Esercizi del 5 dicembre 2025

Cognome Nome: ___________________________	Matricola: ___________________
Fogli aggiunti escluso il presente ____________	Docente: ____________________

1) Formula di Taylor e ipotesi di validità. Scrivere il polinomio di grado 5 che approssima la funzione $f(x) = [\mathrm{e}^{2x} - 1] \cdot \ln(1 + x^2)$; nel punto $x_0 = 0$

2) Calcolare l'integrale
$$\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx$$

3) Rappresentare graficamente e calcolare l'area della regione di piano compresa tra le due curve di equazione $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = lnx$, con $x \in [1, 2]$

Svolgimento

1) Calcoliamo lo sviluppo di Taylor di

$$f(x) = (e^{2x} - 1), \ln(1 + x^2)$$

intorno a $x_0 = 0$, fino al grado 5.

- sviluppo di $(e^{2x} - 1)$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + O(x^5)$$

$$e^{2x} - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + O(x^5)$$

- sviluppo di $ln(1 + x^2)$
  possiamo utilizzare lo sviluppo fino all'ordine 4 in quanto i termini successivi danno origine ad un ordine superiore a 5:

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^4)$$

Il prodotto dei due sviluppi sarà:

$$(e^{2x} - 1)\, ln(1 + x^2) = \left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right)$$

Svolgendo il prodotto trascuriamo i termini di ordine superiore al quinto:

$$P_5(x) = 2x^3 + 2x^4 + \frac{1}{3}x^5$$

2) Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}dx$$

Scomponiamo il denominatore:

$$x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$$

Dunque

$$\frac{1}{x-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

Possiamo effettuare una sostituzione

Poniamo

$$t=\sqrt{x} \;\Rightarrow x=t^2 \;\Rightarrow dx=2tdt$$

Sostituendo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}dx=\int \frac{1}{t(t-1)}2tdt=\int \frac{2}{t-1}dt$$

Integrando

$$\int \frac{2}{t-1}dt=2\ln|t-1|+C$$

Esprimendo il risultato nell'incognita x

$$t=\sqrt{x}$$

Il risultato finale

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}dx=2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

N.B. allo stesso risultato si perviene con la sostituzione

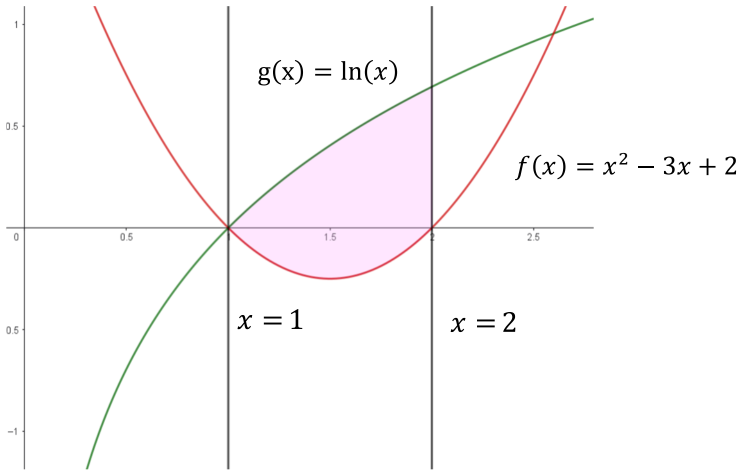
$$t=\sqrt{x} \;\Rightarrow x=t^2 \;\Rightarrow dx=2tdt$$

Senza effettuare la scomposizione del denominatore e sostituendo direttamente nell'integrale

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}dx$$

$$\int \frac{1}{t^2-t}2tdx=\int \frac{1}{t-1}dx$$

3) Per calcolare l'area è necessario tracciare le curve e individuare l'area dal calcolare



$$Area = \int_1^2 [ln(x) - (x^2 - 3x + 2)]dx$$

Risolvendo l'integrale

$$Area = \left[x\, ln\, x - x - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\right]_1^2$$

$$Area = 2\, ln\, 2 - 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 - 1\, ln\, 1 + 1 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2$$

$$Area = 2\, ln\, 2 - \frac{5}{6}$$

5 dicembre 2025

Cognome Nome: _________________________	Matricola: __________________
Fogli aggiunti escluso il presente ____________	Docente: ___________________

1) Formula di Taylor e ipotesi di validità. Utilizzando gli sviluppi in serie di MacLaurin calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-senx}{e^x-cos(x)-x}$$

2) Calcolare l'integrale

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$$

3) Calcolare l'area della porzione di piano individuata dalla curva descritta dalla funzione

$f(x) = x^3 - 4x$, l'asse x e le rette di equazione x = 1 e x = 3.

Svolgimento

1) Sviluppiamo i vari termini necessari con MacLaurin

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+O(x^5)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O(x^5)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^4)$$

Sviluppiamo numeratore e denominatore fino al primo termine non nullo, sostituendo, semplificando e trascurando gli infinitesimi superiori.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-senx}{e^x-cos(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-senx}{e^x-cos(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{6}}{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

2) Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$$

Si effettua la sostituzione

$$e^x = t \Longrightarrow e^x\,dx = dt$$

Per cui l'integrale diventa:

$$\int \frac{dt}{t^2-1}$$

Si effettua la scomposizione in fratti semplici

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)}$$

Affinché il numeratore a primo membro sia uguale al numeratore a secondo membro deve essere:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$$

Dalla quale si ricava

$$A = \frac{1}{2}\ e\ B = -\frac{1}{2}$$

Per cui

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$$

Integrando

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{t}-1}{\mathrm{t}+1}\right| + \mathrm{C}$$

Esprimendo nuovamente l'integrale in funzione della variabile x

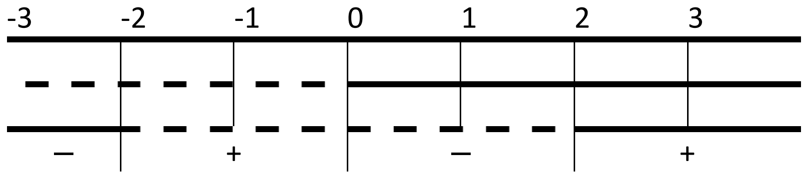
$$t = e^x$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

4) Per calcolare l’area della porzione di piano individuata dalla curva descritta dalla funzione

$f(x) = x^3 - 4x$, l’asse x e le rette di equazione x = 1 e x = 3, occorre studiare il segno della funzione $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$



Nell’intervallo d’integrazione $x \in [1;3]$ la funzione $f(x)$ è negativa per $x \in [1;2]$ ed è positiva per $x \in [2;3]$, per cui possiamo calcolare l’area come segue

$$Area = -\int_1^2 x^3 - 4xdx + \int_1^3 x^3 - 4xdx$$

$$Area = -\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_1^2 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_2^3 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2}$$

Si può anche rappresentare graficamente la funzione ed evidenziare l’area