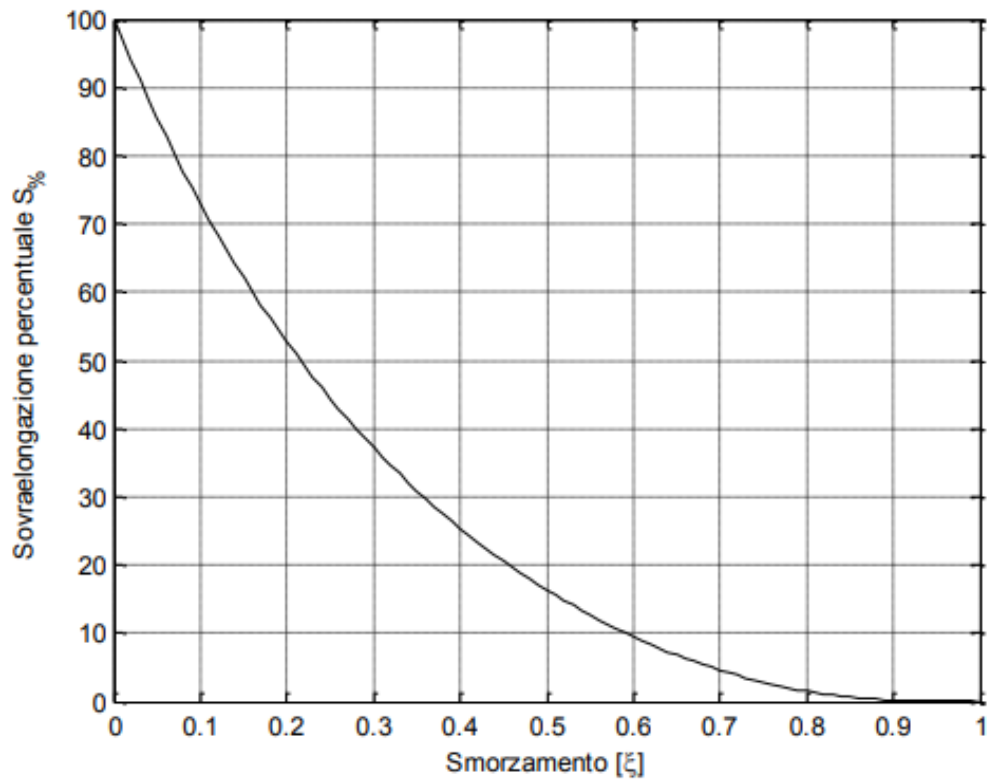
5A (7 punti). Progettare un sistema di controllo in retroazione che garantisca la precisione statica e che la risposta a ciclo chiuso ad un set point costante sia esente da oscillazioni.

5B (3 punti). Considerando il controllore progettato al passo precedente, valutare il valore di regime dell'uscita in risposta a un disturbo costante di ampiezza 3 ($d(t) = 3\delta_{-1}(t)$)

Numerare e firmare i fogli da consegnare.

Indicare chiaramente l'inizio e la fine dello svolgimento di ciascun esercizio.

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
$\delta_{-1}(t)$ (gradino unitario)	$\frac{1}{s}$
$\delta_{-2}(t) = t\delta_{-1}(t)$ (rampa unitaria)	$\frac{1}{s^2}$
e^{at} (esponenziale)	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$

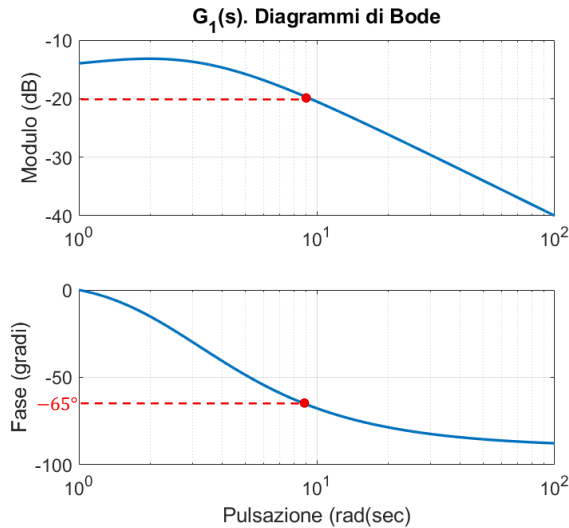
SOLUZIONE ESERCIZIO 1

L'evoluzione di regime del segnale $v(t)$ è:

$$v_{regime}(t) = 15 \cdot |G_1(j9)| \cdot \cos(9t + \angle G_1(j9))$$

Leggiamo sui diagrammi di Bode che:

$$|G_1(j9)|_{dB} \approx -20 \text{ dB} \quad \angle G_1(j9)_{GRAD} \approx -65^\circ$$



Convertiamo $|G_1(j9)|_{dB}$ e $\angle G_1(j9)_{GRAD}$ nei corrispondenti valori naturali e in radianti

$$|G_1(j9)| = 10^{\frac{|G_1(j9)|_{dB}}{20}} \approx 10^{-\frac{20}{20}} = 10^{-1} = 0.1$$

$$\angle G_1(j9) \equiv \angle G_1(j9)_{RAD} = \angle G_1(j9)_{GRAD} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \approx -1.13 \text{ rad}$$

Sostituendo i valori:

$$v_{regime}(t) = 15 \cdot 0.1 \cdot \cos(9t - 1.13) = 1.5 \cdot \cos(9t - 1.13)$$

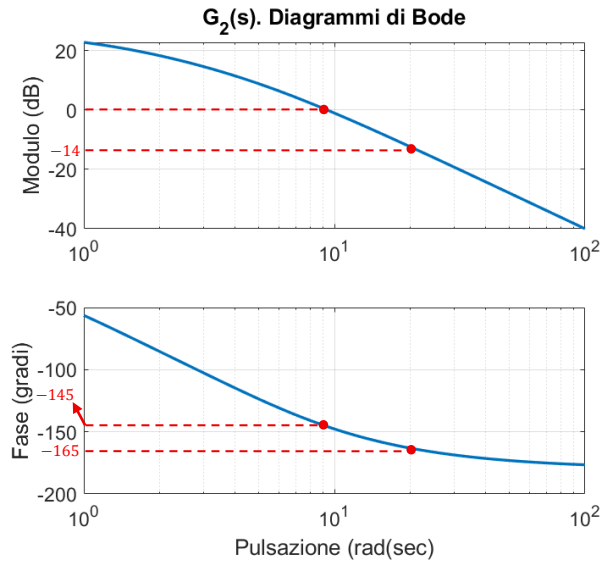
Sulla base del principio di sovrapposizione degli effetti, l'evoluzione di regime dell'uscita $y(t)$ sarà la somma di due contributi distinti, uno dovuto alla propagazione del segnale $v(t)$ (o, equivalentemente, della sua evoluzione di regime) attraverso il processo $G_2(s)$, e l'altro dovuto alla propagazione del segnale $u_2(t)$ attraverso il processo $G_2(s)$.

$$y_{regime}(t) = 1.5 \cdot |G_2(j9)| \cdot \cos(9t - 1.13 + \angle G_2(j9)) + 3 \cdot |G_2(j20)| \cdot \sin(20t + \angle G_2(j20))$$

Leggiamo sui diagrammi di Bode che:

$$|G_2(j9)|_{dB} \approx 0 \text{ dB} \quad \angle G_2(j9)_{GRAD} \approx -145^\circ$$

$$|G_2(j20)|_{dB} \approx -14 \text{ dB} \quad \angle G_2(j20)_{GRAD} \approx -165^\circ$$



Convertiamo nei corrispondenti valori naturali e in radianti

$$|G_2(j9)| = 10^{\frac{|G_2(j9)|_{dB}}{20}} \approx 10^{-\frac{0}{20}} = 10^0 = 1 \quad ; \quad |G_2(j20)| = 10^{\frac{|G_2(j20)|_{dB}}{20}} \approx 10^{-\frac{14}{20}} = 10^{-0.7} = 0.19$$

$$\angle G_2(j9) \equiv \angle G_2(j9)_{RAD} = \angle G_2(j9)_{GRAD} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \approx -2.53 \text{ rad}$$

$$\angle G_2(j20) \equiv \angle G_2(j20)_{RAD} = \angle G_2(j20)_{GRAD} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} \approx -2.87 \text{ rad}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{aligned} y_{regime}(t) &= 1.5 \cdot 1 \cdot \cos(9t - 1.13 - 2.53) + 3 \cdot 0.19 \cdot \sin(20t - 2.87) \\ &= 1.5 \cdot \cos(9t - 3.66) + 0.57 \cdot \sin(20t - 2.87) \end{aligned}$$

N.B. Le FdT $G_1(s)$ e $G_2(s)$ usate per generare i diagrammi di Bode sono:

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \quad G_2(s) = \frac{100}{(s+1)(s+5)}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

QUESITO 2.A

La curva mostrata in Figura 3b) è la risposta ad un ingresso costante di ampiezza 4 della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita:

$$W_r^y(s) = \frac{k \cdot \frac{0.05}{s(s+p)}}{1 + k \cdot \frac{0.05}{s(s+p)}} = \frac{0.05k}{s(s+p) + 0.05k} = \frac{0.05k}{s^2 + ps + 0.05k}$$

Sulla base delle caratteristiche transitorie della risposta mostrata in figura possiamo determinare i parametri incogniti p e k . Il polinomio caratteristico $s^2 + ps + 0.05k$ ha certamente 2 radici complesse coniugate.

La sovralongazione percentuale è circa pari al 50% -> lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è circa pari a 0.22 ($\xi = 0.22$).

Il tempo di assestamento è approssimativamente pari a 45 secondi

$$T_a = \frac{4.6}{\xi \omega_n} \approx 45 \text{ s} \rightarrow \xi \omega_n \approx \frac{4.6}{45} = 0.1$$

Si ha quindi:

$$\omega_n \approx \frac{0.1}{0.22} = 0.454 \rightarrow \omega_n^2 \approx 0.206$$

$$s^2 + ps + 0.05k = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 0.2s + 0.206$$

$$p = 0.2$$

$$0.05k = 0.206 \rightarrow k = \frac{0.206}{0.05} \approx 4.1$$

QUESITO 2.B

Poiché il sistema di controllo è di tipo 1, l'evoluzione di regime dell'uscita in risposta ad un set point a rampa $r(t) = \Sigma t$ è:

$$y_{regime} = r(t) - E^* = \Sigma t - E^* \quad E^* = \frac{\Sigma}{\mu_C \mu_P}$$

In cui Σ è la pendenza del set point a rampa, μ_C è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del controllore e μ_P è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del processo. Nel caso in esame, $\Sigma = 0.2$, $\mu_C = k = 4.1$ è il guadagno statico del controllore, mentre $\mu_P = \frac{0.05}{p} = 0.25$ è il guadagno statico generalizzato del processo.

Si ha quindi:

$$E^* = \frac{0.2}{4.1 \cdot 0.25} \approx 0.19 \quad y_{regime} = 0.2t - 0.19$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Il polinomio caratteristico viene determinato moltiplicando fra loro le FdT del controllore e del processo, e sommandone numeratore e denominatore:

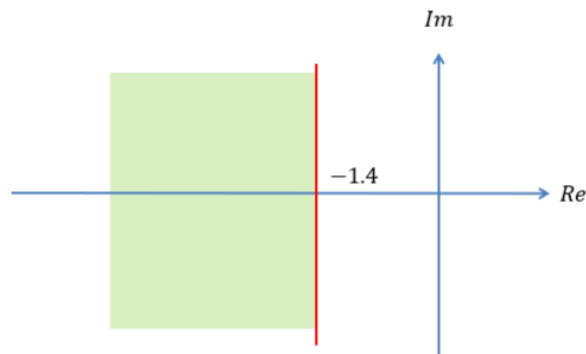
$$C(s)P(s) = k \cdot \frac{0.1}{s(s+4)} = \frac{0.1k}{s(s+4)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+4) + 0.1k = s^2 + 4s + 0.1k$$

Il sistema di controllo è asintoticamente stabile a ciclo chiuso qualunque sia il valore di k (regola di Cartesio).

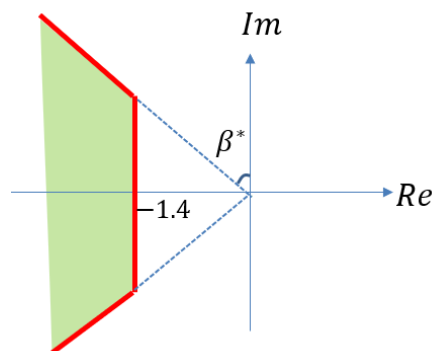
La specifica S1 è sempre garantita indipendentemente dal valore di k (sistema di controllo di tipo 1).

Passiamo alla analisi delle specifiche sul transitorio. Determiniamo la regione ammissibile per i poli del sistema a ciclo chiuso. La specifica S2 ($T_a \leq T^* = 5s$) implica la seguente regione ammissibile



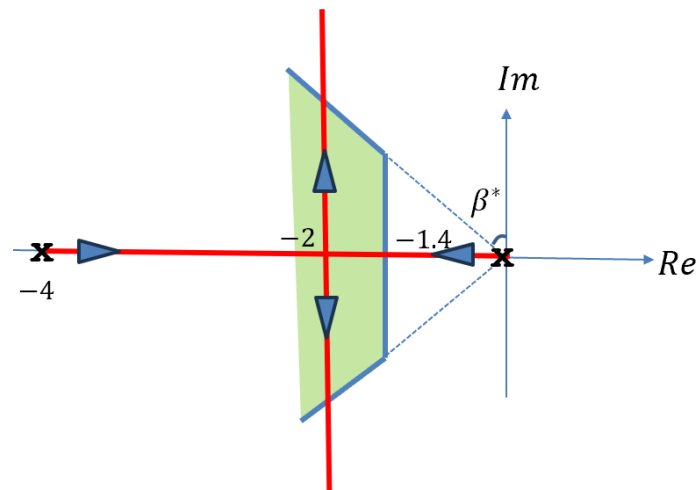
Poiché il sistema a ciclo chiuso è di ordine superiore al primo, per la determinazione di A^* si deve infatti impiegare la formula $A^* = -\frac{7}{T^*} = -1.4$

La specifica S3 ($S_{\%} \leq 5$) implica invece che lo smorzamento debba essere maggiore o uguale di 0.7 ($\xi \geq 0.7$). La regione ammissibile corrispondente alle specifiche S4 e S5 è pertanto complessivamente la seguente:



$$\text{In cui } \beta^* = \arcsin(0.7) = 0.77 \text{ rad}$$

Sovrapponiamo la regione ammissibile con il LdR associato a $L(s) = \frac{0.1}{s(s+4)}$



Il valore minimo consentito per il guadagno k sarà pertanto pari a quello associato, nel LdR, al punto -1.4 , punto in cui il ramo «destro» del LdR (quello che ha come punto di partenza l'origine) entra nella regione ammissibile. Determiniamolo mediante la taratura.

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{0.1} \cdot 1.4 \cdot 2.6 = 36.4 \quad \mathbf{k_{min} = 36.4}$$

$$\bar{k} = 0.1 : \text{Guadagno in alta frequenza di } L(s) = \frac{0.1}{s(s+4)}$$

$\rho_1 = 1.4$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-1.4) e l'origine

$\rho_2 = 2.6$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-1.4) e il punto -4

Ora determiniamo il valore k_{max} di k in corrispondenza del quale i rami del LdR escono dalla regione ammissibile, cioè il valore di k in corrispondenza del quale lo smorzamento dei poli complessi coniugati è pari a 0.7 .

$$P_{car}(s) = s^2 + 4s + 0.1k$$

$$s^2 + 4s + 0.1k = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

Uguagliando membro a membro il polinomio caratteristico con la forma standard del termine trinomio possiamo determinare la pulsazione naturale e lo smorzamento in funzione del guadagno k :

$$\omega_n^2 = 0.1k \quad 2\xi\omega_n = 4$$

$$\text{Pulsazione naturale: } \omega_n = \sqrt{0.1k}$$

$$\text{Smorzamento: } \xi = \frac{4}{2 \cdot \omega_n} = \frac{2}{\sqrt{0.1k}}$$

Ora andiamo a cercare il valore di k in corrispondenza del quale lo smorzamento vale 0.7 :

$$\frac{2}{\sqrt{0.1k}} = 0.7 \quad \rightarrow \quad \sqrt{0.1k} = \frac{2}{0.7} = 2.85 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{0.1} (2.85)^2 \approx 81.2$$

Tale valore costituisce la soglia massima consentita per k , oltre la quale lo smorzamento dei poli complessi coniugati diventa minore di 0.7

Pertanto, l'intervallo di valori del guadagno k che garantisce il soddisfacimento delle specifiche S1-S3 è:

$$\mathbf{36.4 \leq k \leq 81.2} \quad \mathbf{k_{min} = 36.4} \quad \mathbf{k_{max} = 81.2}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Il polinomio caratteristico viene determinato moltiplicando fra loro le FdT del controllore, dell'attuatore e del processo da controllare, e sommandone il numeratore e il denominatore:

$$A(s) = k \cdot \frac{1}{s+5} \cdot \frac{0.1}{s(s+2)} = \frac{0.1k}{s(s+2)(s+5)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+2)(s+5) + 0.1k = s^3 + 7s^2 + 10s + 0.1k$$

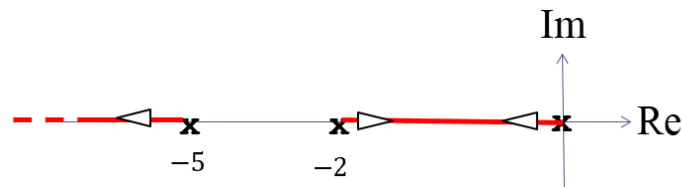
Il polinomio caratteristico (di terzo grado) è un polinomio di Hurwitz se vale che

$$7 \cdot 10 > 0.1k \quad \Rightarrow \quad k < k_{cr} = 700$$

Il guadagno critico è pari a 700. Il sistema di controllo sarà asintoticamente stabile a ciclo chiuso (sia esternamente che internamente) se $k < 700$, e sarà instabile se $k > 700$.

Per individuare le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k , tracciamo il LdR associato alla $L(s) = \frac{0.1}{s(s+2)(s+5)}$.

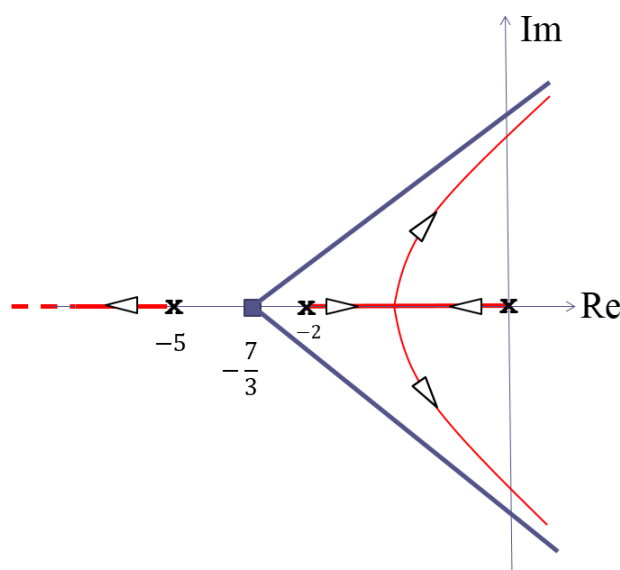
Tracciamo la mappa poli-zeri della $L(s)$, ed individuiamo i segmenti dell'asse reale che appartengono al LdR



Il segmento che va dal polo in -5 verso meno infinito è uno dei tre rami del LdR. Il segmento che unisce il polo nell'origine ed il polo in -2 invece non è un ramo del luogo. I due rami che partono rispettivamente dall'origine e dal punto -2 vanno l'uno verso l'altro e si incontrano in un punto doppio appartenente all'intervallo $(-2,0)$ per poi abbandonare l'asse reale e convergere verso gli asintoti.

Individuiamo il centro stella e tracciamo gli asintoti.

$$\text{Ascissa del centro stella: } x_s = \frac{-2-5}{3} = -\frac{7}{3}$$



Non disegniamo il terzo asintoto sovrapposto al semiasse reale negativo per non complicare oltremodo il disegno. I due rami da completare abbandonano l'asse reale e convergono verso i due asintoti, confluyendo quindi verso il semipiano destro per valori del guadagno sufficientemente elevati. I due rami attraversano l'asse immaginario in corrispondenza del valore di guadagno $k = k_{cr} = 700$ determinato in precedenza.

Resta da determinare l'ascissa del punto doppio.

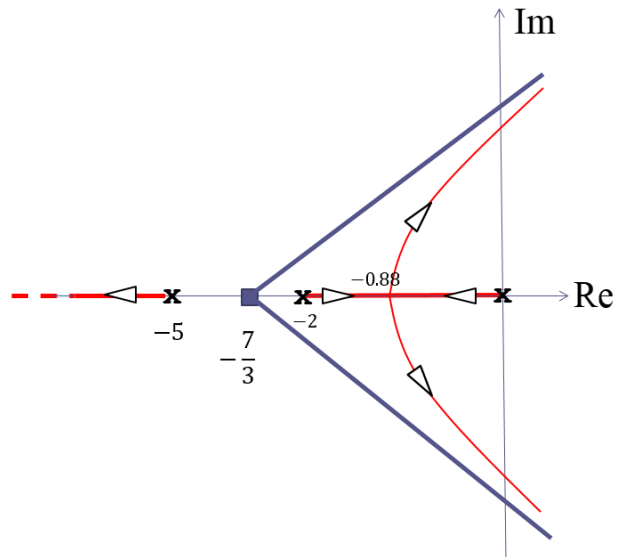
Equazione dei punti doppi: $\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^*+2} + \frac{1}{s^*+5} = 0$

Dopo semplici passaggi:

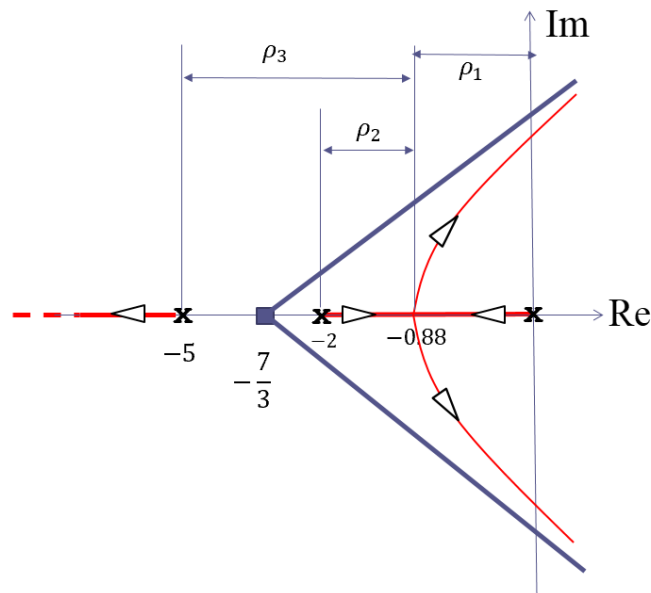
$$\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^*+2} + \frac{1}{s^*+5} = \frac{(s^*+2)(s^*+5) + s^*(s^*+5) + s^*(s^*+2)}{s^*(s^*+2)(s^*+5)} = \frac{3s^2 + 14s + 10}{s^*(s^*+2)(s^*+5)}$$

Il polinomio $3s^2 + 14s + 10$ ammette le radici $r_1 = -0.88$ e $r_2 = -3.78$.

Fra le due radici r_1 e r_2 è accettabile unicamente r_1 in quanto il punto -3.78 non appartiene al LdR. Il punto doppio sta pertanto nel punto -0.88



Tariammo il punto doppio in -0.88 per identificare il valore del guadagno k oltre il quale si inducono oscillazioni nella risposta al gradino a ciclo chiuso



Taratura del punto doppio in -0.88

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \rho_1 \rho_2 \rho_3$$

$$\bar{k} = 0.1 : \text{Guadagno in alta frequenza di } L(s) = \frac{0.1}{s(s+2)(s+5)}$$

$\rho_1 = 0.88$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-0.88) e l'origine

$\rho_2 = 1.12$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-0.88) e il punto -2

$\rho_3 = 4.12$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-0.88) e il punto -5

$$k = \frac{1}{0.1} \cdot 0.88 \cdot 1.12 \cdot 4.12 = 40.6$$

Le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare di k sono pertanto le seguenti.

$0 < k < 40.6$: Risposta monotona esponenziale (tre poli reali negativi distinti). Al crescere di k il tempo di assestamento si riduce.

$k = 40.6$ Risposta monotona esponenziale (due poli reali negativi coincidenti nel punto -0.88 ed un terzo polo del quale non si può determinare a mano la collocazione esatta ma che siamo certi che si trovi più a sinistra del punto -5)

$40.6 < k < 700$ Risposta oscillatoria smorzata (due poli complessi coniugati ed un terzo polo reale negativo). Al crescere di k si riduce lo smorzamento (quindi aumenta la sovraelongazione) ed aumenta la costante di tempo equivalente (quindi aumenta il tempo di assestamento)

$k = 700$ Risposta oscillatoria non smorzata. (due poli sull'asse immaginario ed un terzo polo reale negativo)

$k > 700$ Risposta oscillatoria divergente

La presenza nella FdT del processo di un polo nell'origine garantisce la precisione statica. Pertanto, per qualsiasi valore di $k < 700$ il valore di regime della risposta a ciclo chiuso ad un set point unitario sarà pari ad 1.

La risposta per $k = 40.6$ può essere tracciata con elevata accuratezza. La costante di tempo associata alla coppia di poli coincidenti è:

$$T_1 = \frac{1}{0.88} = 1.13 \text{ s}$$

Difatti, quando $k = 40.6$ la FdT a ciclo chiuso fra il set point è l'uscita è:

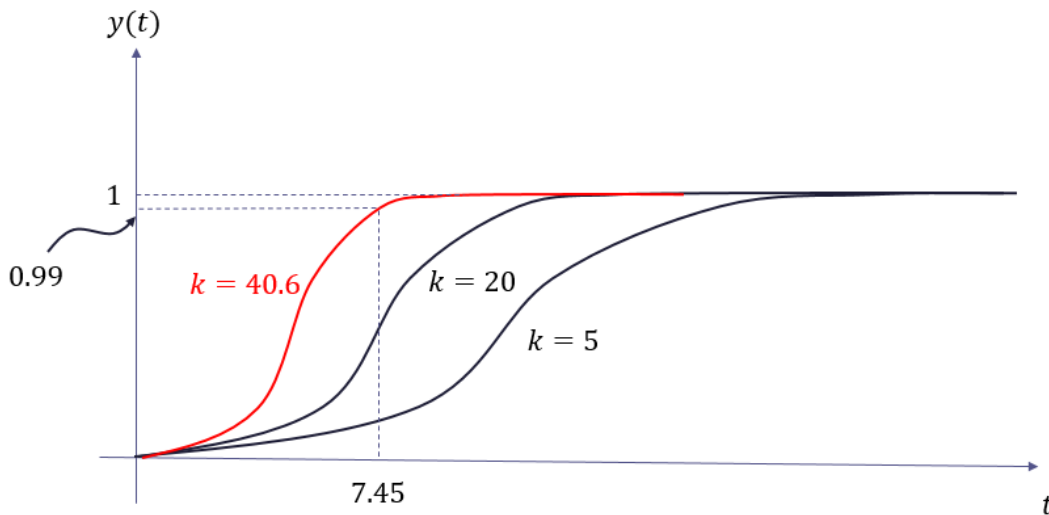
$$W_r^y(s) = \frac{1}{(1.13 s + 1)^2 (T_2 s + 1)}$$

Non possiamo determinare con esattezza "a mano" la posizione del terzo polo, e quindi la costante di tempo T_2 , ma sappiamo che il terzo polo è certamente minore di -5 , quindi la coppia di poli in -0.88 è **dominante**, ed il tracciamento della relativa risposta ad un ingresso unitario può essere effettuata considerando la FdT approssimata di ordine ridotto

$$W_{r,APPR}^y(s) = \frac{1}{(1.13 s + 1)^2}$$

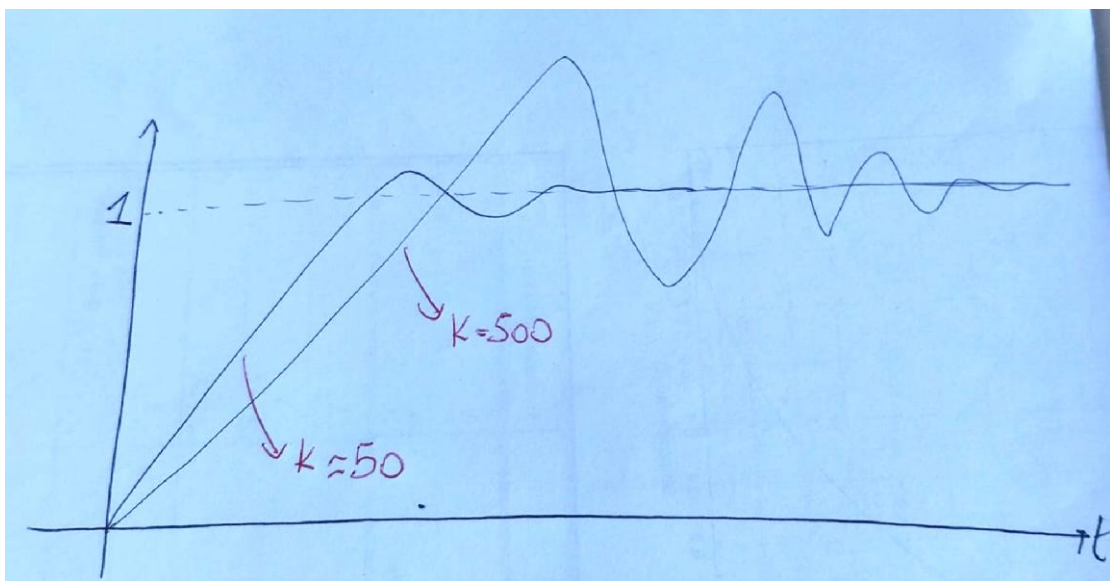
la cui RGU è monotona esponenziale ed ha un tempo di assestamento $T_a = 6.6 \cdot T_1 = 6.6 \cdot 1.13 = 7.45 \text{ s}$

Possiamo pertanto tracciare i seguenti grafici



Le curve corrispondenti ai valori $k=5$ e $k=20$ sono puramente indicative del fatto che la risposta si velocizza al crescere di k , la curva associata al valore $k=40.6$ è invece tracciata con precisione elevata.

Quando $40.6 < k < 700$, iniziano a comparire delle oscillazioni. La seguente figura riporta due risposte corrispondenti ad un valore di k di poco superiore a 40.6 ($k = 50$) in corrispondenza del quale è lecito attendersi una sovralongazione piuttosto bassa, ed un valore più grande ($k = 500$) che sulla base della analisi precedentemente svolta comporta una maggiore sovralongazione ed un tempo di assestamento più elevato rispetto alla risposta per $k = 50$.



SOLUZIONE ESERCIZIO 5

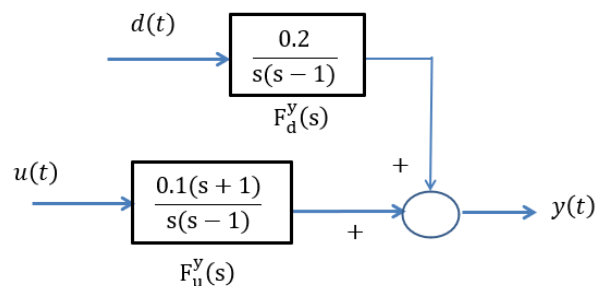
QUESITO 5.A

Le FdT a ciclo aperto fra l'ingresso manipolabile e l'uscita, e quella fra il disturbo e l'uscita sono rispettivamente:

$$F_u^y(s) = \frac{2s+2}{s^2-s} = \frac{0.1(s+1)}{s(s-1)}, \quad F_d^y(s) = \frac{0.5}{s^2-s} = \frac{0.2}{s(s-1)}.$$

Il processo a ciclo aperto è instabile per effetto della presenza del polo reale positivo in +1.

Schema a blocchi del processo:



Il sistema di controllo in retroazione da progettarsi può essere equivalentemente rappresentato nella forma seguente

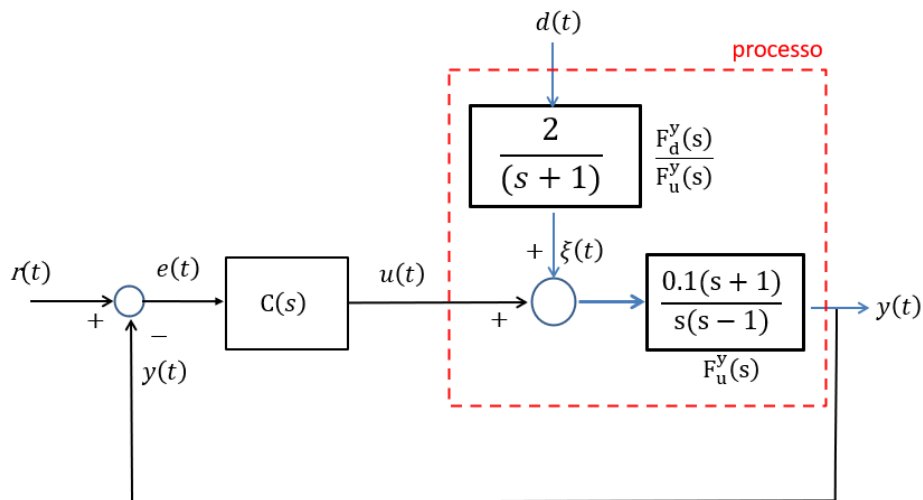


Figura 2.1

Utilizziamo come primo metodo di progetto la sintesi diretta. Deve essere considerata, come FdT del processo da controllare, la $F_u^y(s)$.

Scegliamo una FdT desiderata a ciclo chiuso $W_d(s)$ che sia asintoticamente stabile (per garantire la stabilità esterna del sistema a ciclo chiuso), abbia grado relativo unitario (per la fisica realizzabilità del controllore), guadagno statico unitario (per la precisione statica), poli reali negativi (per garantire che la risposta a ciclo chiuso ad un set point costante sia esente da oscillazioni) e che allo stesso tempo, per evitare che venga compromessa la stabilità interna del sistema di controllo, soddisfi la relazione:

$$D_{W_d}(p_i) = N_{W_d}(p_i) \quad \forall \text{ polo } p_i \text{ del processo avente parte reale positiva o nulla}$$

Nel problema in esame, la precedente relazione (2.1) si traduce nei due vincoli seguenti:

$$D_{W_d}(0) = N_{W_d}(0) \quad (2.2)$$

$$D_{W_d}(1) = N_{W_d}(1) \quad (2.3)$$

Scelta di primo tentativo:

$$W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad (2.4)$$

Chiaramente T dovrà essere strettamente positiva. Il guadagno statico è unitario, quindi la relazione (2.2) è soddisfatta. Per garantire la (2.3) dovrebbe aversi che:

$$T + 1 = 1$$

cioè $T = 0$ che è evidentemente una scelta non ammissibile. La scelta (2.4) non va pertanto bene.

Modifichiamo $W_d(s)$ aggiungendo una coppia polo-zero:

$$W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)} = \frac{1}{T_1s+1} \cdot \frac{\tau s+1}{T_2s+1} \quad (2.5)$$

Chiaramente T_1 e T_2 dovranno essere strettamente positive. Il guadagno statico è unitario, quindi la relazione (2.2) è soddisfatta. Per garantire la (2.3) deve aversi che:

$$(T_1 + 1)(T_2 + 1) = \tau + 1$$

Si ha quindi:

$$\tau = (T_1 + 1)(T_2 + 1) - 1$$

Scegliamo T_1 e T_2 identiche e sufficientemente grandi in modo da garantire (anche se non sarebbe strettamente richiesto dalle specifiche) che τ sia positiva, ciò onde evitare il fenomeno della risposta inversa nel comportamento a ciclo chiuso.

Ciò può essere garantito, ad esempio, scegliendo $T_1 = T_2 = 1$. Ne risulta infatti che

$$\tau = (T_1 + 1)(T_2 + 1) - 1 = 3$$

Sostituendo tali valori nella espressione (2.5) di $W_d(s)$ si ottiene:

$$W_d(s) = \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s)} = \frac{3s + 1}{(s + 1)^2}$$

La FdT del controllore sarà pertanto:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{N_{W_d}(s)}{D_{W_d}(s) - N_{W_d}(s)} \cdot \frac{D_{F_u^y}(s)}{N_{F_u^y}(s)} = \frac{3s + 1}{(s + 1)^2 - 3s - 1} \cdot \frac{s(s - 1)}{0.1(s + 1)} \\ &= \frac{3s + 1}{s(s - 1)} \cdot \frac{s(s - 1)}{0.1(s + 1)} = \frac{3s + 1}{0.1(s + 1)} \end{aligned}$$

Ora risolviamo il quesito in modo differente impiegando la sintesi per tentativi mediante il LdR.

Le specifiche non richiedono che il controllore possieda un polo nell'origine in quanto è già presente nel processo e la precisione statica è pertanto garantita da qualunque controllore che preservi la stabilità esterna e interna a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Indaghiamo preliminarmente la possibilità di impiegare un controllore proporzionale:

$$C(s) = k_c$$

Il polinomio caratteristico risultante è:

$$P_{car}(s) = s(s - 1) + 0.1k_c(s + 1) = s^2 + (0.1k_c - 1)s + 0.1k_c$$

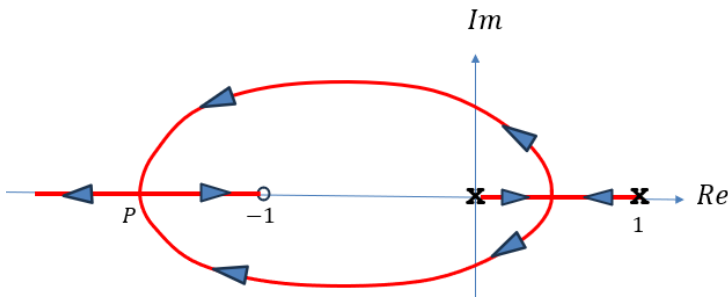
Il polinomio caratteristico è un polinomio di Hurwitz se vale la seguente condizione (regola di Cartesio)

$$(0.1k_c - 1) > 0 \Rightarrow k_c > 10$$

Verifichiamo se mediante una opportuna scelta del guadagno è possibile garantire che i poli a ciclo chiuso siano tutti reali negativi, onde garantire che la risposta a ciclo chiuso ad un set point costante sia esente da oscillazioni. A tal fine, tracciamo il LdR. La $L(s)$ corrispondente è:

$$L(s) = F_u^y(s) = \frac{0.1(s + 1)}{s(s - 1)}$$

Dopo qualche passaggio:



Il LdR evidenzia come per valori del guadagno k_c superiori a quello associato al punto doppio P i poli a ciclo chiuso sono entrambi reali.

Determiniamo le ascisse dei punti doppi:

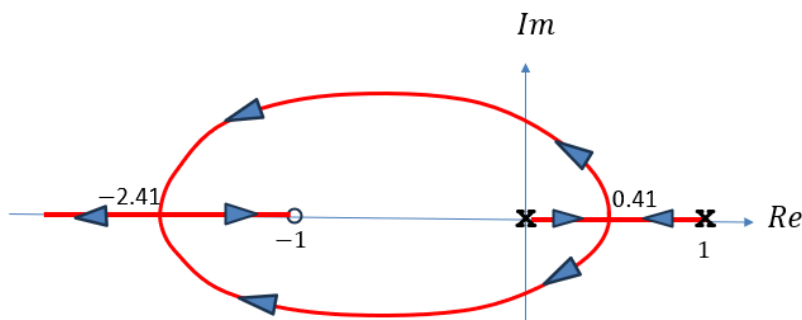
Equazione dei punti doppi: $\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^* - 1} - \frac{1}{s^* + 1} = 0$

Dopo semplici passaggi:

$$\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^* - 1} - \frac{1}{s^* + 1} = \frac{(s^* - 1)(s^* + 1) + s^*(s^* + 1) - s^*(s^* - 1)}{s^*(s^* - 1)(s^* + 1)} = \frac{s^{*2} + 2s^* - 1}{s^*(s^* + 2)(s^* + 5)}$$

Il polinomio $s^2 + 2s - 1$ ammette le radici $s_1 = -2.41$ e $s_2 = 0.41$.

Fra le due radici r_1 e r_2 quella associata al punto P che ci interessa è la radice negativa s_1 .



Operiamo la taratura del punto doppio in -2.41

Taratura del punto doppio in -2.41

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1}$$

$$\bar{k} = 0.1 : \text{Guadagno in alta frequenza di } L(s) = \frac{0.1(s+1)}{s(s-1)}$$

$\rho_1 = 2.41$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-2.41) e il polo nell'origine

$\rho_2 = 3.41$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-2.41) e il polo in $+1$

$r_1 = 1.41$: Distanza fra il punto che stiamo tarando (-2.41) e lo zero in -1

$$k = \frac{1}{0.1} \cdot \frac{2.41 \cdot 3.41}{1.41} = 58.28$$

Il quesito è risolto da un controllore proporzionale $C(s) = k_c$ con guadagno $k_c \geq 58.28$

QUESITO 5.B

In un sistema di controllo di tipo 1 in cui il polo nell'origine è contenuto nel processo, il valore di regime dell'uscita in risposta ad un disturbo costante che si somma all'uscita del controllore è:

$$y_\infty = \frac{\Xi}{\mu_C}$$

in cui μ_C è il guadagno statico del controllore.

Il guadagno statico associato al controllore $C(s) = \frac{3s+1}{0.1(s+1)}$ progettato mediante sintesi diretta è:

$$\mu_C = C(0) = 10.$$

La risoluzione del quesito prosegue considerando tale valore per il guadagno statico μ_C del controllore. Considerando in alternativa il controllore progettato impiegando la sintesi per tentativi mediante il LdR, il cui guadagno statico è $\mu_C = k_c \geq 58.28$, si otterranno risultati lievemente differenti.

Come ampiezza del disturbo, deve essere considerato il valore di regime del segnale $\xi(t)$ mostrato in Figura 2.1. Sulla base del T.F.R.G. si ha:

$$\Xi = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 3 \cdot \frac{0.2}{0.1} = 6$$

Il valore di regime dell'uscita in risposta a un disturbo $d(t)$ costante di ampiezza $D = 3$ è pertanto:

$$y_\infty = \frac{\Xi}{\mu_C} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Un procedimento alternativo per la deduzione del medesimo risultato potrebbe prevedere che si determini esplicitamente la FdT **a ciclo chiuso** fra il disturbo d e l'uscita y :

$$W_d^y(s) = \frac{F_d^y(s)}{F_u^y(s)} \cdot \frac{F_u^y(s)}{1+C(s)F_u^y(s)} = \frac{2}{s+1} \cdot \frac{\frac{0.1(s+1)}{s(s-1)}}{1+\frac{3s+1}{0.1(s+1)} \cdot \frac{0.1(s+1)}{s(s-1)}} = \frac{0.2}{(s+1)^2}$$

il cui guadagno statico è: $\mu = W_d^y(0) = 0.2$

Sulla base del T.F.R.G., il valore di regime dell'uscita $y(t)$ in risposta a un disturbo $d(t)$ costante di ampiezza $D = 3$ è pertanto:

$$y_\infty = D \cdot \mu = 3 \cdot 0.2 = 0.6$$