Introduzione alla logica algebrica

Francesco Paoli
Dispense per gli studenti

December 14, 2025

Alcune notazioni che useremo in seguito:

- Se f è una funzione con dominio X e $Y \subseteq X$, definiamo

$$f[Y] := \{f(y) : y \in Y\}.$$

- Se $R \subseteq \mathcal{P}(X) \times X$ e $Y, Z \subseteq X$, definiamo

$$YRZ := YRz \text{ per ogni } z \in Z.$$

- Se $R, S \subseteq X^2$, definiamo:

$$aR \circ Sb := \text{esiste un } c \in X \text{ tale che } aRc \text{ e } cSb.$$

- $\mathbf{B}_2$ denota l'algebra di Boole a 2 elementi.
- Se $\mathbf{A}$ è una $\mathcal{L}$-algebra, $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ denota il reticolo delle congruenze di $\mathbf{A}$ e $Con(\mathbf{A})$ il suo universo.
- $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ denota l'algebra delle formule del linguaggio $\mathcal{L}$.
- Se $\alpha(x, \vec{y})$ è una $\mathcal{L}$-formula in $n+1$ variabili, $\mathbf{A}$ è una $\mathcal{L}$-algebra e $a, \vec{b}$ sono elementi di A, $\alpha^{\mathbf{A}}(a, \vec{b})$ denota l'elemento $v(\alpha(x, \vec{y}))$, dove v è una qualsiasi $\mathbf{A}$-valutazione tale che $v(x) = a$ e $v(y_i) = b_i$ per ogni $i \leq n$.

1 Relazioni di conseguenza

Definition 1 *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio e sia $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-algebra.*

- *Una* $\mathcal{L}$-sostituzione *è un endomorfismo di* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$.
- *Una* $\mathbf{A}$-valutazione *è un omomorfismo da* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ *ad* $\mathbf{A}$.

Definition 2 *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio. Una* relazione di conseguenza *su $\mathcal{L}$ è una relazione binaria $\vdash \subseteq \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})) \times Fm(\mathcal{L})$ che gode delle seguenti proprietà per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm(\mathcal{L})$ e per ogni $\alpha \in Fm(\mathcal{L})$:*

- *Riflessività: se* $\alpha \in \Gamma$*, allora* $\Gamma \vdash \alpha$*;*
- *Monotonia: se* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \subseteq \Delta$*, allora* $\Delta \vdash \alpha$*;*
- *Transitività: Se* $\Gamma \vdash \Delta$ *e* $\Delta \vdash \alpha$*, allora* $\Gamma \vdash \alpha$*.*

Definition 3 *Una relazione di conseguenza* $\vdash$ *su* $\mathcal{L}$ *si dice:*

- finitaria*, se ogniqualvolta* $\Gamma \vdash \alpha$*, esiste un sottoinsieme finito* Δ *di* Γ *tale che* $\Delta \vdash \alpha$*;*
- invariante per sostituzione*, se ogniqualvolta* $\Gamma \vdash \alpha$*, per ogni* $\mathcal{L}$*-sostituzione* σ *si ha anche* $\sigma[\Gamma] \vdash \sigma(\alpha)$*.*

Definition 4 *Una* logica *di linguaggio* $\mathcal{L}$ *è una coppia ordinata* $\mathrm{L} = \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \vdash_{\mathrm{L}} \rangle$*, dove* $\vdash_{\mathrm{L}}$ *è una relazione di conseguenza su* $\mathcal{L}$ *invariante per sostituzione. Una formula* α *è un* teorema *di* L *se* $\emptyset \vdash_{\mathrm{L}} \alpha$*; un insieme di formule* Γ *è un* antiteorema *di* L *se* $\Gamma \neq Fm(\mathcal{L})$ *e se per ogni* $\mathcal{L}$*-sostituzione* σ *e per ogni formula* α *si ha* $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathrm{L}} \alpha$*.*

1.1 Esempio: i calcoli logici

Le relazioni di derivabilità nei calcoli logici più familiari (alla Hilbert, deduzione naturale, tableaux, etc.) sono esempi di relazioni di conseguenza nel senso della Definizione 2. Diamo adesso una definizione di calcolo logico nella quale rientrano tutti gli esempi sopra citati.

Definition 5 *Sia* $\mathcal{L}$ *un linguaggio.*

- *Una* $\mathcal{L}$-inferenza *è una coppia ordinata* $\langle \Gamma, \alpha \rangle$*, dove* Γ *è un sottoinsieme finito o vuoto di* $Fm(\mathcal{L})$ *(detto insieme delle* premesse *dell'inferenza) e* α *è un elemento di* $Fm(\mathcal{L})$ *(detto* conclusione *dell'inferenza).*
- *Una* $\mathcal{L}$-regola di inferenza *è un insieme* R *di* $\mathcal{L}$*-inferenze, dette* istanze *di* R*, tale che ogniqualvolta* $\langle \Gamma, \alpha \rangle \in R$*, anche* $\langle \sigma[\Gamma], \sigma(\alpha) \rangle \in R$ *per ogni* $\mathcal{L}$*-sostituzione* σ*.*
- *Un* calcolo logico *di linguaggio* $\mathcal{L}$ *è un insieme di* $\mathcal{L}$*-regole di inferenza.*

Si noti che alcune delle regole di inferenza di un calcolo logico possono essere *assiomi*, ovvero insiemi di inferenze i cui insiemi delle premesse sono vuoti.

Definition 6 *Sia* $\mathcal{H}$ *un calcolo logico di linguaggio* $\mathcal{L}$*. Una* derivazione *in* $\mathcal{H}$ *della formula* α *dall'insieme di assunzioni* Γ *è un albero finito e etichettato da formule, la cui radice è etichettata da* α*, le cui foglie sono etichettate dalle conclusioni di istanze di assiomi o da elementi di* Γ*, e tale che, se un nodo è etichettato da* β *e i suoi predecessori immediati sono etichettati da* $\beta_1, ..., \beta_n$*, allora* $\langle \{\beta_1, ..., \beta_n\}, \beta \rangle$ *è istanza di una regola di* $\mathcal{H}$*.*

Se esiste una derivazione in $\mathcal{H}$ *di* α *da* Γ*, diciamo che* α *è* derivabile *in* $\mathcal{H}$ *da* Γ *e scriviamo* $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$*.*

Lemma 7 *Se $\mathcal{H}$ è un calcolo logico di linguaggio $\mathcal{L}$, la relazione $\vdash_{\mathcal{H}}$ è una relazione di conseguenza finitaria e invariante per sostituzione. Quindi, in particolare, $\mathrm{L}_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \vdash_{\mathcal{H}} \rangle$ è una logica.*

Proof. Dimostriamo anzitutto la riflessività. Se $\alpha \in \Gamma$, allora esiste una derivazione in $\mathcal{H}$ di α da Γ consistente in un unico nodo etichettato da α, che gioca il duplice ruolo di assunzione e conclusione (di se stessa). Quindi $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$.

Per la monotonia, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$, allora esiste una derivazione in $\mathcal{H}$ di α da Γ. Se abbiamo che $\Gamma \subseteq \Delta$, la medesima derivazione è anche una derivazione in $\mathcal{H}$ di α da Δ. Quindi $\Delta \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$.

Per la transitività, se $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \Delta$ e $\Delta \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$, allora esiste una derivazione D di α in $\mathcal{H}$ da Δ. Tale derivazione potrà usare come assunzioni solo un numero finito di formule di Δ, diciamo $\delta_1, ..., \delta_n$. Per ogni $i \leq n$, esiste però una derivazione di δ_i in $\mathcal{H}$ da Γ. Innestando tali alberi dimostrativi sulle foglie di D, otteniamo un albero dimostrativo che ha alla radice α, e alle foglie solo assunzioni di Γ. Quindi $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$.

$\vdash_{\mathcal{H}}$ è chiaramente finitaria: se $\Gamma \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$, allora esiste una derivazione in $\mathcal{H}$ di α da Γ. Poiché tale derivazione è un albero finito, le sue foglie conterranno al massimo gli elementi di un sottoinsieme finito Δ di Γ. Quindi $\Delta \vdash_{\mathcal{H}} \alpha$.

Il modo in cui abbiamo definito le regole di inferenza e le derivazioni (Definizioni 5 e 6) fa sì che $\vdash_{\mathcal{H}}$ sia invariante per sostituzione.

$\blacksquare$

1.2 Esempio: le matrici

Le relazioni di conseguenza sorgono non solo dalla sintassi (i calcoli logici), ma anche dalla semantica. Vediamo come.

Definition 8 *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio. Una $\mathcal{L}$-*matrice *è una coppia ordinata $\langle \mathbf{A}, F \rangle$, dove $\mathbf{A}$ è una $\mathcal{L}$-algebra e $F \subseteq A$.*

L'algebra $\mathbf{A}$ si dice il ridotto algebrico *di $\langle \mathbf{A}, F \rangle$, mentre F si dice l'insieme dei* valori designati *di $\langle \mathbf{A}, F \rangle$.*

Definition 9 *Siano $\mathcal{L}$ un linguaggio e $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ una $\mathcal{L}$-matrice. La relazione binaria $\vdash_{\langle \mathbf{A}, F \rangle} \subseteq \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})) \times Fm(\mathcal{L})$ è definita come segue:*

$$\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A}, F \rangle} \alpha \textit{ sse per ogni } \mathbf{A}\textit{-valutazione } v, v[\Gamma] \subseteq F \textit{ implica } v[\alpha] \in F.$$

Definition 10 *Siano $\mathcal{L}$ un linguaggio, $\mathrm{L} = \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \vdash_{\mathrm{L}} \rangle$ una logica di linguaggio $\mathcal{L}$ e $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ una $\mathcal{L}$-matrice.*

- *$\langle \mathbf{A}, F \rangle$ è un* modello *di L se $\vdash_{\mathrm{L}} \subseteq \vdash_{\langle \mathbf{A}, F \rangle}$. In questo caso F si dice un* filtro deduttivo *di L su $\mathbf{A}$.*

- *L è* completa *rispetto a $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ se $\vdash_{\mathrm{L}} = \vdash_{\langle \mathbf{A}, F \rangle}$.*

Lemma 11 *Se $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ è una $\mathcal{L}$-matrice, allora $\vdash_{\langle \mathbf{A}, F \rangle}$ è una relazione di conseguenza invariante per sostituzione. Quindi, in particolare, $\langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \vdash_{\langle \mathbf{A}, F \rangle} \rangle$ è una logica.*

Proof. La riflessivita, monotonia e transitività di $\vdash_{\langle \mathbf{A},F\rangle}$ possono essere dimostrate per esercizio.

Vediamo l'invarianza per sostituzione. Dobbiamo far vedere che se $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A},F\rangle} \alpha$, allora per ogni sostituzione σ, $\sigma[\Gamma] \vdash_{\langle \mathbf{A},F\rangle} \sigma(\alpha)$. Svolgendo la definizione, quest'ultima espressione significa: per ogni $\mathbf{A}$-valutazione v, se $v[\sigma[\Gamma]] \subseteq F$, allora $v(\sigma(\alpha)) \in F$.

Supponiamo dunque che $v[\sigma[\Gamma]] \subseteq F$. Ora, poiché σ è un omomorfismo da $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ a se stessa, e v è un omomorfismo da $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ ad $\mathbf{A}$, la funzione composta $v \circ \sigma$ definita da

$$v \circ \sigma(\alpha) := v(\sigma(\alpha))$$

è una funzione da $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ ad $\mathbf{A}$. Ma sappiamo dall'algebra universale che la composizione di omomorfismi è un omomorfismo. Quindi $v \circ \sigma$ è un omomorfismo da $\mathbf{Fm}(\mathcal{L})$ ad $\mathbf{A}$, ovvero una $\mathbf{A}$-valutazione. Poiché $v \circ \sigma[\Gamma] \subseteq F$ e $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A},F\rangle} \alpha$, ne segue $v \circ \sigma(\alpha) \in F$, che è quanto volevamo dimostrare. ■

Si osservi che $\vdash_{\langle \mathbf{A},F\rangle}$ non è detto che sia finitaria. Lo è quando $\mathbf{A}$ è un'algebra finita, cosa che non dimostreremo.

Facciamo ora alcuni esempi. Sia $\mathcal{L}_0$ il linguaggio classico. La logica classica proposizionale CL può essere definita sintatticamente come la coppia $\langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0), \vdash_{\mathcal{HK}}\rangle$, dove $\vdash_{\mathcal{HK}}$ è la relazione di derivabilità del calcolo alla Hilbert $\mathcal{HK}$, oppure semanticamente, come la coppia $\langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0), \vdash_{\langle \mathbf{B}_2,\{1\}\rangle}\rangle$. Svolgendo la definizione di $\vdash_{\langle \mathbf{B}_2,\{1\}\rangle}$, abbiamo:

$$\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{B}_2,\{1\}\rangle} \alpha \quad \text{sse} \quad \text{per ogni } \mathbf{B}_2\text{-valutazione } v,\ v[\Gamma] \subseteq \{1\} \text{ implica } v(\alpha) = 1.$$

Ma questa non è altro che la relazione di conseguenza logica classica. Il teorema di adeguatezza per $\mathcal{HK}$ ci dice che le due relazioni coincidono.

Due tra le più famose logiche a tre valori possono essere definite tramite matrici logiche. Sia $\mathbf{SK}$ la $\mathcal{L}_0$-algebra il cui universo è l'insieme $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ e le cui operazioni si comportano secondo le seguenti tavole:

$\neg$	
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

Su quest'algebra possono essere costruite almeno due matrici rispetto alle quali l'interpretazione dei valori di verità risulta plausibile. Definiamo nel seguente modo la *logica di Kleene forte* K_3 (introdotta da S.C. Kleene) e la *logica del paradosso* LP (introdotta indipendentemente da F.G. Asenjo e G. Priest):

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_3 &:= \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0), \vdash_{\langle \mathbf{SK},\{1\}\rangle}\rangle; \\ \mathrm{LP} &:= \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0), \vdash_{\langle \mathbf{SK},\{1,\frac{1}{2}\}\rangle}\rangle. \end{aligned}$$

In K_3 il valore $\frac{1}{2}$ è interpretato come "né vero né falso", e quindi le inferenze conducono da premesse vere a una conclusione vera. In LP il valore $\frac{1}{2}$ è interpretato come "sia vero sia falso", e quindi le inferenze conducono da premesse *almeno* vere (magari anche false) a una conclusione almeno vera (magari anche falsa).

1.3 Relazioni di conseguenza e operatori di chiusura

In questa sottosezione, mostriamo come la nozione di relazione di conseguenza sia equivalentemente formulabile in termini di operatori di chiusura su insiemi di formule, un approccio dovuto a A. Tarski che lo sviluppò negli anni '20 del secolo scorso.

Theorem 12 *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio. Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme R di tutte le relazioni di conseguenza su $\mathcal{L}$ e l'insieme O di tutti gli operatori di chiusura sul poset $\langle \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})), \subseteq \rangle$.*

Proof. Come già visto in numerosi altri teoremi simili, dobbiamo cercare due funzioni $f : R \to O$ e $g : O \to R$ che siano reciprocamente inverse, ovvero tali che $g(f(\vdash)) = \vdash$ per ogni $\vdash \in R$ e $f(g(C)) = C$ per ogni $C \in O$.

Se $\vdash$ è una relazione di conseguenza su $\mathcal{L}$, definiamo $C_\vdash : \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})) \to \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L}))$ nel modo seguente:

$$C_\vdash(\Gamma) := \{\alpha \in Fm(\mathcal{L}) : \Gamma \vdash \alpha\}.$$

Se C è un operatore di chiusura su $\langle \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})), \subseteq \rangle$, definiamo $\vdash_C \subseteq \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})) \times Fm(\mathcal{L})$ nel modo seguente:

$$\Gamma \vdash_C \alpha \text{ sse } \alpha \in C(\Gamma).$$

Mostriamo adesso:

1) *$C_\vdash$ è un operatore di chiusura.* Mostriamo che $C_\vdash$ è espansivo, ossia $\Gamma \subseteq C_\vdash(\Gamma)$ per ogni $\Gamma \subseteq Fm(\mathcal{L})$. Se dunque $\alpha \in \Gamma$, poiché $\vdash$ è riflessiva, segue che $\Gamma \vdash \alpha$, ovvero $\alpha \in C_\vdash(\Gamma)$. Per far vedere che $C_\vdash$ è idempotente, dobbiamo accertarci che $C_\vdash(C_\vdash(\Gamma)) = C_\vdash(\Gamma)$ per ogni $\Gamma \subseteq Fm(\mathcal{L})$. L'inclusione da destra a sinistra vale per l'espansività di $C_\vdash(\Gamma)$, che abbiamo appena stabilito. Da sinistra a destra, supponiamo $\alpha \in C_\vdash(C_\vdash(\Gamma))$. Svolgendo la definizione,

$$\begin{aligned} \alpha \in C_\vdash(C_\vdash(\Gamma)) &\iff C_\vdash(\Gamma) \vdash \alpha \\ &\iff \Delta \vdash \alpha \text{ per qualche } \Delta \text{ tale che } \Gamma \vdash \Delta. \end{aligned}$$

Poiché però $\vdash$ è transitiva, questo implica $\Gamma \vdash \alpha$, ovvero $\alpha \in C_\vdash(\Gamma)$. Infine, stabiliamo che $C_\vdash$ è un endomorfismo d'ordine su $\langle \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})), \subseteq \rangle$, ovvero che per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq Fm(\mathcal{L})$, se $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $C_\vdash(\Gamma) \subseteq C_\vdash(\Delta)$. Supponiamo dunque $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\alpha \in C_\vdash(\Gamma)$, ovvero $\Gamma \vdash \alpha$. Poiché $\vdash$ è monotona, questo implica $\Delta \vdash \alpha$, ovvero $\alpha \in C_\vdash(\Delta)$.

2) *$\vdash_C$ è una relazione di conseguenza.* Per la riflessività, dobbiamo mostrare che se $\Gamma \subseteq Fm(\mathcal{L})$ e $\alpha \in \Gamma$, allora $\Gamma \vdash_C \alpha$. Ma poiché C è espansivo, $\alpha \in \Gamma \subseteq C(\Gamma)$, da cui la nostra conclusione segue. Per la monotonia, occorre accertare che se $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq Fm(\mathcal{L})$ e $\Gamma \vdash_C \alpha$, allora $\Delta \vdash_C \alpha$. Se $\Gamma \vdash_C \alpha$, allora per definizione

$\alpha \in C(\Gamma)$. Poiché C è un endomorfismo d'ordine, da $\Gamma \subseteq \Delta$ segue $C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$. Dunque $\alpha \in C(\Delta)$, ovvero $\Delta \vdash_C \alpha$. Infine, per la transitività, $\Gamma \vdash_C \Delta$ e $\Delta \vdash_C \alpha$ devono implicare $\Gamma \vdash_C \alpha$. Svolgendo le definizioni, le nostre ipotesi comportano che $\alpha \in C(\Delta)$ e $\Delta \subseteq C(\Gamma)$. Usando il fatto che C è sia idempotente che un endomorfismo d'ordine, segue $\alpha \in C(\Delta) \subseteq C(C(\Gamma)) = C(\Gamma)$, ovvero $\Gamma \vdash_C \alpha$.

3) $\vdash_{C_\vdash} = \vdash$. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash_{C_\vdash} \alpha &\iff \alpha \in C_\vdash(\Gamma) \\ &\iff \Gamma \vdash \alpha. \end{aligned}$$

4) $C_{\vdash_C} = C$. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} C_{\vdash_C}(\Gamma) &= \{\alpha \in Fm(\mathcal{L}) : \Gamma \vdash_C \alpha\} \\ &= \{\alpha \in Fm(\mathcal{L}) : \alpha \in C(\Gamma)\} \\ &= C(\Gamma). \end{aligned}$$

■

2 Modelli matriciali e congruenza di Leibniz

2.1 La congruenza di Leibniz

Definition 13 *Sia* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-algebra e sia* $F \subseteq A$. *Una congruenza* θ *su* $\mathbf{A}$ *si dice* compatibile *con* F *se, ogniqualvolta* $a \in F$ *e* $a\theta b$, *si ha anche* $b \in F$.

In altri termini, θ è compatibile con F se F è un'unione di classi di congruenza di θ.

Lemma 14 *Sia* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-algebra e sia* $F \subseteq A$. *Le congruenze su* $\mathbf{A}$ *compatibili con* F *formano un sottoreticolo completo di* $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$.

Proof. Si ricordi dall'algebra universale che $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ è un reticolo completo, i cui meets e joins possono essere così descritti:

$$\begin{aligned} \bigwedge\{\theta_i : i \in I\} &:= \bigcap\{\theta_i : i \in I\}; \\ \bigvee\{\theta_i : i \in I\} &:= \bigcup\{\theta_{n_1} \circ ... \circ \theta_{n_k} : n_1, ..., n_k \in I, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Devo far vedere che l'insieme delle congruenze su $\mathbf{A}$ compatibili con F è chiuso rispetto ai meets e ai joins di $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$, e per quanto detto prima è sufficiente mostrare che è chiuso rispetto a intersezioni arbitrarie e a composizioni binarie.

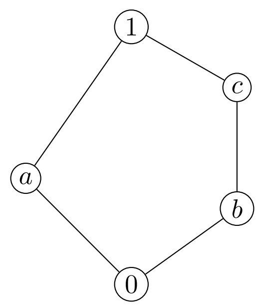
Supponiamo quindi che per ogni $i \in I$, θ_i sia compatibile con F, che $a \in F$ e che $\langle a, b\rangle \in \bigcap\{\theta_i : i \in I\}$. Ne segue che per ogni $i \in I$, $a\theta_i b$. Per l'ipotesi di compatibilità, $b \in F$. Dunque $\bigcap\{\theta_i : i \in I\}$ è compatibile con F.

Supponiamo che θ e ψ siano entrambe compatibili con F, che $a \in F$ e che $\langle a, b\rangle \in \theta \circ \psi$. Ciò vuol dire che per qualche $c \in A$, $a\theta c$ e $c\psi b$. Per l'ipotesi di compatibilità, poiché $a \in F$ e $a\theta c$, segue che $c \in F$. Poiché $c \in F$ e $c\psi b$, segue che $b \in F$. Dunque $\theta \circ \psi$ è compatibile con F. ■

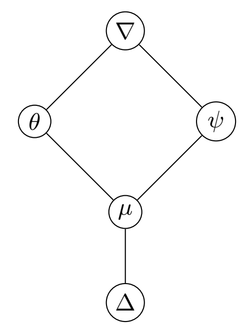
Per il Lemma 14, per ogni $F \subseteq A$ ci sarà sempre una più grande congruenza su $\mathbf{A}$ compatibile con F, poiché ogni sottoreticolo completo di un reticolo ha un elemento massimo.

Definition 15 *Sia* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-algebra e sia* $F \subseteq A$. *La* congruenza di Leibniz *di* F *su* $\mathbf{A}$ *è la più grande congruenza su* $\mathbf{A}$ *compatibile con* F. *Verrà denotata con* $\Omega^{\mathbf{A}} F$.

Se $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ è una $\mathcal{L}$-matrice, $\Omega^{\mathbf{A}} F$ verrà anche chiamata la congruenza di Leibniz di $\langle \mathbf{A}, F \rangle$. Facciamo adesso un esempio. Questo è il diagramma di Hasse del reticolo non modulare $\mathbf{N}_5$.



Il suo reticolo delle congruenze è rappresentato qui sotto:



dove:

$$\begin{aligned} \theta &= \{\{0, b, c\}, \{a, 1\}\} \\ \psi &= \{\{1, b, c\}, \{a, 0\}\} \\ \mu &= \{\{b, c\}, \{0\}, \{a\}, \{1\}\}. \end{aligned}$$

Si ha che le congruenze compatibili con $\{0, b, c\}$ sono Δ, μ, θ, per cui $\Omega^{\mathbf{N}_5}\{0, b, c\} = \theta$. Le congruenze compatibili con $\{0, a\}$ sono Δ, μ, ψ, per cui $\Omega^{\mathbf{N}_5}\{0, a\} = \psi$. Le congruenze compatibili con $\{0, 1\}$ sono Δ, μ, per cui $\Omega^{\mathbf{N}_5}\{0, 1\} = \mu$. L'unica congruenza compatibile con $\{0, c\}$ è Δ, per cui $\Omega^{\mathbf{N}_5}\{0, c\} = \Delta$.

Presentiamo adesso la cosiddetta caratterizzazione polinomiale della congruenza di Leibniz, comoda nelle applicazioni. Intuitivamente, ci dice che due elementi sono Leibniz-congruenti rispetto ad F se possono essere sostituiti in ogni contesto senza perturbare l'appartenenza o meno a F.

Lemma 16 *Siano* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-algebra,* $F \subseteq A$ *e* $a, b \in A$*. Si ha che* $a\Omega^{\mathbf{A}}Fb$ *sse per ogni* $\mathcal{L}$*-formula* $\alpha(x, \vec{y})$ *in* $n+1$ *variabili e per ogni* $\vec{c}$ *in* A*,* $\alpha^{\mathbf{A}}(a, \vec{c}) \in F$ *sse* $\alpha^{\mathbf{A}}(b, \vec{c}) \in F$*.*

Proof. Definiamo anzitutto

$\theta := \{\langle a, b\rangle \in A^2 :$ per ogni $\alpha(x, \vec{y})$ e per ogni $\vec{c}, \alpha^{\mathbf{A}}(a, \vec{c}) \in F$ sse $\alpha^{\mathbf{A}}(b, \vec{c}) \in F\}$.

Per mostrare che $\theta = \Omega^{\mathbf{A}}F$, dobbiamo far vedere che:

1. è una congruenza;

2. è compatibile con F;

3. ogni altra congruenza compatibile con F è inclusa in essa.

Per 1. l'unico punto difficile è far vedere che θ preserva le operazioni. Sia dunque g un simbolo di operazione m-ario di $\mathcal{L}$. Supponiamo che per ogni $i \leq m$ si abbia $a_i \theta b_i$, ovvero che per ogni $i \leq m$ e per ogni formula γ si abbia $\gamma^{\mathbf{A}}(a_i, \vec{c}) \in F$ sse $\gamma^{\mathbf{A}}(b_i, \vec{c}) \in F$. Dobbiamo mostrare che $g(\vec{a})\theta g(\vec{b})$, ovvero che per ogni formula α, $\alpha^{\mathbf{A}}(g(\vec{a}), \vec{c}) \in F$ sse $\alpha^{\mathbf{A}}(g(\vec{b}), \vec{c}) \in F$.

Definiamo dunque, per d elemento qualsiasi di A e per una generica formula α in $n+1$ variabili:

$$\begin{array}{rcl} \beta_1^{\mathbf{A}}(d, \vec{c}) & := & \alpha^{\mathbf{A}}(g^{\mathbf{A}}(d, a_2, ..., a_m), \vec{c}) \\ \beta_2^{\mathbf{A}}(d, \vec{c}) & := & \alpha^{\mathbf{A}}(g^{\mathbf{A}}(b_1, d, a_3, ..., a_m), \vec{c}) \\ \beta_3^{\mathbf{A}}(d, \vec{c}) & := & \alpha^{\mathbf{A}}(g^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, d, ..., a_m), \vec{c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_m^{\mathbf{A}}(d, \vec{c}) & := & \alpha^{\mathbf{A}}(g^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, ..., b_{m-1}, d), \vec{c}). \end{array}$$

Sappiamo però che per ogni $i \leq m$, a_i e b_i sono θ-congruenti, quindi possono essere sostituiti in ogni contesto, ivi compresi i contesti $\beta_1, ..., \beta_m$, senza alterare l'appartenenza a F. Dunque:

$$\alpha^{\mathbf{A}}(g(\vec{a}),\vec{c}) = \beta_1^{\mathbf{A}}(a_1,\vec{c}) \in F \text{ sse } \beta_1^{\mathbf{A}}(b_1,\vec{c}) = \beta_2^{\mathbf{A}}(b_2,\vec{c}) \in F \text{ sse } \ldots \text{ sse } \beta_m^{\mathbf{A}}(b_m,\vec{c}) = \alpha^{\mathbf{A}}(g(\vec{b}),\vec{c}) \in F.$$

Per 2., supponiamo che $a\theta b$ e che $a \in F$. Poiché ogni variabile x è una formula, abbiamo che $a = x^{\mathbf{A}}(a) \in F$ sse $b = x^{\mathbf{A}}(b) \in F$.

Infine, per 3., supponiamo che ψ sia una congruenza compatibile con F. Se $a\psi b$, allora per ogni formula $\alpha(x, \vec{y})$ e per ogni $\vec{c}$ in A avremo che $\alpha^{\mathbf{A}}(a, \vec{c})\psi\alpha^{\mathbf{A}}(b, \vec{c})$. Se $\alpha^{\mathbf{A}}(a, \vec{c}) \in F$, poiché ψ è compatibile, allora anche $\alpha^{\mathbf{A}}(b, \vec{c}) \in F$. Ne segue che $\psi \subseteq \theta$. ■

2.2 Modelli Leibniz-ridotti

Se L $= \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \vdash_{\mathrm{L}} \rangle$ è una logica, denotiamo con $\mathsf{Mod}(\mathrm{L})$ la classe di tutti i modelli di L. Ci rendiamo subito conto, però, del fatto che $\mathsf{Mod}(\mathrm{L})$ è una classe troppo ampia. Per esempio, se $\mathbf{A}$ è una qualsiasi L-algebra, la matrice $\langle \mathbf{A}, A\rangle \in \mathsf{Mod}(\mathrm{L})$. Infatti, se $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \alpha$, ogni valutazione v sarà tale che $v[\Gamma] \subseteq A$ e anche $v[\alpha] \in A$, e quindi non ci potrà mai essere un controesempio a $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \alpha$.

Vogliamo perciò restringere la classe $\mathsf{Mod}(\mathrm{L})$ a una classe più ristretta e maneggevole, eliminando tali casi patologici, possibilmente in modo che l'appartenenza di una matrice a tale classe ci dia qualche informazione significativa sul suo ridotto algebrico.

Definition 17 *Una $\mathcal{L}$-matrice $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ si dice* Leibniz-ridotta *(o semplicemente* ridotta*) se $\Omega^{\mathbf{A}}F = \Delta^{\mathbf{A}}$.*

Definition 18 *Se $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ è una $\mathcal{L}$-matrice, la sua* riduzione *è la $\mathcal{L}$-matrice*

$$\langle \mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F, F/\Omega^{\mathbf{A}}F\rangle,$$

dove

$$F/\Omega^{\mathbf{A}}F := \{[a]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} : a \in F\}.$$

Lemma 19 *Se $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ è una $\mathcal{L}$-matrice, la sua riduzione $\langle \mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F, F/\Omega^{\mathbf{A}}F\rangle$ è sempre Leibniz-ridotta.*

Proof. Risulta sufficiente far vedere che se θ è una congruenza su $\mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F$ compatibile con $F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, θ è l'identità. Supponiamo dunque che θ sia una congruenza su $\mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F$ compatibile con $F/\Omega^{\mathbf{A}}F$. Definiamo

$$\tilde{\theta} := \{\langle a, b\rangle : \langle [a]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}, [b]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}\rangle \in \theta\}.$$

Osserviamo:

- $\tilde{\theta}$ è una congruenza su $\mathbf{A}$. Infatti è riflessiva, simmetrica, transitiva e rispetta le operazioni proprio perché anche θ ha queste proprietà.
- $\tilde{\theta}$ è compatibile con F. Infatti, per definizione $[a]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} \in F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, e visto che θ è compatibile con $F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, $[b]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} \in F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, ovvero $b \in F$.

Quindi $\tilde{\theta} \subseteq \Omega^{\mathbf{A}}F$, perché $\Omega^{\mathbf{A}}F$ è la più grande congruenza su $\mathbf{A}$ compatibile con F. Ma vale anche $\Omega^{\mathbf{A}}F \subseteq \tilde{\theta}$. Infatti, se $a\Omega^{\mathbf{A}}Fb$, allora $[a]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} = [b]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}$ e quindi senz'altro $\langle [a]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}, [b]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}\rangle \in \theta$, ovvero $a\tilde{\theta}b$. In conclusione, $\tilde{\theta} = \Omega^{\mathbf{A}}F$. Ne segue che:

$$\langle [a]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}, [b]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}\rangle \in \theta \text{ sse } \langle a, b\rangle \in \tilde{\theta} = \Omega^{\mathbf{A}}F \text{ sse } [a]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} = [b]_{\Omega^{\mathbf{A}}F},$$

che era quanto volevamo dimostrare. ■

Il processo di riduzione di una matrice non comporta alcuna perdita di informazione a livello della relazione di conseguenza descritta nella Definizione 9. Infatti, è possibile dimostrare che una matrice e la sua riduzione determinano la stessa relazione di conseguenza.

Theorem 20 *Siano $\mathcal{L}$ un linguaggio, $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ una $\mathcal{L}$-matrice e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm(\mathcal{L})$. Si ha che $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A}, F\rangle} \alpha$ sse $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F, F/\Omega^{\mathbf{A}}F\rangle} \alpha$.*

Proof. Supponiamo che $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A}, F\rangle} \alpha$, e che w sia una $\mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F$-valutazione tale che $w[\Gamma] \subseteq F/\Omega^{\mathbf{A}}F$. Ma w assegna a ciascuna formula in $Fm(\mathcal{L})$ una classe di congruenza modulo $\Omega^{\mathbf{A}}F$. Quindi esiste una $\mathbf{A}$-valutazione v tale che per ogni formula β:

$$[v(\beta)]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} = w(\beta).$$

Poiché $w[\Gamma] \subseteq F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, abbiamo quindi che per ogni $\gamma \in \Gamma$, $[v(\gamma)]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} \in F/\Omega^{\mathbf{A}}F$. Per definizione di $F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, questo significa $v[\Gamma] \subseteq F$. Dal momento che $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A}, F\rangle} \alpha$, ne segue che $v(\alpha) \in F$. Quindi:

$$w(\alpha) = [v(\alpha)]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} \in F/\Omega^{\mathbf{A}}F.$$

Viceversa, supponiamo $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F, F/\Omega^{\mathbf{A}}F\rangle} \alpha$, e sia v una $\mathbf{A}$-valutazione per cui $v[\Gamma] \subseteq F$. Per definizione di $F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, questo significa che per ogni $\gamma \in \Gamma$, $[v(\gamma)]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} \subseteq F/\Omega^{\mathbf{A}}F$. Ma sappiamo che $\Gamma \vdash_{\langle \mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F, F/\Omega^{\mathbf{A}}F\rangle} \alpha$. Poiché la funzione w definita per ogni formula β da

$$w(\beta) = [v(\beta)]_{\Omega^{\mathbf{A}}F}$$

è una $\mathbf{A}/\Omega^{\mathbf{A}}F$-valutazione, ne segue che $w(\alpha) = [v(\alpha)]_{\Omega^{\mathbf{A}}F} \in F/\Omega^{\mathbf{A}}F$, ossia $v(\alpha) \in F$. ■

Da qui in avanti, data una logica L, denoteremo con $\mathsf{Mod}^*(\mathrm{L})$ la classe di tutti i modelli Leibniz-ridotti di L, e con $\mathsf{Alg}^*(\mathrm{L})$ la classe dei loro ridotti algebrici.

2.3 Modelli della logica classica

Esemplifichiamo l'importanza delle precedenti nozioni mediante la logica più nota: CL, la logica classica, definita in uno dei due modi equivalenti che abbiamo visto nella Sottosezione 1.2. Chiediamoci intanto se possiamo caratterizzare quei modelli in $\mathsf{Mod}(\mathrm{CL})$ il cui ridotto algebrico è un'algebra di Boole. Il prossimo lemma ci dà una risposta soddisfacente.

Lemma 21 *Se $\mathbf{A}$ è un'algebra di Boole, allora le seguenti due condizioni sono equivalenti:*

1. $\langle \mathbf{A}, F\rangle \in \mathsf{Mod}(\mathrm{CL})$;
2. *F è un filtro reticolare di $\mathbf{A}$.*

Proof. Dimostriamo che 1. implica 2. $\langle \mathbf{A}, F\rangle \in \mathsf{Mod}(\mathrm{CL})$ significa che per ogni $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm(\mathcal{L})$ e per ogni $\mathbf{A}$-valutazione v, se $\Gamma \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha$ e $v[\Gamma] \subseteq F$ allora $v(\alpha) \in F$. Dobbiamo dimostrare che F è chiuso verso l'alto e che è chiuso rispetto ai meet. Supponiamo quindi che $a \in F$ e $a \leq b$, ovvero $a \wedge b = a$. Ne segue $a \wedge b \in F$. Poiché $x \wedge y \vdash_{\mathrm{CL}} y$, se v è tale che $v(x) = a, v(y) = b$, abbiamo che $v(x \wedge y) = v(x) \wedge v(y) \in F$ e dunque $b = v(y) \in F$. Similmente, la chiusura rispetto ai meet segue dal fatto che $x, y \vdash_{\mathrm{CL}} x \wedge y$.

Dimostriamo che 2. implica 1. Dobbiamo dimostrare che se F è un filtro reticolare, allora per ogni $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm(\mathcal{L})$ e per ogni $\mathbf{A}$-valutazione v, se

$\Gamma \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha$ e $v[\Gamma] \subseteq F$ allora $v(\alpha) \in F$. Sia dunque $\Gamma \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha$ e $v[\Gamma] \subseteq F$. Notiamo anzitutto che per la sua definizione e il Lemma 7, $\vdash_{\mathrm{CL}}$ è finitaria. Quindi esistono $\gamma_1, ..., \gamma_n$ in Γ tali che $\gamma_1, ..., \gamma_n \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha$. Poiché sappiamo che $v(\gamma_1) \in F, ..., v(\gamma_n) \in F$ e sappiamo anche che F è chiuso rispetto ai meet, $v(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) = v(\gamma_1) \wedge ... \wedge v(\gamma_n) \in F$. Per il teorema di deduzione, inoltre, $\gamma_1, ..., \gamma_n \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha$ è equivalente a $\vdash_{\mathrm{CL}} \gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \to \alpha$, da cui $v(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \to \alpha) = v(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n) \to v(\alpha) \in F$. Abbreviando $v(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)$ con c e ricordando che $x \to y$ è un'abbreviazione per $\neg x \vee y$, abbiamo $c \in F, \neg c \vee v(\alpha) \in F$. Quindi $c \wedge (\neg c \vee v(\alpha)) = 0 \vee (c \wedge v(\alpha)) = c \wedge v(\alpha) \in F$, perché F è chiuso rispetto ai meet, e poiché è anche chiuso verso l'alto, $v(\alpha) \in F$. ■

Se dai generici modelli di CL passiamo ai suoi modelli Leibniz-ridotti su un'algebra di Boole, i filtri deduttivi sono ancora più maneggevoli: consistono nel singoletto dell'elemento massimo dell'algebra di Boole medesima.

Lemma 22 *Se* $\mathbf{A}$ *è un'algebra di Boole, allora le seguenti due condizioni sono equivalenti:*

1. $\langle \mathbf{A}, F \rangle \in \mathsf{Mod}^*(\mathrm{CL})$;
2. $F = \{1^{\mathbf{A}}\}$.

Proof. 1. implica 2. Sia $\mathbf{A}$ un'algebra di Boole e sia $F \subseteq A$. Definiamo:

$$\theta_F := \{\langle a, b \rangle \in A : \neg a \vee b, \neg b \vee a \in F\}.$$

Dimostriamo che, se $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ è un modello di CL, allora $\theta_F = \Omega^{\mathbf{A}} F$.

Innanzitutto, θ_F è una congruenza. I dettagli di questa affermazione possono essere verificati per esercizio, ma facciamo vedere ad esempio che se $a \theta_F b$, allora $\neg a \theta_F \neg b$. Infatti, se $\neg a \vee b, \neg b \vee a \in F$, allora $\neg\neg a \vee \neg b, \neg\neg b \vee \neg a \in F$, da cui la conclusione.

Inoltre, θ_F è compatibile con F. Se infatti $a \theta_F b$ e $a \in F$, allora, poiché F è un filtro reticolare per il Lemma 21, $a \wedge (\neg a \vee b) = (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \in F$, e quindi $b \in F$.

Infine, θ_F è la più grande congruenza compatibile con F. Supponiamo che θ sia compatibile con F, e mostriamo $\theta \subseteq \theta_F$. Se dunque $a \theta b$, poiché senz'altro $\neg b \theta \neg b$, si ha che $a \vee \neg b \theta b \vee \neg b = 1$. Poiché $1 \in F$ e θ è compatibile con F, anche $a \vee \neg b \in F$. In modo simile, si dimostra che $b \vee \neg a \in F$, da cui $a \theta_F b$.

Osserviamo anche che

$$\begin{aligned} [1]_{\theta_F} &= \{a : a \theta_F 1\} \\ &= \{a : \neg a \vee 1, \neg 1 \vee a \in F\} \\ &= \{a : 1, 0 \vee a \in F\} \\ &= \{a : a \in F\} \\ &= F. \end{aligned}$$

Adesso, se $\langle \mathbf{A}, F \rangle \in \mathsf{Mod}^*(\mathrm{CL})$, $\Omega^{\mathbf{A}} F$, che per quanto appena dimostrato coincide con θ_F, è l'identità su $\mathbf{A}$. Se $a \in F$, allora $a \in [1]_{\theta_F}$ e quindi $a \theta_F 1$. Ne segue che $a = 1$.

2. implica 1. Il fatto che, se $\mathbf{A}$ è un'algebra di Boole, $\langle \mathbf{A}, \{1^{\mathbf{A}}\}\rangle$ sia un modello di CL può essere dimostrato ad esempio per induzione sulla lunghezza delle derivazioni nel calcolo $\mathcal{HK}$. Osservando infine che presi due elementi qualsiasi a e b di un'algebra di Boole, $a = b$ sse $\neg a \vee b = 1$ e $\neg b \vee a = 1$, ne segue per quanto dimostrato sopra che $\Omega^{\mathbf{A}}\{1\} = \theta_{\{1\}} = \{\langle a, b\rangle : \neg a \vee b = 1, \neg b \vee a = 1\} = \{\langle a, b\rangle : a = b\} = \Delta^{\mathbf{A}}$. ■

Adesso proviamo che la classe $\mathcal{BA}$ delle algebre di Boole coincide con la classe dei ridotti algebrici di modelli Leibniz-ridotti di CL.

Theorem 23 $\mathsf{Alg}^*(\mathrm{CL}) = \mathcal{BA}$.

Proof. Iniziamo osservando che, se $\mathbf{A}$ è un'algebra di Boole, allora per il Lemma 22 esiste sicuramente un modello Leibniz-ridotto di CL che ha $\mathbf{A}$ come ridotto algebrico: $\langle \mathbf{A}, \{1^{\mathbf{A}}\}\rangle$. Quindi $\mathcal{BA} \subseteq \mathsf{Alg}^*(\mathrm{CL})$.

Vediamo ora l'altra inclusione. Sia $\langle \mathbf{A}, F\rangle \in \mathsf{Mod}^*(\mathrm{CL})$, e supponiamo per assurdo che $\mathbf{A} \notin \mathcal{BA}$. Quindi esiste un'identità $\beta \approx \gamma$ che vale in tutte le algebre di Boole, ma non è soddisfatta da $\mathbf{A}$. Il fatto che $\beta \approx \gamma$ non è soddisfatta da $\mathbf{A}$ significa: esiste una $\mathbf{A}$-valutazione v tale che $v(\beta) \neq v(\gamma)$. Poiché però $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ è Leibniz-ridotto, questo significa che $\langle v(\beta), v(\gamma)\rangle \notin \Omega^{\mathbf{A}} F$.

A questo punto entra in gioco il Lemma 16. Dal momento che $\langle v(\beta), v(\gamma)\rangle \notin \Omega^{\mathbf{A}} F$, allora esistono una $\mathcal{L}_0$-formula $\alpha(x, \vec{y})$ in $n+1$ variabili e degli elementi $\vec{c}$ in A, tali che $\alpha^{\mathbf{A}}(v(\beta), \vec{c}) \in F$ ma $\alpha^{\mathbf{A}}(v(\gamma), \vec{c}) \notin F$. Poiché inoltre $\beta \approx \gamma$ vale in tutte le algebre di Boole, vale in particolare in $\mathbf{B}_2$, il che è equivalente a dire che $\mathbf{B}_2$ assegna sempre lo stesso valore (1 o 0) a β e a γ. Pensando a come viene definita $\vdash_{\mathrm{CL}}$, questo significa inoltre che $\vdash_{\mathrm{CL}} \beta \leftrightarrow \gamma$. Poiché v è una $\mathbf{A}$-valutazione e $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ è un modello di CL, $v(\beta \leftrightarrow \gamma) \in F$. Per il teorema di rimpiazzamento di CL, si ha però che due formule dimostrabilmente equivalenti possono essere rimpiazzate in ogni contesto (quindi, in particolare, in α) senza perturbare la relazione di conseguenza:

$$\beta \leftrightarrow \gamma, \alpha[x/\beta] \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha[x/\gamma].$$

Siccome $v(\beta \leftrightarrow \gamma) \in F$ e anche $v(\alpha[x/\beta]) = \alpha^{\mathbf{A}}(v(\beta), \vec{c}) \in F$, ne scenderebbe che $v(\alpha[x/\gamma]) = \alpha^{\mathbf{A}}(v(\gamma), \vec{c}) \in F$, il che ci porta a una contraddizione. ■

3 Logiche algebrizzabili

3.1 Semantica algebrica

Definition 24 *Sia $\mathcal{K}$ una classe di $\mathcal{L}$-algebre. La* relazione di conseguenza equazionale *di $\mathcal{K}$ è la relazione $\vdash_{Eq(\mathcal{K})} \subseteq \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})^2) \times Fm(\mathcal{L})^2$ così definita per ogni $\Sigma \cup \{\alpha \approx \beta\} \subseteq Fm(\mathcal{L})^2$:*

$$\Sigma \vdash_{Eq(\mathcal{K})} \alpha \approx \beta \qquad \textit{sse per ogni } \mathbf{A} \in \mathcal{K} \textit{ e per ogni } \mathbf{A}\textit{-valutazione } v,$$
$$v(\gamma) = v(\delta) \textit{ per ogni } \gamma \approx \delta \in \Sigma \textit{ implica } v(\alpha) = v(\beta).$$

Definition 25 *Sia* $\mathrm{L} = \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \vdash_{\mathrm{L}} \rangle$ *una logica di linguaggio* $\mathcal{L}$*, e sia* $\mathcal{K}$ *una classe di* $\mathcal{L}$*-algebre. Diciamo che* $\mathcal{K}$ *è una* semantica algebrica *per* L *se esiste una funzione* $\tau : Fm(\mathcal{L}) \to \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})^2)$ *tale che per ogni* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq Fm(\mathcal{L})$*:*

$$(Alg1)\ \ \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \alpha \ \textit{sse} \ \tau[\Gamma] \vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau(\alpha).$$

Richiediamo inoltre che τ *commuti con le sostituzioni: per ogni* $\mathcal{L}$*-sostituzione* σ *e per ogni formula* α*, dev'essere* $\tau(\sigma(\alpha)) = \sigma[\tau(\alpha)]$.

Ad esempio, è facile vedere che il singoletto dell'algebra di Boole a 2 elementi $\mathbf{B}_2$ è una semantica algebrica per CL. Definiamo infatti, per ogni $\mathcal{L}_0$-formula α, $\tau(\alpha) := \{\alpha \approx 1\}$. Essendo definita in forma schematica, la funzione τ commuta certamente con le sostituzioni. Inoltre vale:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha \text{ sse } \{\gamma \approx 1 : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{Eq(\mathbf{B}_2)} \alpha \approx 1.$$

Svolgendo la Definizione 24, si vede infatti che il lato destro dell'equivalenza non è altro che la definizione di conseguenza logica classica. Se CL è definita semanticamente, come logica indotta dalla matrice $\langle \mathbf{B}_2, \{1\} \rangle$, l'equivalenza diventa una banalità. Se invece è definita sintatticamente come relazione di derivabilità di $\mathcal{HK}$, è una conseguenza del teorema di adeguatezza per $\mathcal{HK}$.

Apparentemente, la relazione tra una logica e una sua semantica algebrica appare molto stretta: la condizione (Alg1), come abbiamo visto, equivale a un teorema forte di adeguatezza. In realtà, si tratta di una relazione debole almeno sotto due aspetti.

- In primo luogo, in tale rapporto c'è spazio per molta promiscuità. Infatti, una medesima logica può avere più semantiche algebriche. Per esempio, per il teorema di Glivenko (che sta alla base della traduzione di Gödel della logica classica nella logica intuizionista), CL ammette come semantica algebrica non solo $\mathcal{BA}$, ma anche la più ampia classe $\mathcal{HA}$ delle *algebre di Heyting*. Basta scegliere come mappa di traduzione $\tau(\alpha) = \{\neg\neg\alpha \approx 1\}$. Poiché $\mathcal{HA}$ è una semantica algebrica anche per la logica intuizionista IL, il medesimo esempio mostra anche che due logiche diverse possono avere la stessa semantica algebrica.

- In secondo luogo, si tratta di una relazione asimmetrica. La traduzione τ mostra che la classe $\mathcal{K}$ ha le risorse espressive per indicare quando una certa *formula* è valida in L. Però, la logica L può non avere le risorse espressive per indicare quando una certa *equazione* vale in $\mathcal{K}$. Per esempio, CL non ha modo di esprimere attraverso formule quando un'equazione $\alpha \approx \beta$ vale nella sua semantica algebrica non standard $\mathcal{HA}$.

Per risolvere questi problemi, dobbiamo rafforzare la nozione di semantica algebrica.

3.2 Algebrizzabilità

Definition 26 *Sia* $\mathrm{L} = \langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}), \vdash_{\mathrm{L}} \rangle$ *una logica di linguaggio* $\mathcal{L}$*, e sia* $\mathcal{K}$ *una classe di* $\mathcal{L}$*-algebre. Diciamo che* L *è* algebrizzabile *con semantica algebrica equivalente* $\mathcal{K}$ *se esistono due funzioni* $\tau : Fm(\mathcal{L}) \to \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L})^2)$ *e* $\rho : Fm(\mathcal{L})^2 \to \mathcal{P}(Fm(\mathcal{L}))$ *tali che per ogni* $\Gamma \cup \{\alpha\} \cup \{\beta\} \subseteq Fm(\mathcal{L})$ *e per ogni* $\Sigma \subseteq Fm(\mathcal{L})^2$

$$
\begin{array}{lc}
(Alg1) & \Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \alpha \text{ sse } \tau[\Gamma] \vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau(\alpha); \\
(Alg2) & \Sigma \vdash_{Eq(\mathcal{K})} \alpha \approx \beta \text{ sse } \rho[\Sigma] \vdash_{\mathrm{L}} \rho(\alpha \approx \beta); \\
(Alg3) & \alpha \dashv\vdash_{\mathrm{L}} \rho[\tau(\alpha)]; \\
(Alg4) & \alpha \approx \beta \dashv\vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau[\rho(\alpha \approx \beta)].
\end{array}
$$

Richiediamo inoltre che sia τ *che* ρ *commutino con le sostituzioni.*

Questa definizione non presenta i difetti della Definizione 25. Infatti:

- La promiscuità è drasticamente ridotta. Una stessa logica algebrizzabile può ancora avere più semantiche algebriche equivalenti, ma tutte queste classi di algebre generano la stessa quasivarietà. Tale quasivarietà è *la più grande* semantica algebrica equivalente per tale logica. Inoltre, possono ancora esistere logiche diverse con la stessa semantica algebrica equivalente, ma mai con la stessa funzione τ di traduzione.

- L'asimmetria sparisce. La traduzione ρ da equazioni a formule inverte, a meno di interderivabilità, la τ da formule a equazioni. Quindi non è solo la logica ad essere fedelmente interpretabile nella consequenza equazionale, ma vale anche il viceversa.

Lemma 27 *Le condizioni (Alg2) e (Alg3) nella Definizione 26 sono derivabili dalle condizioni (Alg1) e (Alg4).*

Proof. Per quanto riguarda (Alg2), abbiamo che $\Sigma \vdash_{Eq(\mathcal{K})} \alpha \approx \beta$ è equivalente, a causa di (Alg4), a $\tau[\rho[\Sigma]] \vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau[\rho(\alpha \approx \beta)]$. Ma questo, per (Alg1), equivale s $\rho[\Sigma] \vdash_{\mathrm{L}} \rho(\alpha \approx \beta)$.

Per quanto riguarda (Alg3), abbiamo che $\tau(\alpha) \dashv\vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau[\rho[\tau(\alpha)]]$ grazie a (Alg4), da cui, applicando (Alg1), $\alpha \dashv\vdash_{\mathrm{L}} \rho[\tau(\alpha)]$. ■

Uno degli aspetti più soddisfacenti della nozione di algebrizzabilità è che essa ammette numerose caratterizzazioni equivalenti, ciascuna di natura completamente diversa. Mentre la Definizione 26 ha un carattere linguistico, basata com'è su funzioni di traduzione, la caratterizzazione che emerge dal seguente teorema usa strumenti di teoria dell'ordine e dei reticoli.

Theorem 28 *Le seguenti condizioni sono equivalenti per una logica* L *e una quasivarietà di algebre* $\mathcal{K}$*, entrambe di linguaggio* $\mathcal{L}$*:*

1. L *è algebrizzabile con semantica algebrica equivalente* $\mathcal{K}$*.*

2. *Presa una qualsiasi $\mathcal{L}$-algebra $\mathbf{A}$, esiste un isomorfismo, che commuta con la sostituzioni, tra il reticolo dei filtri deduttivi di* L *su* $\mathbf{A}$ *e il reticolo delle congruenze* θ *di* $\mathbf{A}$ *tali che* $\mathbf{A}/\theta \in \mathcal{K}$.

Proof. Dimostreremo solo che 1. implica 2., in quanto la dimostrazione dell'altra implicazione esula dalla strumentazione che abbiamo reso disponibile nel corso.

Sia L algebrizzabile con semantica algebrica equivalente $\mathcal{K}$, e siano τ e ρ le traduzioni che stabiliscono questa relazione. Fissiamo una $\mathcal{L}$-algebra $\mathbf{A}$. Ci servono ora due funzioni mutuamente inverse, una dal reticolo dei filtri deduttivi di L su $\mathbf{A}$ al reticolo delle congruenze θ di $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}/\theta \in \mathcal{K}$, e una che fa il percorso inverso.

Siano dunque f e g definite come segue per ogni $F \subseteq A$ e per ogni $\theta \subseteq A^2$:

$$\begin{array}{rcl} f(F) & := & \{\langle a,b\rangle \in A^2 : \rho(x \approx y)^{\mathbf{A}}(a,b) \subseteq F\}; \\ g(\theta) & := & \{a \in A : \tau(x)^{\mathbf{A}}(a) \subseteq \theta\}. \end{array}$$

Notiamo anzitutto che entrambe le funzioni commutano con le sostituzioni, poiché anche τ e ρ hanno questa proprietà.

Facciamo poi vedere che, se θ è una congruenza di $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}/\theta \in \mathcal{K}$, allora $g(\theta)$ è un filtro deduttivo di L su $\mathbf{A}$. Devo quindi dimostrare che se $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \alpha$ e v è una $\mathbf{A}$-valutazione tale che $v[\Gamma] \subseteq g(\theta)$, abbiamo anche $v(\alpha) \in g(\theta)$. Ma $v[\Gamma] \subseteq g(\theta)$ significa che per ogni formula $\gamma \in \Gamma$, $\tau(x)^{\mathbf{A}}(v(\gamma)) \subseteq \theta$. Ora, per (Alg1), $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \alpha$ implica $\tau[\Gamma] \vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau(\alpha)$. Quest'ultima condizione vuol dire che presa una qualsiasi algebra in $\mathcal{K}$, ogni valutazione su tale algebra che soddisfa tutte le equazioni in $\tau[\Gamma]$ soddisfa anche $\tau(\alpha)$. Per ipotesi, però, $\mathbf{A}/\theta \in \mathcal{K}$. La funzione w definita, per una generica formula δ, da $w(\delta) := [v(\delta)]_\theta$ è una $\mathbf{A}/\theta$-valutazione. $\tau(x)^{\mathbf{A}}(v(\gamma)) \subseteq \theta$ significa proprio che w soddisfa tutte le equazioni in $\tau[\Gamma]$. Se infatti $\eta \approx \epsilon$ è una tale equazione, $w(\eta) = w(\epsilon)$ equivale a $[v(\eta)]_\theta = [v(\epsilon)]_\theta$, che vuol dire $\langle v(\eta), v(\epsilon)\rangle \in \theta$. Allora w soddisfa anche $\tau(\alpha)$, ovvero $v(\alpha) \in g(\theta)$.

Similmente si mostra che, se F è un filtro deduttivo di L su $\mathbf{A}$, allora $f(F)$ è una congruenza di $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{A}/f(F) \in \mathcal{K}$.

Rimane da dimostrare che le funzioni f e g sono reciprocamente inverse. Calcoliamo dunque:

$$\begin{array}{rcl} g(f(F)) & = & \{a \in A : \tau(x)^{\mathbf{A}}(a) \subseteq f(F)\} \\ & = & \{a \in A : \rho(y \approx z)^{\mathbf{A}}[\tau(x)^{\mathbf{A}}(a))] \subseteq F\} \end{array}$$

Sia adesso $a \in F$. Poiché, per (Alg3), presa una qualsiasi variabile x si ha $x \dashv\vdash_{\mathrm{L}} \rho[\tau(x)]$, data una qualsiasi $\mathbf{A}$-valutazione v tale che $v(x) = a$, abbiamo anche $\rho(y \approx z)^{\mathbf{A}}[\tau(x)^{\mathbf{A}}(a))] \subseteq F$, ovvero $a \in g(f(F))$. Utilizzando in senso inverso l'equivalenza in L tra x e $\rho[\tau(x)]$, si dimostra che se $a \in g(f(F))$ allora $a \in F$.

Calcoliamo infine:

$$\begin{aligned} f(g(\theta)) &= \{\langle a,b\rangle \in A^2 : \rho(x \approx y)^{\mathbf{A}}(a,b) \subseteq g(\theta)\} \\ &= \{\langle a,b\rangle \in A^2 : \tau(z)^{\mathbf{A}}[\rho(x \approx y)^{\mathbf{A}}(a,b)] \subseteq \theta\}. \end{aligned}$$

Supponiamo $a\theta b$. Quindi $[a]_\theta = [b]_\theta$. Sappiamo, per (Alg4), che $x \approx y \dashv\vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau[\rho(x \approx y)]$, e anche, per ipotesi, che $\mathbf{A}/\theta \in \mathcal{K}$. Presa una $\mathbf{A}/\theta$-valutazione v tale che $v(x) = [a]_\theta, v(y) = [b]_\theta$, poiché essa soddisfa l'equazione $x \approx y$, soddisferà anche la sua conseguenza equazionale $\tau[\rho(x \approx y)]$. Questo però significa che, in $\mathbf{A}$, $\tau(z)^{\mathbf{A}}[\rho(x \approx y)^{\mathbf{A}}(a,b)] \subseteq \theta$. In altri termini, $af(g(\theta))b$. Di nuovo, utilizzando in senso inverso l'equivalenza in $Eq(\mathcal{K})$ tra $x \approx y$ e $\tau[\rho(x \approx y)]$, si dimostra che se $af(g(\theta))b$, allora $a\theta b$.

Le funzioni f e g stabiliscono quindi una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi dei filtri deduttivi di L su $\mathbf{A}$ e delle congruenze θ di $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}/\theta \in \mathcal{K}$. Non è arduo dimostrare che tale corrispondenza è anche un isomorfismo reticolare. ■

Non dimostriamo, ma prendiamo nota della seguente importante connessione tra semantica equivalente e semantica delle matrici per le logiche algebrizzabili:

Theorem 29 *Sia* L *una logica di linguaggio $\mathcal{L}$, e sia $\mathcal{K}$ una quasivarietà di $\mathcal{L}$-algebre. Se* L *è algebrizzabile con semantica algebrica equivalente $\mathcal{K}$, allora* $\mathsf{Alg}^*(\mathrm{L}) = \mathcal{K}$.

3.3 Esempi e applicazioni

Vogliamo esemplificare la nozione di algebrizzabilità facendo vedere che la logica classica CL è algebrizzabile con la varietà $\mathcal{BA}$ delle algebre di Boole come più grande semantica algebrica equivalente.

Per fare questo, tuttavia, dobbiamo risolvere un problema riguardante il linguaggio $\mathcal{L}_0$. Presentando il calcolo alla Hilbert $\mathcal{HK}$ (v. Dispensa completezza 2.0), tale linguaggio includeva il connettivo di implicazione $\rightarrow$ come primitivo, ma non le costanti di verità $0, 1$. Presentando la classe $\mathcal{BA}$ nel primo modulo del corso, invece, l'implicazione non era un simbolo di operazione primitivo, mentre c'erano le costanti. Ora, la Definizione 26 ha senso quando la logica in questione e la sua semantica algebrica equivalente hanno lo stesso linguaggio. Rimediamo quindi *espandendo* il linguaggio di $\mathcal{HK}$ con le costanti $0, 1$ e aggiungendo gli assiomi:

$$\begin{array}{ll} (A14) & \neg 1 \rightarrow 0 \\ (A15) & 0 \rightarrow \neg 1 \\ (A16) & (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow 1. \end{array}$$

Similmente, espandiamo il linguaggio di $\mathcal{BA}$ con il simbolo binario di operazione $\rightarrow$, aggiungendo agli assiomi che definiscono le algebra di Boole l'identità $x \rightarrow y \approx \neg x \vee y$. Chiameremo d'ora innanzi $\mathcal{L}_0$ il linguaggio così ottenuto.

Theorem 30 CL *è algebrizzabile con la varietà $\mathcal{BA}$ come semantica algebrica equivalente.*

Proof. Consideriamo le seguenti funzioni di traduzione, entrambe schematiche e quindi commutanti con le sostituzioni:

$$\tau(\alpha) := \{\alpha \approx 1\}; \quad \rho(\alpha \approx \beta) := \{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha\}.$$

Per il Lemma 27, è sufficiente controllare le condizioni (Alg1) e (Alg4).

Iniziamo da (Alg1). Essa si traduce come segue: $\Gamma \vdash_{\mathrm{CL}} \alpha$ sse $\{\gamma \approx 1 : \gamma \in \Gamma\} \vdash_{Eq(\mathcal{BA})} \alpha \approx 1$. L'implicazione da sinistra a destra si dimostra per induzione sulla lunghezza di una prefissata derivazione di α da Γ in $\mathcal{HK}$. Per la base dell'induzione, se la lunghezza di tale derivazione è 1, la sua conclusione α è un assioma o un'assunzione. Nel secondo caso la conclusione è banale, mentre nel primo dobbiamo dimostrare che presa una qualsiasi algebra di Boole $\mathbf{A}$ e una qualsiasi $\mathbf{A}$-valutazione v, $v(\alpha) = 1^{\mathbf{A}}$. Per esempio, dato l'assioma (A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$, abbiamo $1^{\mathbf{A}} \geq v(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = v(\neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \alpha)) \geq v(\neg\alpha \vee \alpha) = \neg v(\alpha) \vee v(\alpha) = 1^{\mathbf{A}}$. Per il passo induttivo, è sufficiente far vedere che la regola del Modus Ponens preserva la proprietà di ricevere il valore $1^{\mathbf{A}}$ da una generica $\mathbf{A}$-valutazione v su una qualsiasi algebra di Boole $\mathbf{A}$. Se dunque $v(\alpha) = 1^{\mathbf{A}}$ e $v(\alpha \to \beta) = 1^{\mathbf{A}}$, allora $v(\beta) = v(\beta) \vee 0^{\mathbf{A}} = \neg 1^{\mathbf{A}} \vee v(\beta) = \neg v(\alpha) \vee v(\beta) = v(\alpha) \to v(\beta) = v(\alpha \to \beta) = 1^{\mathbf{A}}$.

Passiamo all'implicazione da destra a sinistra e ragioniamo per contrapposizione. Supponiamo $\Gamma \nvdash_{\mathrm{CL}} \alpha$. Dobbiamo trovare un'algebra di Boole $\mathbf{B}$ e una $\mathbf{B}$-valutazione v tali che $v[\Gamma] \subseteq \{1^{\mathbf{B}}\}$ e $v(\alpha) \neq 1^{\mathbf{B}}$. Definiamo la seguente relazione binaria su $Fm(\mathcal{L}_0)$:

$$\theta_\Gamma := \{\langle \beta, \delta \rangle : \Gamma \vdash_{\mathcal{HK}} \beta \to \delta, \delta \to \beta\}.$$

Si dimostrano le seguenti due proprietà:

1. *θ_Γ è una congruenza su* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)$. Questo punto viene lasciato per esercizio. Facciamo solo vedere che se $\beta \theta_\Gamma \delta$, allora $\neg\beta \theta_\Gamma \neg\delta$. Se infatti $\Gamma \vdash_{\mathcal{HK}} \beta \to \delta, \delta \to \beta$, si può costruire la seguente derivazione in $\mathcal{HK}$ di $\neg\delta \to \neg\beta$ da Γ:

$$\begin{array}{lcl} 1. & \vdots & \\ 2. & \beta \to \delta & \\ 3. & (\beta \to \delta) \to (\neg\delta \to \neg\beta) & Teor. \\ 4. & \neg\delta \to \neg\beta & R1, 2, 3 \end{array}$$

   Similmente, si può costruire una derivazione in $\mathcal{HK}$ di $\neg\beta \to \neg\delta$ da Γ.

2. *L'algebra quoziente* $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma$ *è un'algebra di Boole.* Si noti innanzitutto che tale algebra è ben definita per il punto 1. Per verificare che è un'algebra di Boole, occorre controllare che soddisfa tutti gli assiomi definitori di questa classe di algebre. Per esempio, vediamo che il meet è commutativo. Infatti, prese due formule β e δ:

$$\begin{aligned} [\beta]_{\theta_\Gamma} \wedge^{\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma} [\delta]_{\theta_\Gamma} &= [\beta \wedge \delta]_{\theta_\Gamma} \\ &= [\delta \wedge \beta]_{\theta_\Gamma} \\ &= [\delta]_{\theta_\Gamma} \wedge^{\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma} [\beta]_{\theta_\Gamma}. \end{aligned}$$

La seconda uguaglianza è giustificata dal fatto che $\Gamma \vdash_{\mathcal{HK}} \beta \wedge \delta \to \delta \wedge \beta, \delta \wedge \beta \to \beta \wedge \delta$.

Vediamo anche che $0^{\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma}$ è l'elemento minimo di questa algebra. Infatti $0^{\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma} = [0]_{\theta_\Gamma}$, e per ogni formula β, $[0]_{\theta_\Gamma} \vee [\beta]_{\theta_\Gamma} = [0 \vee \beta]_{\theta_\Gamma} = [\beta]_{\theta_\Gamma}$. L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che $\Gamma \vdash_{\mathcal{HK}} \beta \to 0 \vee \beta$ per (A6), e inoltre $\Gamma \vdash_{\mathcal{HK}} 0 \vee \beta \to \beta$ alla luce della seguente dimostrazione in $\mathcal{HK}$ (qui alcuni passaggi sono condensati):

1.	$\beta \to \beta$	T1
2.	$(\beta \to \beta) \to (\neg(\beta \to \beta) \to \beta)$	A10
3.	$\neg(\beta \to \beta) \to \beta$	R1, 1,2
4.	$(\beta \to \beta) \to 1$	A16
5.	$\neg 1 \to \neg(\beta \to \beta)$	T (contrapposiz.), 4
6.	$0 \to \neg 1$	A15
7.	$0 \to \beta$	T (transitiv.), 3,5,6
8.	$0 \vee \beta \to \beta$	A8, 1, 7, R1

Gli altri assiomi delle algebre di Boole si controllano similmente.

Ricordiamo che il nostro obiettivo è trovare un contromodello per $\Gamma \nvdash_{\mathrm{CL}} \alpha$. Abbiamo per ora trovato un'algebra di Boole $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma$ dove provare a falsificarla. Adesso ci serve una $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma$-valutazione che assegni il valore 1 alle premesse e un valore diverso da 1 alla conclusione. Definiamo, per ogni formula δ,

$$v(\delta) := [\delta]_{\theta_\Gamma}.$$

Essendo v l'omomorfismo canonico di $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)$ sull'algebra quoziente $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma$, per definizione esso è una $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\theta_\Gamma$-valutazione. Supponiamo $\gamma \in \Gamma$. Allora abbiamo che $[\gamma]_{\theta_\Gamma} = [1]_{\theta_\Gamma}$. Infatti abbiamo le seguenti due derivazioni in $\mathcal{HK}$ da Γ:

1.	$\gamma \to \gamma$	T1
2.	$(\gamma \to \gamma) \to 1$	A16
3.	1	R1, 1,2
4.	$1 \to (\gamma \to 1)$	A1
5.	$\gamma \to 1$	R1, 3,4

1.	γ	Ass.
2.	$\gamma \to (1 \to \gamma)$	A1
5.	$1 \to \gamma$	R1, 1,2

Se per assurdo fosse $[\alpha]_{\theta_\Gamma} = [1]_{\theta_\Gamma}$, in particolare $\Gamma \vdash_{\mathcal{HK}} 1 \to \alpha$ e quindi (esercizio!) $\Gamma \vdash_{\mathcal{HK}} \alpha$, una contraddizione. Quindi abbiamo trovato il nostro contromodello.

(Alg1) è dunque controllato. Ci manca adesso (Alg4). Esso equivale a:

$$\alpha \approx \beta \dashv\vdash_{Eq(\mathcal{BA})} \{\alpha \to \beta \approx 1, \beta \to \alpha \approx 1\}.$$

Prendiamo dunque una qualsiasi algebra di Boole $\mathbf{A}$ e una qualsiasi $\mathbf{A}$-valutazione v. Se $v(\alpha) = v(\beta)$, allora $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha) \to v(\beta) = v(\alpha) \to v(\alpha) = \neg v(\alpha) \vee v(\alpha) = 1^{\mathbf{A}}$. Viceversa, se $v(\alpha) \to v(\beta) = 1^{\mathbf{A}} = v(\beta) \to v(\alpha)$, allora, per la definibilità dell'ordine nelle algebre di Boole, $v(\alpha) \leq v(\beta)$ e $v(\beta) \leq v(\alpha)$, da cui per antisimmetria $v(\alpha) = v(\beta)$. ■

Si noti che il contromodello all'inferenza dalle assunzioni in Γ alla conclusione α fornito dal Teorema 30 può essere equivalentemente espresso considerando la matrice $\langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0), C_{\vdash_{\mathrm{CL}}}(\Gamma)\rangle$ (dove la notazione usata è quella del Teorema 12). La nostra inferenza viene falsificata nella riduzione di questa matrice:

$$\langle \mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)/\Omega^{\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)} C_{\vdash_{\mathrm{CL}}}(\Gamma), C_{\vdash_{\mathrm{CL}}}(\Gamma)/\Omega^{\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)} C_{\vdash_{\mathrm{CL}}}(\Gamma)\rangle$$

In termini del Teorema 28, si può notare che la congruenza $\theta_\Gamma = \Omega^{\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)} C_{\vdash_{\mathrm{CL}}}(\Gamma)$ su $\mathbf{Fm}(\mathcal{L}_0)$ non è altro che $f(C_{\vdash_{\mathrm{CL}}}(\Gamma))$.

Dimostrare che una logica è algebrizzabile ha numerose applicazioni. Difatti, permette di dimostrare che tale logica ha determinate proprietà utilizzando la seguente tecnica: si dimostra che la sua semantica equivalente gode di certe proprietà puramente algebriche, e poi si "traduce" il risultato nella proprietà logica che ci interessa.

Per esempio, una logica L di linguaggio $\mathcal{L}$ si dice *decidibile* (rispetto ai teoremi) se esiste un algoritmo che, presa in input una qualsiasi $\mathcal{L}$-formula α, dopo un numero finito di passi termina dicendoci se α è un teorema di L oppure no. Supponiamo che L sia algebrizzabile con semantica algebrica equivalente $\mathcal{K}$ (con funzioni di traduzione τ e ρ) e di non sapere se L è decidibile, ma di avere un algoritmo che può dirci per una generica $\mathcal{L}$-equazione $\beta \approx \gamma$ se vale $\vdash_{Eq(\mathcal{K})} \beta \approx \gamma$ o no. Questo ci dà in automatico un algoritmo di decisione per L.

Infatti, prendiamo una $\mathcal{L}$-formula α e lanciamo l'algoritmo di decisione per $Eq(\mathcal{K})$ su tutte le equazioni in $\tau(\alpha)$. I casi sono due.

Primo caso: $\vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau(\alpha)$. Allora, per (Alg2), $\vdash_{\mathrm{L}} \rho(\tau(\alpha))$, ma poiché per (Alg3) $\rho(\tau(\alpha)) \vdash_{\mathrm{L}} \alpha$, allora per transitività $\vdash_{\mathrm{L}} \alpha$.

Secondo caso: esiste almeno un'equazione $\beta \approx \gamma$ in $\tau(\alpha)$ tale che $\nvdash_{Eq(\mathcal{K})}$ $\beta \approx \gamma$. Allora vale $\nvdash_{\mathrm{L}} \alpha$. Supponiamo infatti per assurdo che $\vdash_{\mathrm{L}} \alpha$. Allora per (Alg1) $\vdash_{Eq(\mathcal{K})} \tau(\alpha)$, una contraddizione.

Un'altra applicazione riguarda il teorema di deduzione. Si considerino le seguenti due definizioni.

Definition 31 *Una logica* L *di linguaggio $\mathcal{L}$ ha il* teorema di deduzione *se esiste un insieme di $\mathcal{L}$-formule $I(x, y)$ in 2 variabili tale che per ogni $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq Fm(\mathcal{L})$ si ha: $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathrm{L}} \beta$ sse $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} I(x/\alpha, y/\beta)$.*

Definition 32 *Una classe di $\mathcal{L}$-algebre $\mathcal{K}$ ha le* congruenze principali equazionalmente definibili (EDPC) *se esiste un insieme finito di $\mathcal{L}$-equazioni*

$$\{\eta_i(x, y, z, w) \approx \epsilon_i(x, y, z, w)\}_{i \leq n}$$

in 4 variabili tale che per ogni algebra $\mathbf{A}$ *in* $\mathcal{K}$ *e per ogni* $a, b, c, d \in A$*,*

$$c\theta(a,b)d \text{ sse per ogni } i \leq n, \eta_i^{\mathbf{A}}(a,b,c,d) = \epsilon_i^{\mathbf{A}}(a,b,c,d).$$

Queste due nozioni sono legate dal seguente risultato, che non dimostreremo:

Theorem 33 *Se* L *è algebrizzabile con la varietà* $\mathcal{K}$ *come semantica algebrica equivalente, e se* $\tau(\alpha)$ *e* $\rho(\alpha \approx \beta)$ *sono insiemi finiti, allora* L *ha il teorema di deduzione sse* $\mathcal{K}$ *ha EDPC.*