



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI CAGLIARI

UNICA

Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura - a.a. 2025/26

Statica e Scienza delle Costruzioni

PRIMA PARTE: STATICA

> **Lezione 1**

Calcolo vettoriale

Emanuele Reccia

emanuele.reccia@unica.it

Antonio cazzani

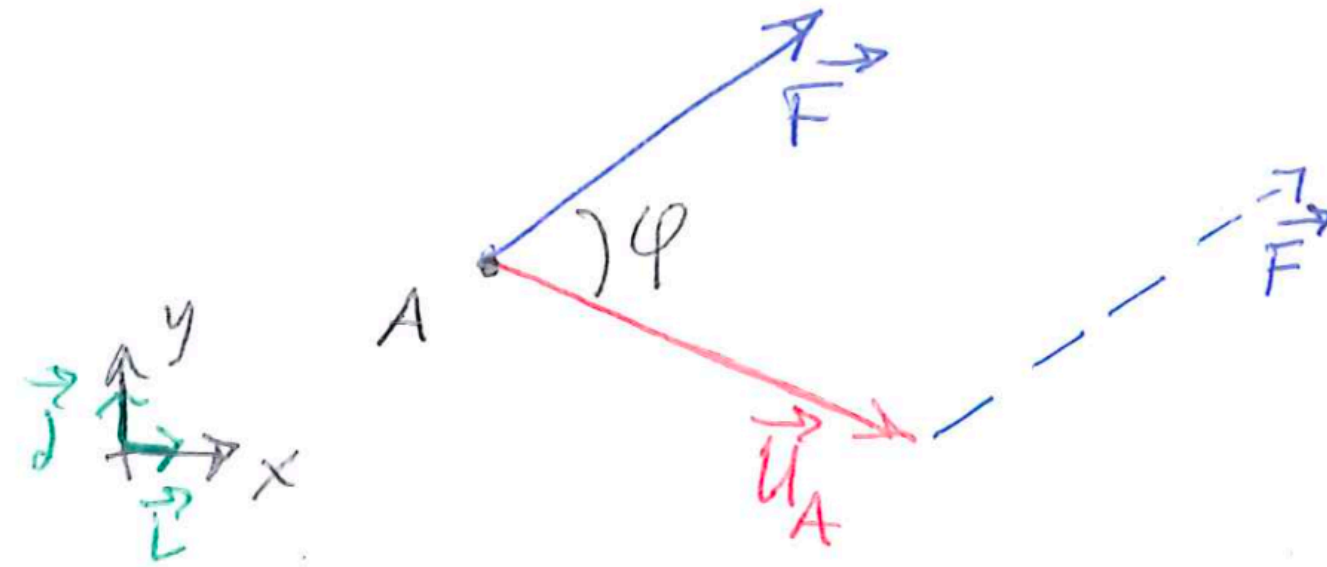
antonio.cazzani@unica.it

«È vietata la copia, la rielaborazione, la riproduzione dei contenuti e immagini in qualsiasi forma.
È inoltre vietata la diffusione, la redistribuzione e la pubblicazione dei contenuti e immagini,
includendo le registrazioni delle videolezioni con qualsiasi modalità e mezzo non autorizzate
espressamente dall'autore o da Unica».

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV) PER IL CORPO RIGIDO E PER SISTEMI ARTICOLATI DI CORPI RIGIDI.

PER UNA FORZA \vec{F} (costante) IL CUI PUNTO DI APPLICAZIONE (A) SUBISCE UNO SPOSTAMENTO \vec{u}_A (PER CAUSE NON NECESSARIAMENTE IMPUTABILI ALLA FORZA \vec{F}) SI DEFINISCE IL LAVORO COMPIUTO DA \vec{F} SECONDO LA RELAZIONE:

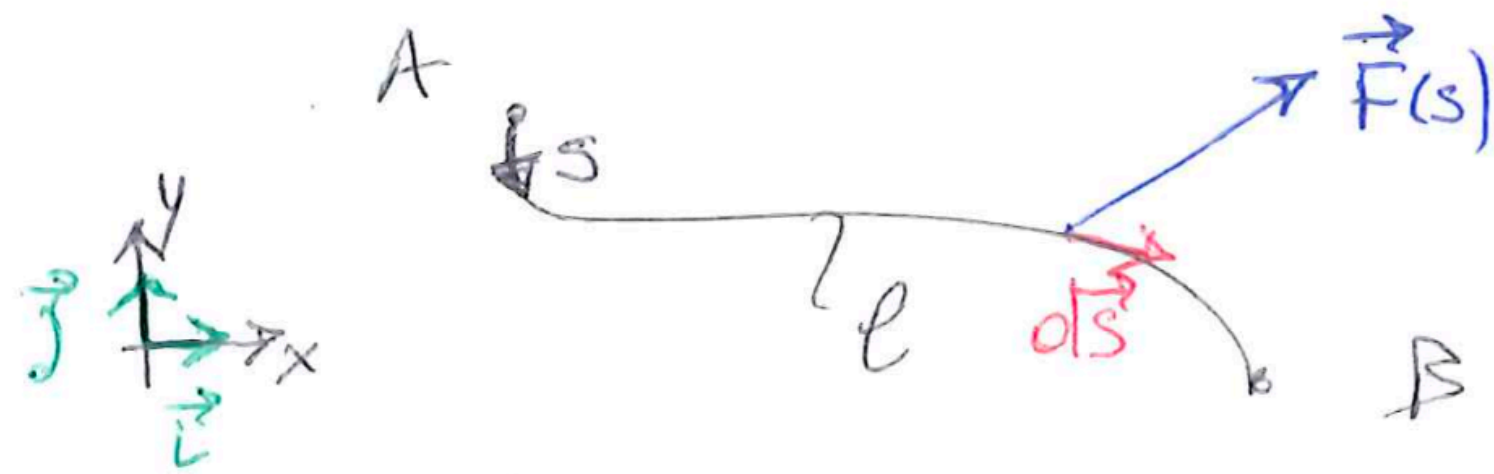
$$L = \vec{F} \cdot \vec{u}_A \quad [1]$$



IL LAVORO È QUINDI UNA GRANDEZZA SCALARE, DIMENSIONALMENTE OMOGENEA AL PRODOTTO $[F] \cdot [L]$; NEL SISTEMA INTERNAZIONALE LA SUA UNITÀ DI MISURA È IL JOULE: $1J = 1N \cdot 1m$.

SE SI RESTRINGE L'ANGOLO φ FORMATO DAI VETTORI \vec{F} E \vec{u}_A ALL'INTERVALLO $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (CORRISPONDENTE A UN ANGOLO GIRO) SI TROVA CHE IL LAVORO RISULTA POSITIVO QUANDO $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$; $L = 0$ PER $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$; $L < 0$ PER $-\pi \leq \varphi < -\frac{\pi}{2}$ O PER $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$.

NEL CASO CHE LA FORZA \vec{F} SIA INVECE POSIZIONALE, $\vec{F} = \vec{F}(s)$ E VARI¹ QUINDI IN MODULO, DIREZIONE E VERSO QUANDO IL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE SI MUOVE LUNGO UNA LINEA ℓ CHE CONGIUNGE I PUNTI (A) E (B), SULLA QUALE E' DEFINITA UNA ASCISSA CURVILINEA s , SI DEFINISCE, IN ANALOGIA CON LA [1] IL LAVORO ELEMENTARE $d\mathcal{L}$ CHE \vec{F} COMPIE QUANDO IL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE SI SPOSTA DELLA QUANTITA' INFINITESIMA $d\vec{s}$ (SEMPRE DIRETTA COME LA TANGENTE ALLA LINEA ℓ):



$$d\mathcal{L} = \vec{F} \times d\vec{s}. [2]$$

IL SUO PUNTO D'APPLICAZIONE

IL LAVORO COMPLESSIVO COMPILTO DA \vec{F} QUANDO SI SPOSTA DA (A) A (B) LUNGO ℓ (E CHE PERTANTO DIPENDE IN GENERALE DA ℓ) VALE:

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F}(s) \times d\vec{s}. [3]$$

SI OSSERVI CHE SE \vec{F} E $d\vec{s}$ SONO ESPRESSI PER COMPONENTI:

2

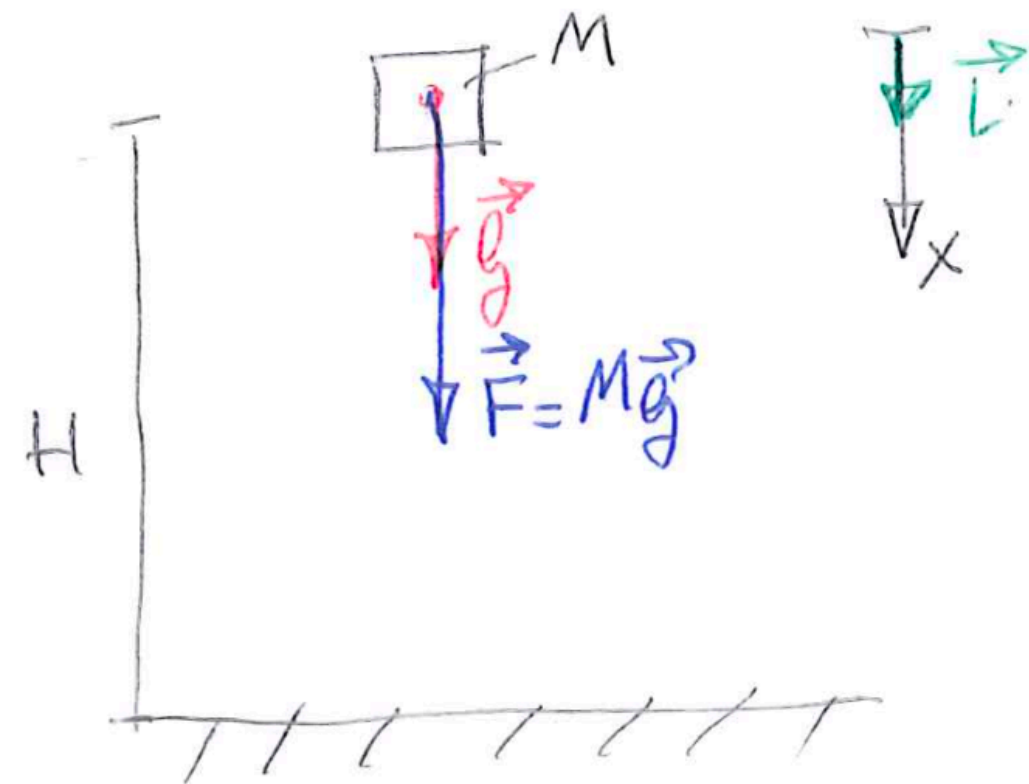
$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \\ d\vec{s} &= dx \vec{i} + dy \vec{j}\end{aligned}\quad [4]$$

LA [2] FORNISCE DIRETTAMENTE:

$$d\mathcal{L} = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j}) \times (dx \vec{i} + dy \vec{j}) = F_x dx + F_y dy \quad [5]$$

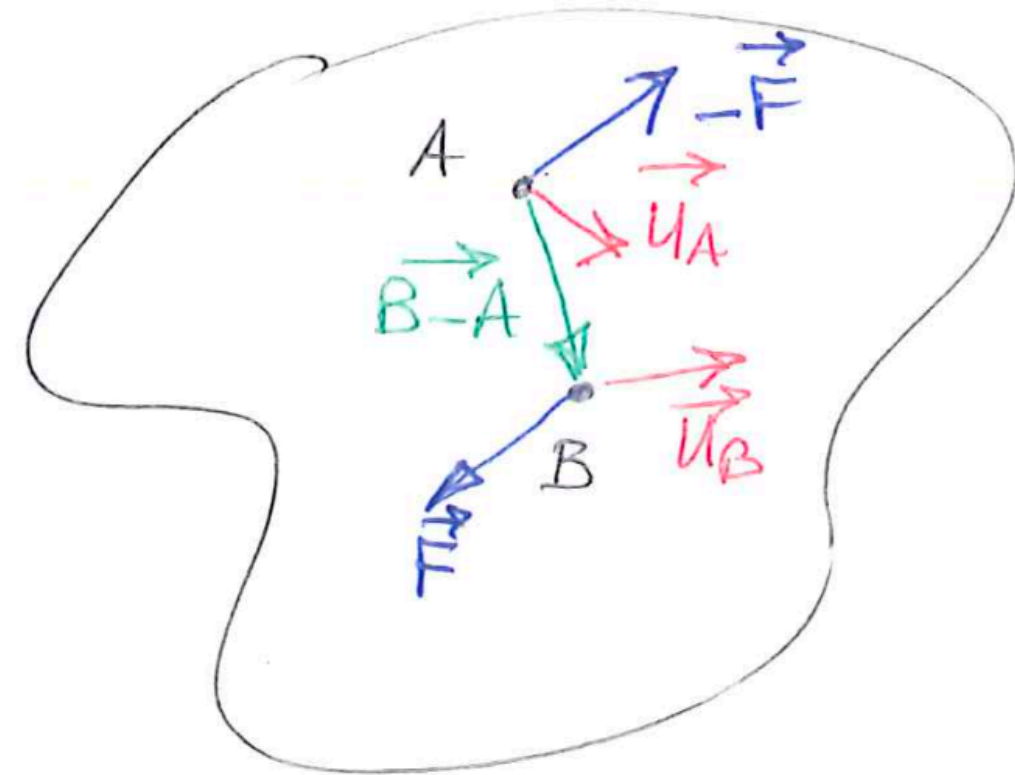
CIOÈ IL LAVORO ELEMENTARE È DATO DALLA SOMMA DEI PRODOTTI DELLE COMPONENTI OMOLOGHE DEI VETTORI \vec{F} E $d\vec{s}$.

A TITOLO DI ESEMPIO, UN GRAVE DI MASSA M CHE CADE, PER EFFETTO DELLA ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ LUNGO LA VERTICALE PER UN'ALTEZZA H COMPIE IL LAVORO SEGUENTE:



$$\begin{aligned}\vec{F} &= M\vec{g} = Mg\vec{i} \quad (g = |\vec{g}|) \\ d\vec{s} &= dx\vec{i} \\ \mathcal{L} &= \int_0^H Mg dx = Mg[x]_0^H = MgH.\end{aligned}$$

NEL CASO DI UNA COPPIA FORMATA DA 2 FORZE EGUALI E OPPOSTE, \vec{F} E $-\vec{F}$, APPLICATE IN 2 PUNTI, (A) E (B) DI UN CORPO RIGIDO CHE SUBISCONO GLI SPOSTAMENTI \vec{u}_A E \vec{u}_B , IL LAVORO COMPLESSIVO E' PARI ALLA SOMMA DEL LAVORO COMPIUTO DA CIASCUNA DELLE 2 FORZE:



$$L = -\vec{F} \times \vec{u}_A + \vec{F} \times \vec{u}_B \quad [6]$$

D'ALTRA PARTE SE IL CORPO E' RIGIDO GLI SPOSTAMENTI \vec{u}_A E \vec{u}_B SONO LEGATI DALLA EQUAZIONE DELLA ROTO-TRASLAZIONE RIGIDA INFINITESIMA:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B}-\vec{A}) \quad [7]$$

SE SI SOSTITUISCE LA [7] NELLA [6] SI TROVA:

$$L = -\vec{F} \times \vec{u}_A + \vec{F} \times [\vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B}-\vec{A})] \quad [8]$$

E IN VIRTU' DELLA PROPRIETA' DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO SCALARE SI HA:

$$L = -\vec{F} \times \vec{u}_A + \vec{F} \times \vec{u}_A + \vec{F} \times \vec{\omega} \wedge (\vec{B}-\vec{A}) \quad [8']$$

IL TERMINE SUPERSTITE CHE COMPARE NELLA [8'] PUO' ESSERE RISCritto,

SFRUTTANDO LE PROPRIETÀ CICLICHE DEL PRODOTTO MISTO DI 3 VETTORI:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \times (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \times (\vec{a} \wedge \vec{b}) :$$

3

NEL CASO PRESENTE IN CUI $\vec{a} \equiv \vec{F}$; $\vec{b} \equiv \vec{\omega}$; $\vec{c} \equiv (\vec{B}-\vec{A})$ IN BASE ALLA SECONDA FORMA RISULTA:

$$\mathcal{L} = \vec{\omega} \times (\vec{B}-\vec{A}) \wedge \vec{F} \quad [8'']$$

MA $(\vec{B}-\vec{A}) \wedge \vec{F} = \vec{M}_{(A)} = \vec{M}$ IN QUANTO UNA COPPIA HA MOMENTO CHE È INVARIANTE CON IL POLO; NE SEGUE, SFRUTTANDO LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA DEL PRODOTTO SCALARE:

$$\mathcal{L} = \vec{M} \times \vec{\omega} \quad [8''']$$

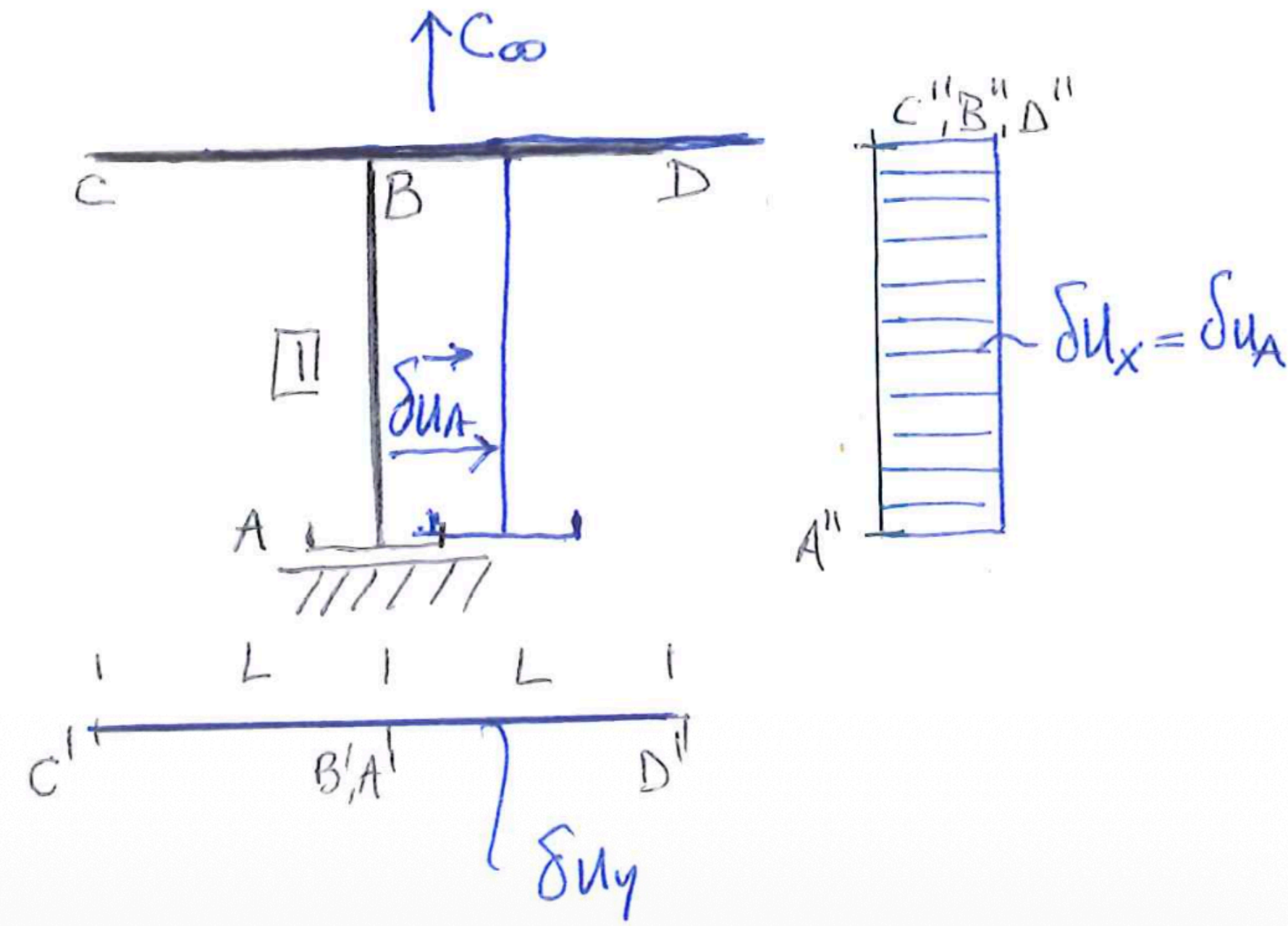
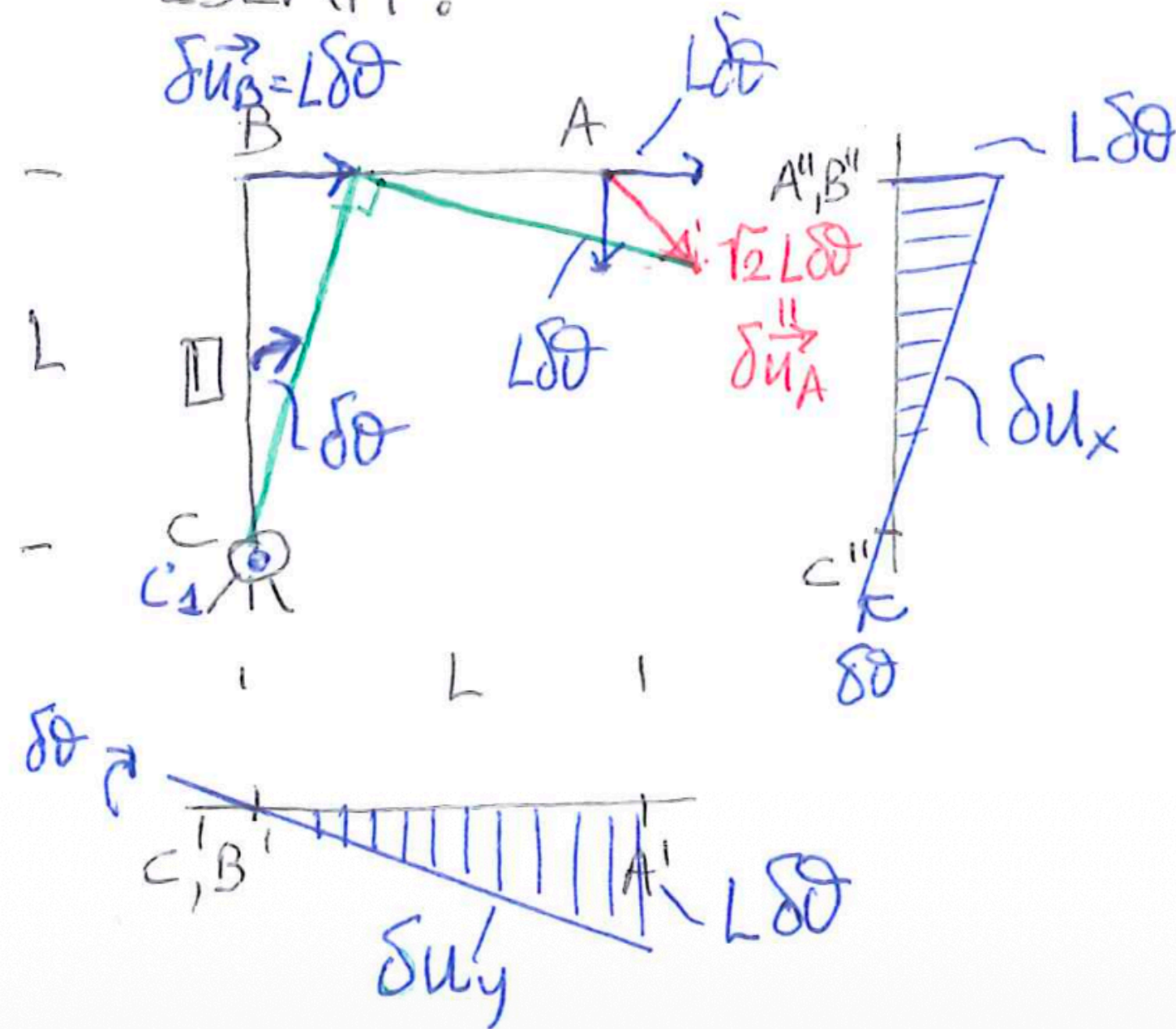
SI OSSERVI CHE DIMENSIONALMENTE $[\vec{M}] = [FL]$ E $\vec{\omega} = [-]$ (CIOÈ È PRIVO DI DIMENSIONI: UNA ROTAZIONE ESPRESSA IN RADIANTI È DATA DAL RAPPORTO FRA L'ARCO E IL RAGGIO ASSUMENDO QUEST'ULTIMO UNITARIO); NE SEGUE CHE LA $[8''']$ FORNISCE UN'ESPRESSIONE OMOGENEA, DAL PUNTO DI VISTA DELLE DIMENSIONI, ALLA $[1]$.

SPOSTAMENTO VIRTUALE

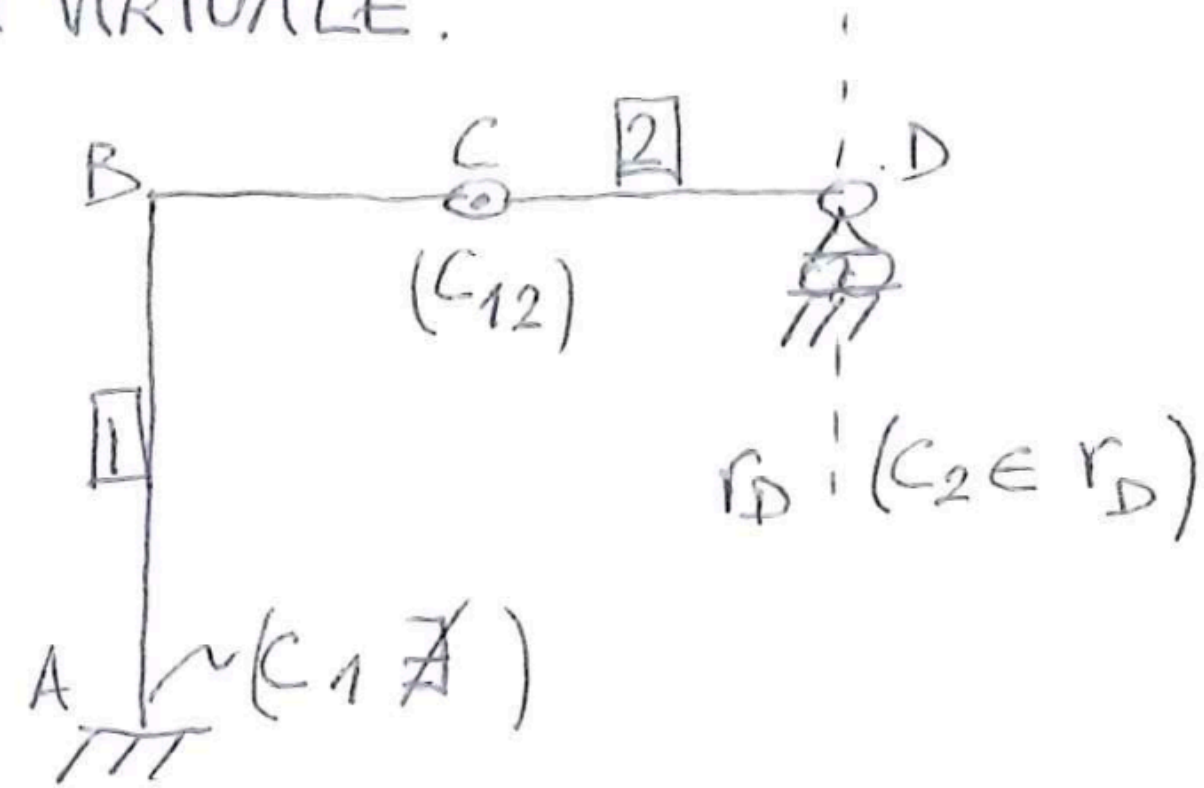
SI DEFINISCE VIRTUALE UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO E COMPATIBILE CON I VINCOLI (INCLUSO QUELLO DI RIGIDITA' NEL CASO DI CORPI RIGIDI).

GLI SPOSTAMENTI VIRTUALI SI DENOTANO CON IL SIMBLO δ (DELTA): δu_A E' COSI' LO SPOSTAMENTO VIRTUALE DEL PUNTO (A).

ESEMPLI:



CHIARAMENTE SE I VINCOLI VI BISCONO OGNI MOTO RIGIDO (COME ACCADE NEL CASO DI STRUTTURE ISOSTATICHE O IPERSTATICHE NON LABILI) NON SONO POSSIBILI SPOSTAMENTI VIRTUALE. 4



POICHÉ LE CONDIZIONI CINEMATICHE IMPOSTE DA VINCOLI IN (C) E IN (D) NON SONO COMPATIBILI, NON ESISTE C.I.R. E GLI UNICI SPOSTAMENTI COMPATIBILI CON I VINCOLI SONO TUTTI NULLI.

PER UN CORPO RIGIDO LIBERO (NON VINCOLATO) GLI SPOSTAMENTI VIRTUALI DEBONO SODDISFARE SOLO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ!

ASSEGNATO QUINDI LO SPOSTAMENTO DI UN GENERICO PUNTO (P), $\delta \vec{u}_P$ E UNA ROTAZIONE VIRTUALE $\delta \vec{\omega}$, LO SPOSTAMENTO VIRTUALE DI UN PUNTO (Q) QUALSIASI DEL CORPO RIGIDO È ESPRIMIBILE COME:

$$\delta \vec{u}_Q = \delta \vec{u}_P + \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q} - \vec{P}) \quad [10]$$

IL LAVORO VIRTUALE COMPIUTO DA UNA FORZA \vec{F} È DEFINITO IN MODO ANALOGO ALLA [1] O ALLA [2] QUANDO LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA È UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE:

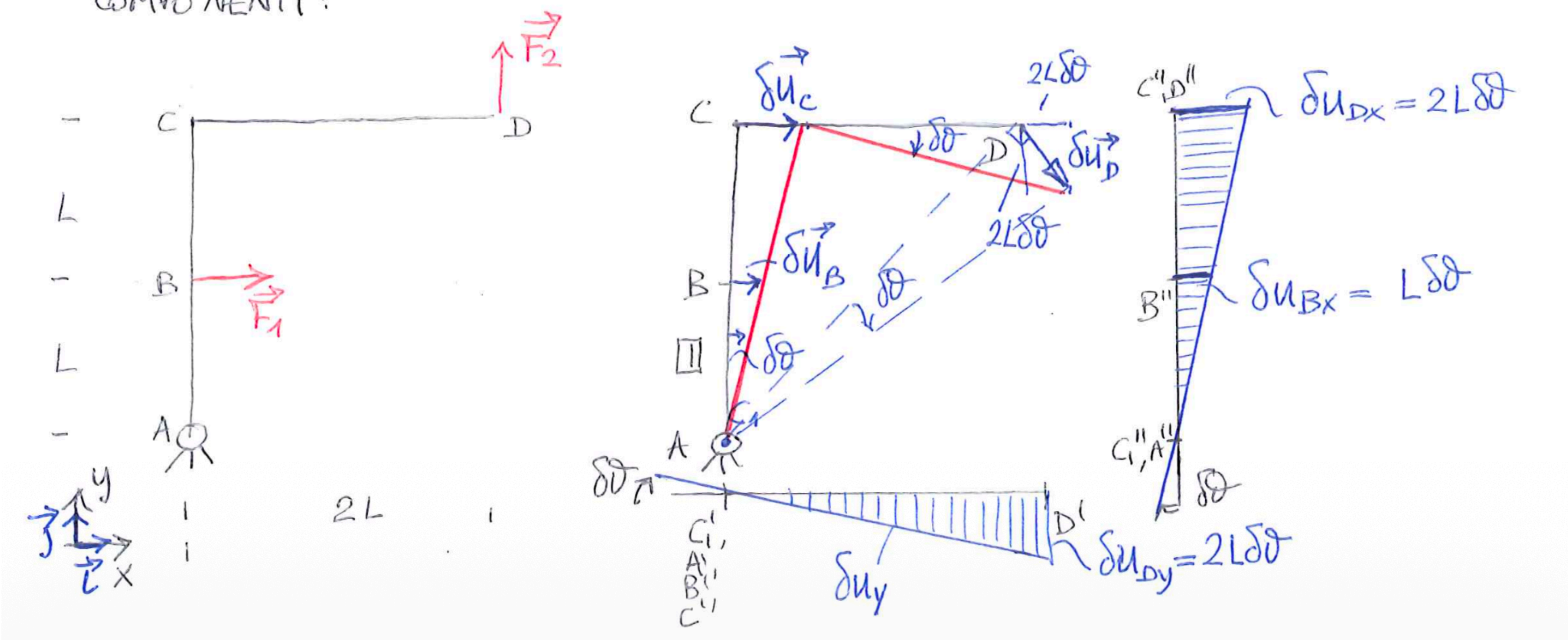
$$\delta \mathcal{L} = \vec{F} \times \delta \vec{u} \quad [11]$$

IL LAVORO VIRTUALE, ANALOGAMENTE ALLO SPOSTAMENTO VIRTUALE È INDICATO DAL SIMBOLO δ , COME AVVIENE NELLA [11].

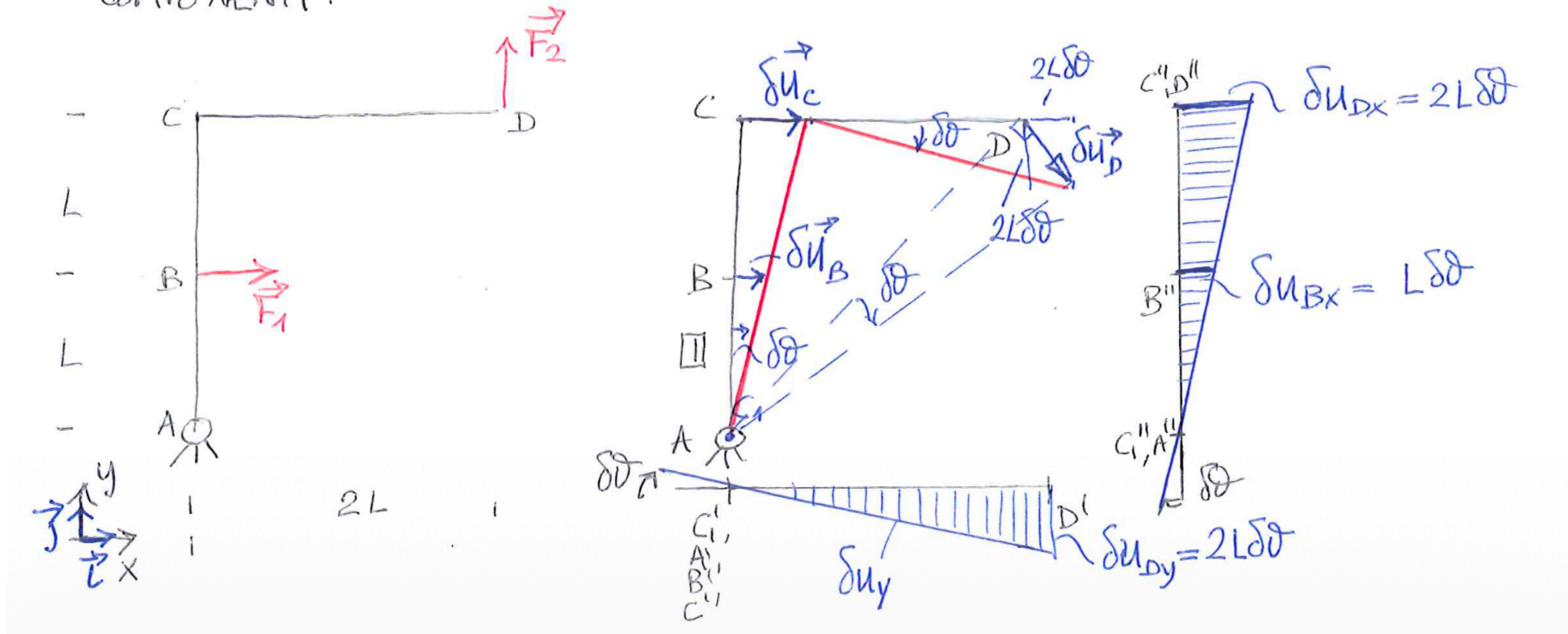
IL LAVORO VIRTUALE COMPIUTO DA UN SISTEMA DI FORZE È LA SOMMA DEI LAVORI VIRTUALI COMPIUTI DALLE SINGOLE FORZE:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \delta \vec{u}_1 + \vec{F}_2 \times \delta \vec{u}_2 + \dots + \vec{F}_N \times \delta \vec{u}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \times \delta \vec{u}_i \quad [12]$$

PER IL CASO ILLUSTRATO IN FIGURA SI HA QUINDI; OPERANDO PER COMPONENTI!



PER IL CASO ILLUSTRATO IN FIGURA SI HA QUINDI; OPERANDO PER COMPONENTI:



$$\delta \mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \delta \vec{u}_1 + \vec{F}_2 \times \delta \vec{u}_2$$

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{j}$$

$$\delta \vec{u}_1 = \delta \vec{u}_B = L\delta\theta \vec{i}$$

$$\delta \vec{u}_2 = \delta \vec{u}_D = 2L\delta\theta \vec{i} - 2L\delta\theta \vec{j}$$

PERTANTO

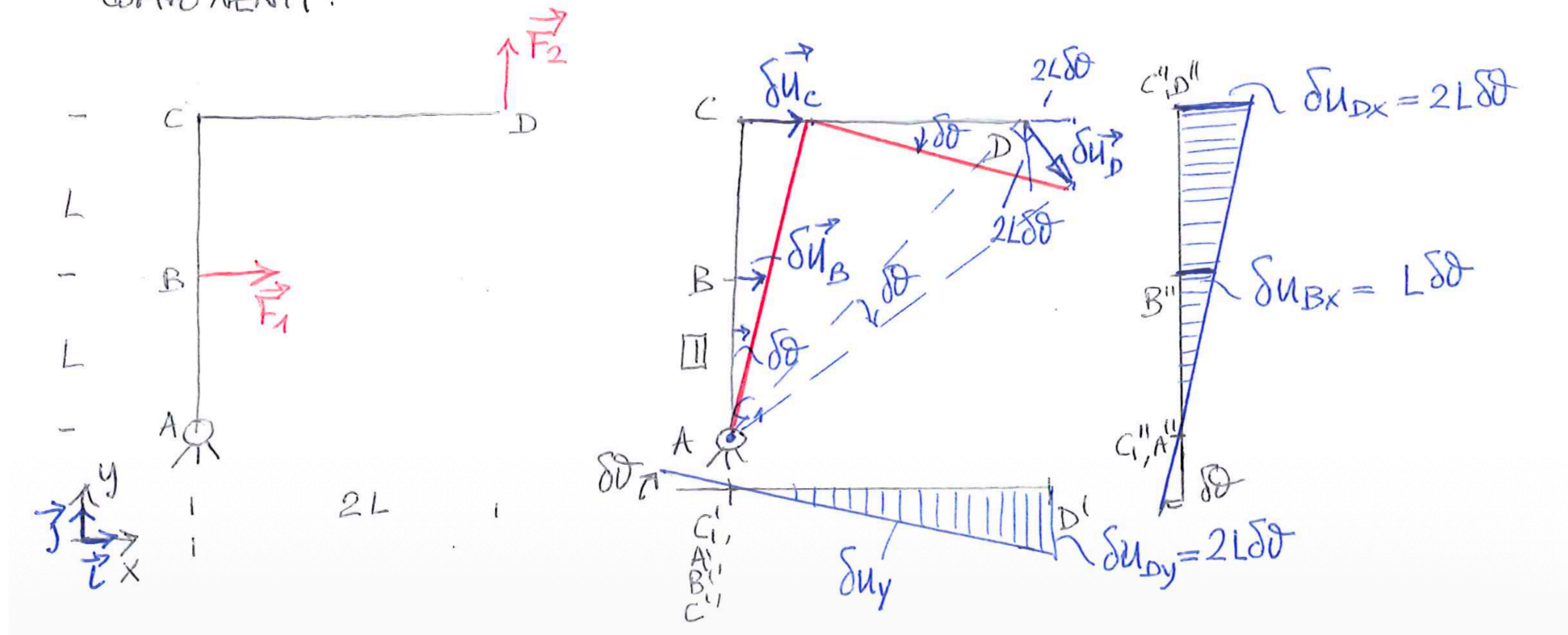
$$\delta \mathcal{L} = [F_1 \vec{i} \times L\delta\theta \vec{i}] + [F_2 \vec{j} \times (2L\delta\theta \vec{i} - 2L\delta\theta \vec{j})] = F_1 L\delta\theta - F_2 \cdot 2L\delta\theta$$

$$F_1 L\delta\theta \quad \quad \quad F_2 \cdot 2L\delta\theta \cdot 0 - F_2 \cdot 2L\delta\theta$$

$$\delta \mathcal{L} = (F_1 L - 2F_2 L) \delta\theta$$

NELL'ULTIMA ESPRESSIONE APPARE EVIDENTE CHE IL LAVORO VIRTUALE DIFENDE DALLA COORDINATA LIBERA $\delta\theta$ CHE ESPRIME L'AMPIEZZA DELLA ROTAZIONE VIRTUALE ATTORNO AL C.I.R. C_1 .

PER IL CASO ILLUSTRATO IN FIGURA SI HA QUINDI; OPERANDO PER COMPONENTI:



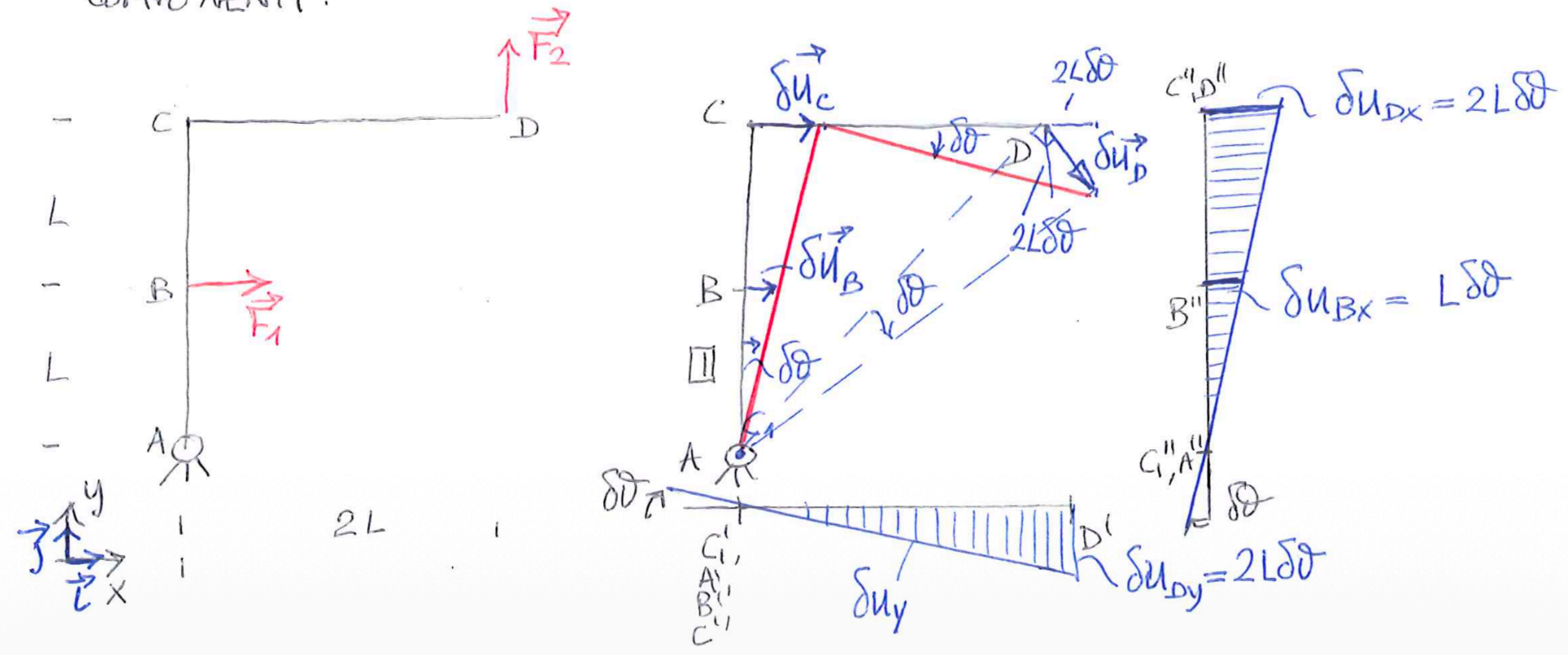
NOTA 3

NELL'ESEMPIO PRESENTATO SI SONO ESPLICITAMENTE INTRODOTTI GLI SVILUPPI PER COMPONENTI DELLE FORZE E DEGLI SPOSTAMENTI E SI E' PROCEDUTO A CALCOLARE I PRODOTTI SCALARI PER COMPONENTI.

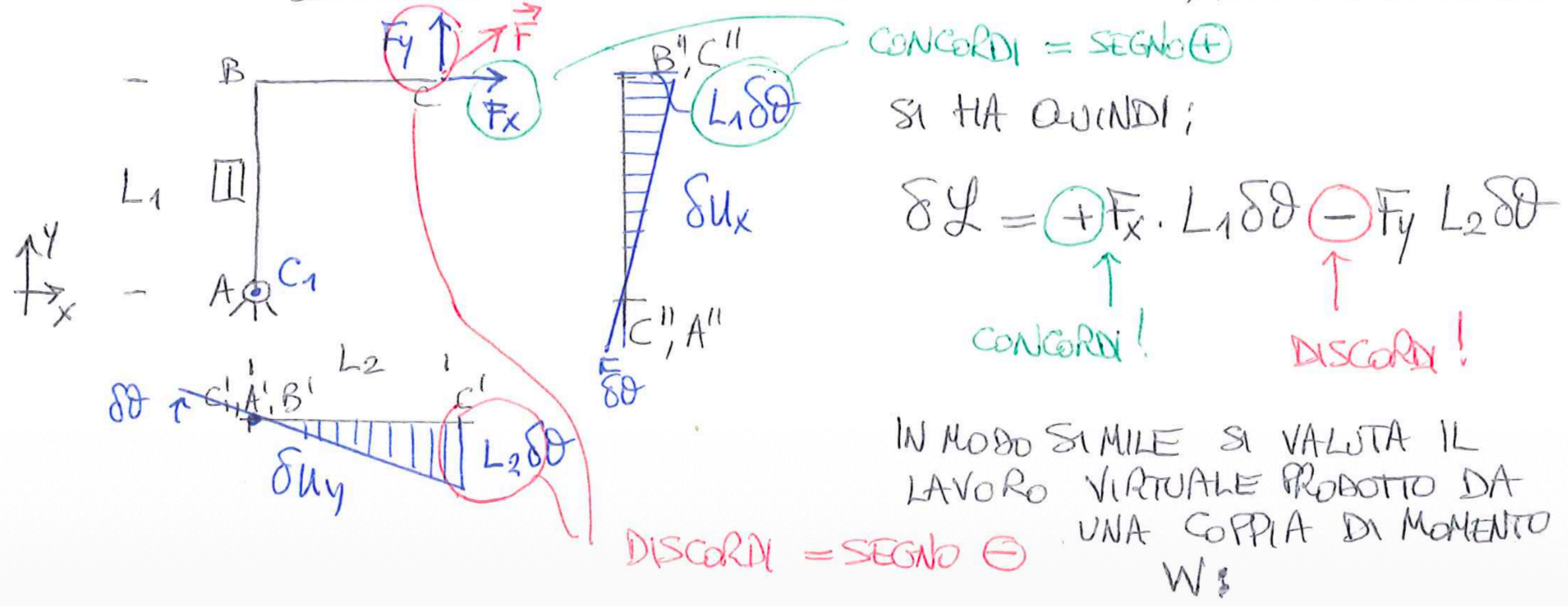
ESISTE PERO' UN METODO GRAFICO SPEDITIVO CHE SI BASA SOLO SULLA CONOSCENZA DEI DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO VIRTUALE.

COSI', SE SI RAPPRESENTANO LE FORZE MEDIANTE LE PROPRIE COMPONENTI SI SOMMANO I LAVORI COMPUTI DALLE SINGOLE COMPONENTI PER I CORRISPONDENTI SPOSTAMENTI VIRTUALI.

PER IL CASO ILLUSTRATO IN FIGURA SI HA QUINDI; OPERANDO PER COMPONENTI:

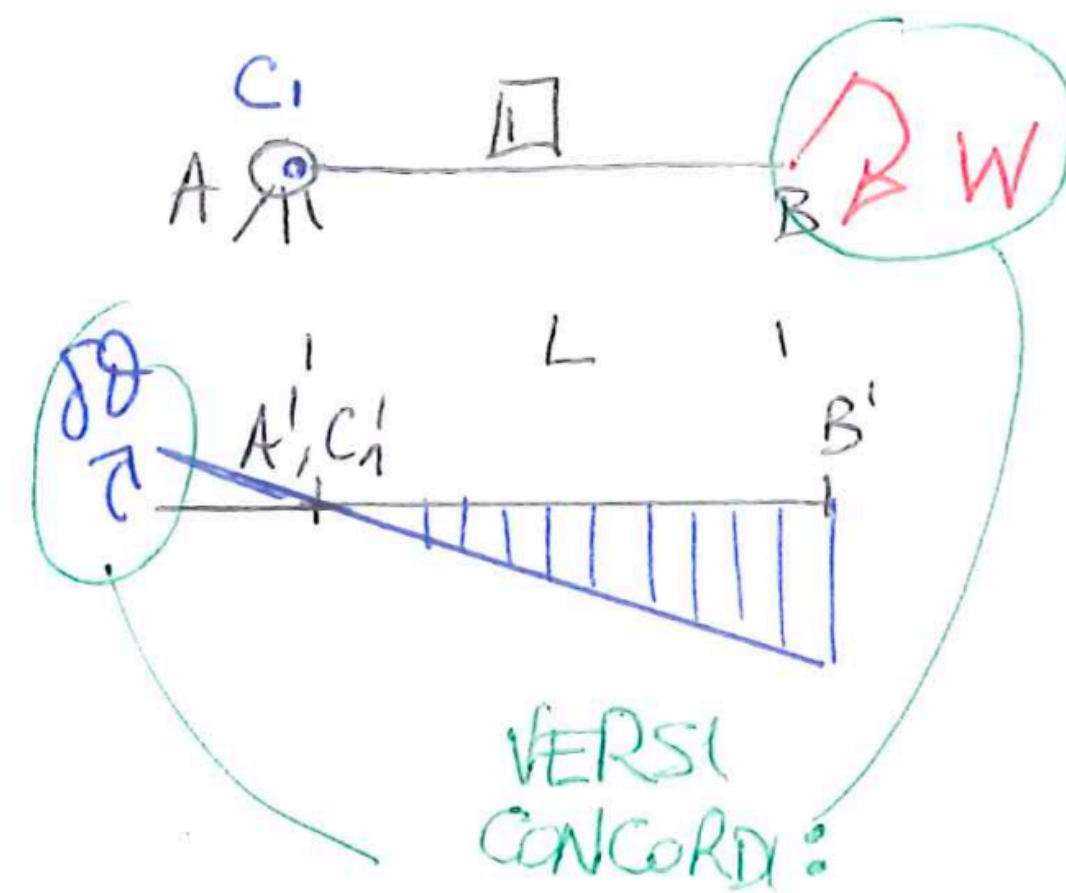


IL SEGNO DI OGNI ADDENDO È POSITIVO SE LA COMPONENTE DELLA FORZA È CONCORDE CON IL CORRISPONDENTE SPOSTAMENTO, NEGATIVO SE DISCORDE:



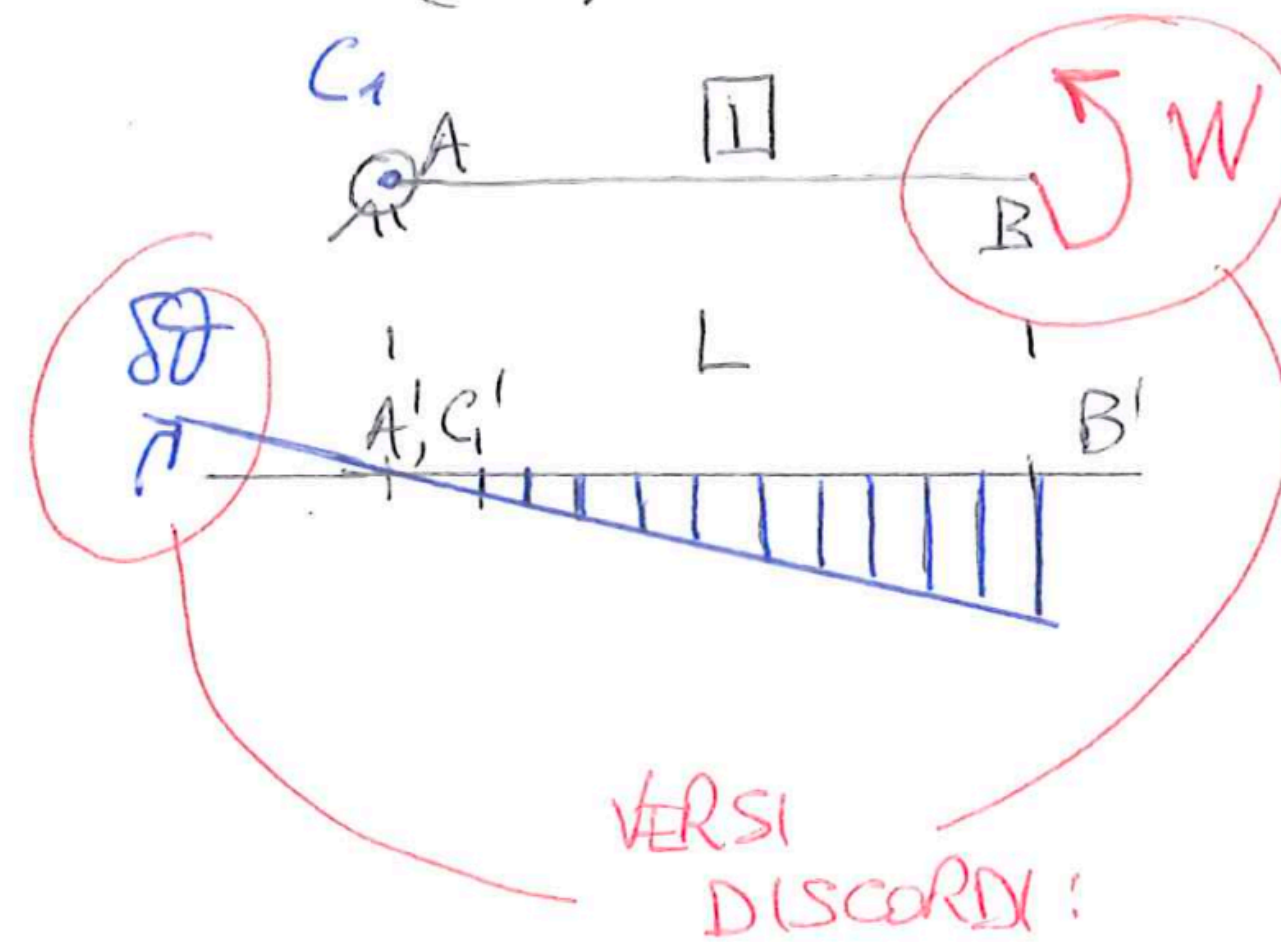
IL LAVORO VIRTUALE DELLA COPPIA W SI OTTIENE MOLTIPLICANDO IL MODULO
DI W CON L'AMPIEZZA DELLA ROTAZIONE $\delta\theta$ DEL CORPO RIGIDO. 6

IL SEGNO DIPENDE DAL FATTO CHE IL VERSO DELLA COPPIA E DELLA ROTAZIONE
SIANO CONCORDI (+) O DISCORDI (-):



$$\delta\mathcal{L} = +W \delta\theta$$

↑
CONCORDI!



$$\delta\mathcal{L} = -W \delta\theta$$

↑
DISCORDI!

□

LAVORO VIRTUALE DI UN CORPO RIGIDO LIBERO.

VALE IL SEGUENTE TEOREMA: IL LAVORO VIRTUALE DI UN CORPO RIGIDO LIBERO SOGGETTO A UN SISTEMA DI N FORZE $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ APPLICATE RISPETTIVAMENTE AI PUNTI Q_1, Q_2, \dots, Q_N DIPENDE SOLO DALLA RISULTANTE \vec{R} E DAL MOMENTO RISULTANTE:

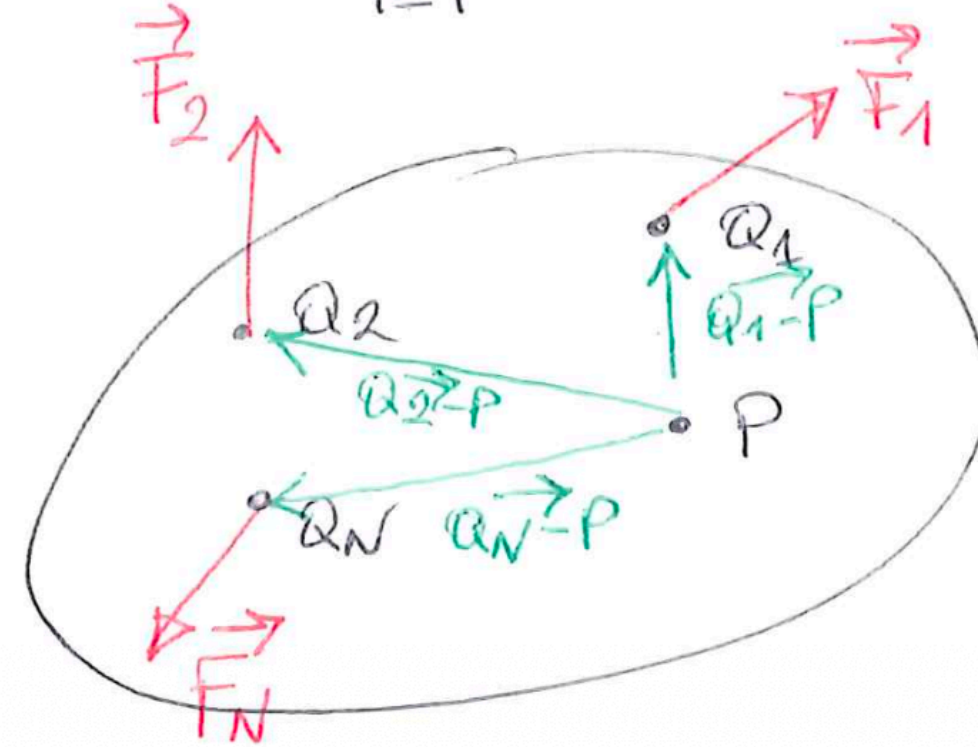
$$\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_P + \vec{M}_{(P)} \times \delta \omega \quad [13]$$

NELLA [13] $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ [14'] È LA RISULTANTE DEL SISTEMA DI FORZE

P È UN GENERICO PUNTO, SCELTO COME POLO PER CALCOLARE IL MOMENTO RISULTANTE

$$\vec{M}_{(P)} = (\vec{Q}_1 - P) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{Q}_2 - P) \wedge \vec{F}_2 + \dots + (\vec{Q}_N - P) \wedge \vec{F}_N =$$

$$\vec{M}_{(P)} = \sum_{i=1}^N (\vec{Q}_i - P) \wedge \vec{F}_i \quad [14''] \quad \text{È IL MOMENTO RISULTANTE DEL SISTEMA DI FORZE RISPETTO AL POLO P.}$$



E IN GENERALE:

DIMOSTRAZIONE: PER LA [10] SI HA:

$$\delta u_{Q_1} = \delta u_P + \delta \omega \wedge (\vec{Q}_1 - P)$$

$$\delta u_{Q_2} = \delta u_P + \delta \omega \wedge (\vec{Q}_2 - P)$$

$$\delta u_{Q_N} = \delta u_P + \delta \omega \wedge (\vec{Q}_N - P)$$

$$\delta u_{Q_i} = \delta u_P + \delta \omega \wedge (\vec{Q}_i - P)$$

PERTANTO PER LA [12] SI TROVA:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \delta \vec{u}_{Q_1} + \vec{F}_2 \times \delta \vec{u}_{Q_2} + \dots + \vec{F}_N \times \delta \vec{u}_{Q_N} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \times \delta \vec{u}_{Q_i} \quad 7$$

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F}_1 \times [\delta \vec{u}_P + \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_1 - P)] + \vec{F}_2 \times [\delta \vec{u}_P + \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_2 - P)] + \dots + \vec{F}_N \times [\delta \vec{u}_P + \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_N - P)]$$

$$\delta \mathcal{L} = [\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N] \times \delta \vec{u}_P + \vec{F}_1 \times \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_1 - P) + \vec{F}_2 \times \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_2 - P) + \dots + \vec{F}_N \times \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_N - P)$$

$$\delta \mathcal{L} = \left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right] \times \delta \vec{u}_P + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \times \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_i - P) \quad [15]$$

IL SECONDO TERMINE DELLA [15] PER LA NOTA PROPRIETÀ CICLICA DEL PRODOTTO MISTO $\vec{a} \times \vec{b} \wedge \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \wedge \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \wedge \vec{b}$ CON $\vec{a} = \vec{F}_i$, $\vec{b} = \delta \vec{\omega}$, $\vec{c} = (\vec{Q}_i - P)$ FORNISCE NELLA SECONDA FORMA:

$$\delta \mathcal{L} = \left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right] \times \delta \vec{u}_P + \delta \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N [(\vec{Q}_i - P) \wedge \vec{F}_i] \quad [16]$$

E DA QUI, SOSTITUENDO LE [14'], [14''] TENUTO CONTO DELLA PROPRIETÀ COMMUTATIVA DEL PRODOTTO SCALARE, SI OTTIENE:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_P + \vec{M}_{(P)} \times \delta \vec{\omega}. \quad [13] \quad \square$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (P.L.V.) PER CORPI RIGIDI.

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO NELLA CONFIGURAZIONE C , LIBERO O SOTTOPOSTO A VINCOLI PERFETTI, LISCI, BIATERI È CHE IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE AD ESSI APPLICATE SIA NULLO PER TUTTI I POSSIBILI SPOSTAMENTI VIRTUALI A PARTIRE DA C

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta \vec{u}_p, \forall \delta \vec{\omega} \iff \text{EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO} \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \end{array} \right. \quad [17]$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (P.L.V.) PER CORPI RIGIDI.

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO NELLA CONFIGURAZIONE C , LIBERO O SOTTOPOSTO A VINCOLI PERFETTI, LISCI, BIATERI E' CHE IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ADDESSO APPLICATE SIA NULLO PER TUTTI I POSSIBILI SPOSTAMENTI VIRTUALI A PARTIRE DA C

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta \vec{u}_p, \forall \delta \vec{\omega} \iff \text{EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO} \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \end{array} \right. \quad [17]$$

NOTA 4: L'ULTIMA IMPLICAZIONE SEGUE DALLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO, RAPPRESENTATE, PER QUANTO VISTO NELLA LEZIONE 1, DALLE EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \quad (\forall P.)$$

SI OSSERVI CHE NELLE [17] IL POLO (P) RISPETTO AL QUALE VIENE VALUTATO IL MOMENTO RISULTANTE E' IL MEDESIMO PUNTO AL QUALE CI SI RIFERISCE PER RAPPRESENTARE LA ROTO-TRASLAZIONE RIGIDA INFINITESIMA VIRTUALE:

$$\delta \vec{u}_q = \delta \vec{u}_p + \vec{\omega} \wedge (\vec{q} - \vec{p}) \quad [16].$$

□

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (P.L.V.) PER CORPI RIGIDI.

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER L'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO NELLA CONFIGURAZIONE C , LIBERO O SOTTOPOSTO A VINCOLI PERFETTI, LISCI, BIATERI E' CHE IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE AD ESSI APPLICATE SIA NULLO PER TUTTI I POSSIBILI SPOSTAMENTI VIRTUALI A PARTIRE DA C

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta \vec{u}_p, \forall \delta \vec{\omega} \iff \text{EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO} \iff \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \end{cases} \quad [17]$$

IL PLV SI PUO' COSI' SINTETIZZARE:

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta \vec{u}_p, \forall \delta \vec{\omega} \iff \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_{(P)} = \vec{0} \end{cases} \quad [17']$$

E RAPPRESENTA LA PIU' GENERALE LEGGE DELL'EQUILIBRIO. SU DI ESSO SI PUO' FONDARE DIRETTAMENTE LA STATICA DEI CORPI RIGIDI COME UNA DISCIPLINA AUTONOMA, SVINCOLATA DA OGNI DERIVAZIONE DALLE LEGGI DELLA DINAMICA.

LA DIMOSTRAZIONE SI BASA SU UN CORPO RIGIDO LIBERO: IN SEGUITO SI VEDRÀ COME TENERE CONTO DELLA PRESENZA DI VINCOLI ASSUMTI PERFETTI [SENZA CEDIMENTI], LUSCI [SENZA ATTRITO] E BILATERI [SE BLOCCANO UNA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO SECONDO UN DETERMINATO VERSO, BLOCCANO ANCHE LA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO NEL VERSO OPPOSTO].

DIMOSTRAZIONE:

(a) CONDIZIONE NECESSARIA: CORPO RIGIDO IN EQUILIBRIO $\Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta \vec{u}_p, \forall \delta \vec{\omega}$.

PER IL CORPO RIGIDO IL LAVORO VIRTUALE SI PUÒ SCRIVERE, GRAZIE ALLA [13] NELLA FORMA:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_p + \vec{M}_{(p)} \times \delta \vec{\omega} \quad [13]$$

MA SE IL CORPO RIGIDO È IN EQUILIBRIO SONO SODDISFATTE LE EQUAZIONI CARDINALI E PERTANTO:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{E} \quad \vec{M}_{(p)} = \vec{0}$$

SEGUE QUINDI DALLA [13]:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{0} \times \delta \vec{u}_p + \vec{0} \times \delta \vec{\omega} = 0$$

QUALUNQUE SIANO $\delta \vec{u}_p$ E $\delta \vec{\omega}$. □

LA DIMOSTRAZIONE SI BASA SU UN CORPO RIGIDO LIBERO: IN SEGUITO SI VERRA' COME TENERE CONTO DELLA PRESENZA DI VINCOLI ASSUMTI PERFETTI [SENZA CEDIMENTI], LISCI [SENZA ATTRITO] E BILATERI [SE BLOCCANO UNA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO SECONDO UN DETERMINATO VERSO, BLOCCANO ANCHE LA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO NEL VERSO OPPOSTO].

DIMOSTRAZIONE:

(b) CONDIZIONE SUFFICIENTE:

$$\text{SI HA } \delta \mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta \vec{u}_p, \forall \delta \vec{\omega} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_{(P)} = \vec{0}$$

POICHE' PER LA [13]

$$\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_p + \vec{M}_{(P)} \times \delta \vec{\omega} = 0 \quad \forall \delta \vec{u}_p, \forall \delta \vec{\omega} \quad [17"]$$

SI PUO' SCEGLIERE, PER, ESEMPIO, $\delta \vec{\omega} = \vec{0}$ E $\delta \vec{u}_p$ PARALLELO A \vec{R} E $\delta \vec{u}_p \neq \vec{0}$

ALLORA $\delta \mathcal{L} = \vec{R} \times \delta \vec{u}_p = 0 \Rightarrow \vec{R} = \vec{0}$; ANALOGAMENTE,

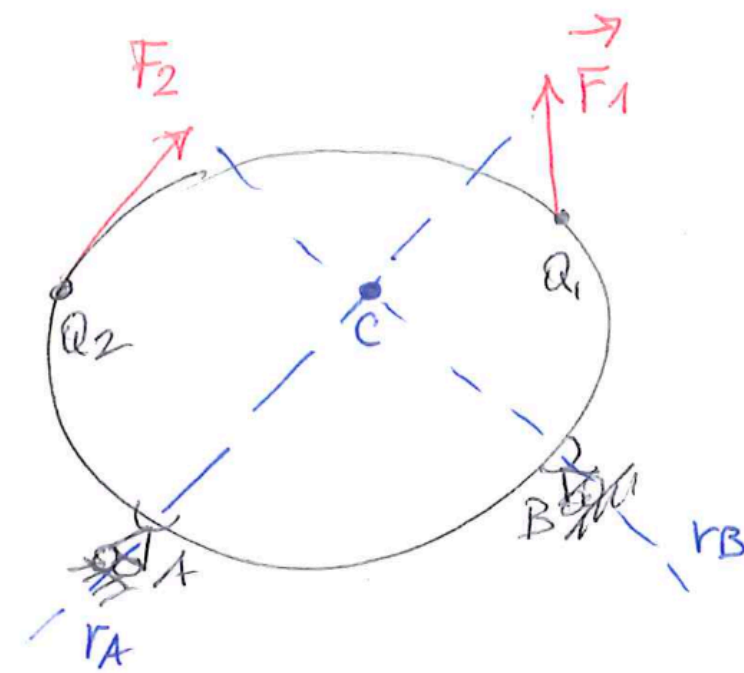
PRESO $\delta \vec{u}_p = \vec{0}$ E $\delta \vec{\omega} \neq \vec{0}$ MA $\delta \vec{\omega}$ PARALLELO A \vec{M} E SI TROVA

$$\text{ALLORA } \delta \mathcal{L} = \vec{M}_{(P)} \times \delta \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{(P)} = \vec{0}$$

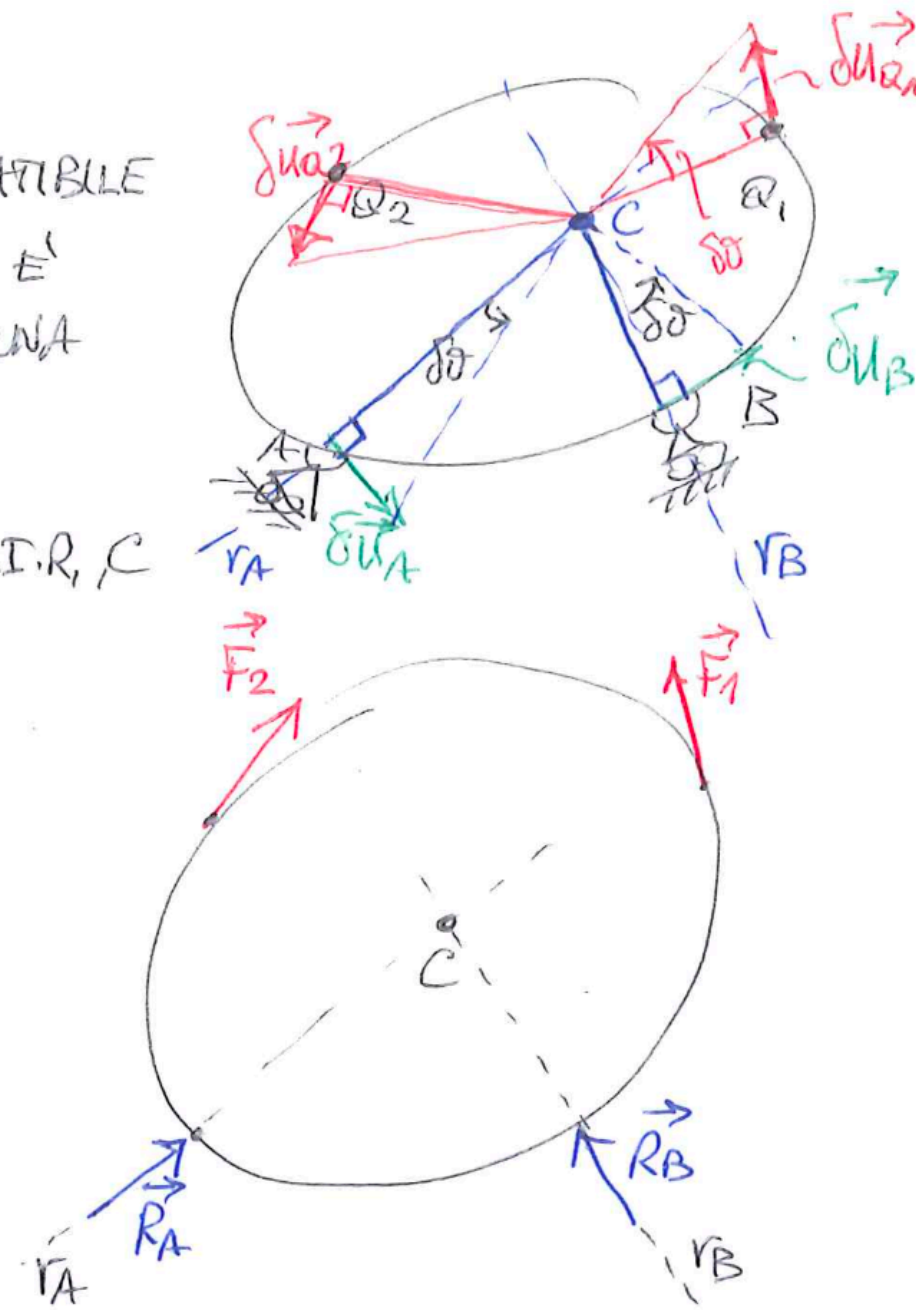
QUINDI PER L'ARBITRARIETA' DELLA SCELTA DI $\delta \vec{u}_p$ E DI $\delta \vec{\omega}$ SEGUE

DALLA [17"] $\vec{R} = \vec{0}$ E $\vec{M}_{(P)} = \vec{0}$, CIOE' LE EQUAZIONI CARDINALI \square

NEL CASO WCU IL CORPO RIGIDO SIA SOGGETTO A VINCOLI (PERFETTI, LISCI, BIATERI) SI DIMOSTRA CHE LE REAZIONI VINCOLARI NON ENTRANO NELL'ESPRESSIONE DEL LAVORO VIRTUALE.



LO SPOSTAMENTO VIRTUALE COMPATIBILE CON I VINCOLI È CHIARAMENTE UNA ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R., C



IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO, D'ALTRA PARTE È QUELLO INDICATO: POICHÉ I VINCOLI SONO PERFETTI, LE REAZIONI R_A E R_B SONO DIRETTE \perp AL PIANO DI SCORRIMENTO E QUINDI DIRETTE VERSO C (SECONDO LE RETTE v_A E v_B).

IL LAVORO VIRTUALE CALCOLATO CON RIFERIMENTO AL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO VALE:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \delta \vec{u}_{Q1} + \vec{F}_2 \times \delta \vec{u}_{Q2} + \vec{R}_A \times \delta \vec{u}_A + \vec{R}_B \times \delta \vec{u}_B \quad [18]$$

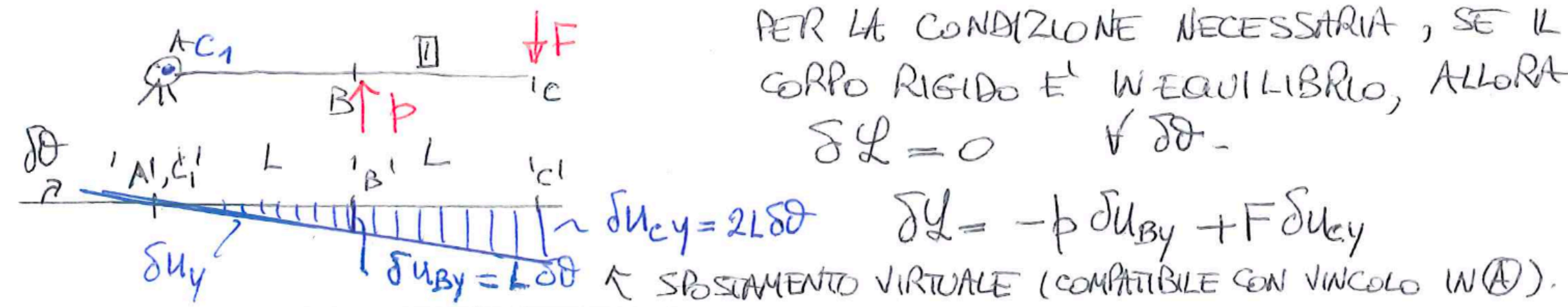
DOVE $\delta \vec{u}_{Q1} = \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_1 - \vec{C})$; $\delta \vec{u}_{Q2} = \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{Q}_2 - \vec{C})$; $\delta \vec{u}_A = \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{A} - \vec{C})$;
 $\delta \vec{u}_B = \delta \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{C})$ CON $\delta \vec{\omega} = \delta \theta \vec{k}$.

D'ALTRA PARTE $\delta \vec{u}_A$ È \perp A R_A E $\delta \vec{u}_B$ È \perp A R_B : $R_A \times \delta \vec{u}_A + R_B \times \delta \vec{u}_B = 0$
 E QUINDI LA [18] DIVIENE:

$$\delta \mathcal{L} = \vec{F}_1 \times \delta \vec{u}_{Q1} + \vec{F}_2 \times \delta \vec{u}_{Q2} \quad [18']$$

CIO È DIPENDE SOLTANTO DALLE FORZE ATTIVE.

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DEL P.L.V. PER DETERMINARE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI UNA CATENA CINEMATICA.



QUINDI $\delta Q = -pL \delta \theta + F \cdot 2L \delta \theta$ 10

$$\delta Q = (-pL + 2FL) \delta \theta = (-p + 2F)L \delta \theta \quad [19]$$

D'ALTRA PARTE SE SUSSISTE EQUILIBRIO DEVE RISULTARE $M_{Z(A)} = 0$ (IN MODO DA NON FARE COMPARIRE LE REAZIONI VINCOLARI E' UNA EQUAZIONE "PURA") E QUINDI:

$$\delta M_{Z(A)} = 0 \quad pL - 2FL = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 2F}$$

PERTANTO SE SUSSISTE L'EQUILIBRIO $-p + 2F = 0$ E DALLA [19] SEGUE:

$$\delta Q = 0 \quad \forall \delta \theta.$$

PER LA CONDIZIONE SUFFICIENTE SI PARTE DALLA [19] E SI AMMETTE CHE SIA VERIFICATA $\forall \delta \theta$:

$$\delta Q = (-p + 2F)L \delta \theta = 0 \quad \forall \delta \theta [19] \Rightarrow -p + 2F = 0 \Rightarrow p = 2F$$

QUINDI SOLO SE $p = 2F$ (CIOE' SE p E F SODDISFANO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO) $\delta Q = 0$ INDIPENDENTEMENTE DAL VALORE DI $\delta \theta$.

SI OSSERVI INFATTI CHE NELLA [19'] PER LA REGOLA DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO, SE $\delta \theta \neq 0$ (CIOE' SE HA UN VALORE QUALSIASI) L'UNICO MODO PERCHE' SI VERIFICHII $\delta Q = 0$ E' CHE SIA $p = 2F$.

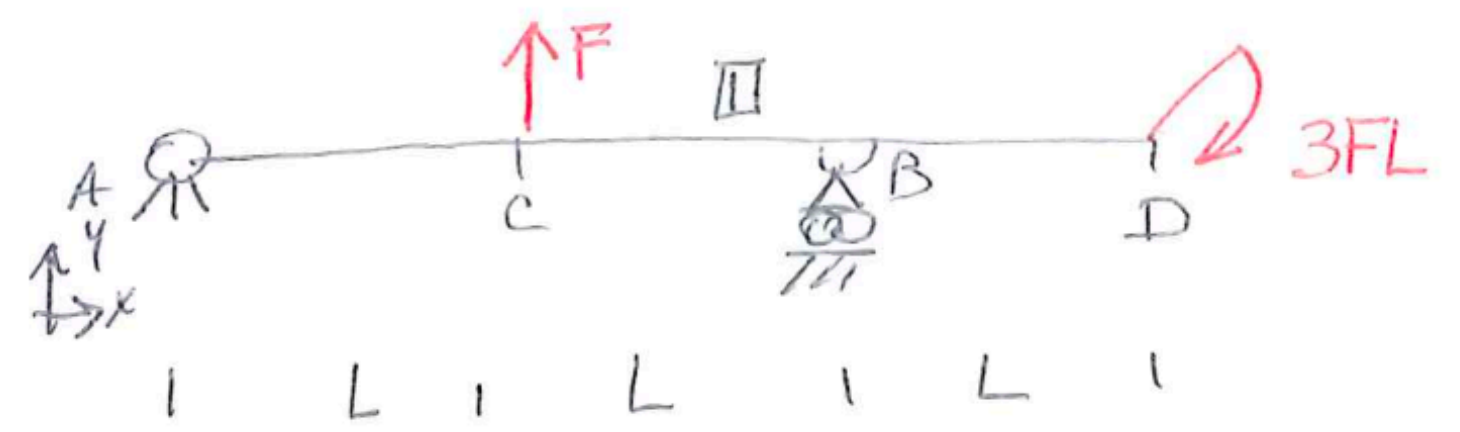
CALCOLO DI REAZIONI VINCOLARI DI STRUTTURE ISOSTATICHE (NON LABILI) MEDIANTE IL PLV.

IL PLV PERMETTE DI DETERMINARE, UNA PER VOLTA LE REAZIONI VINCOLARI DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA NON LABILE.

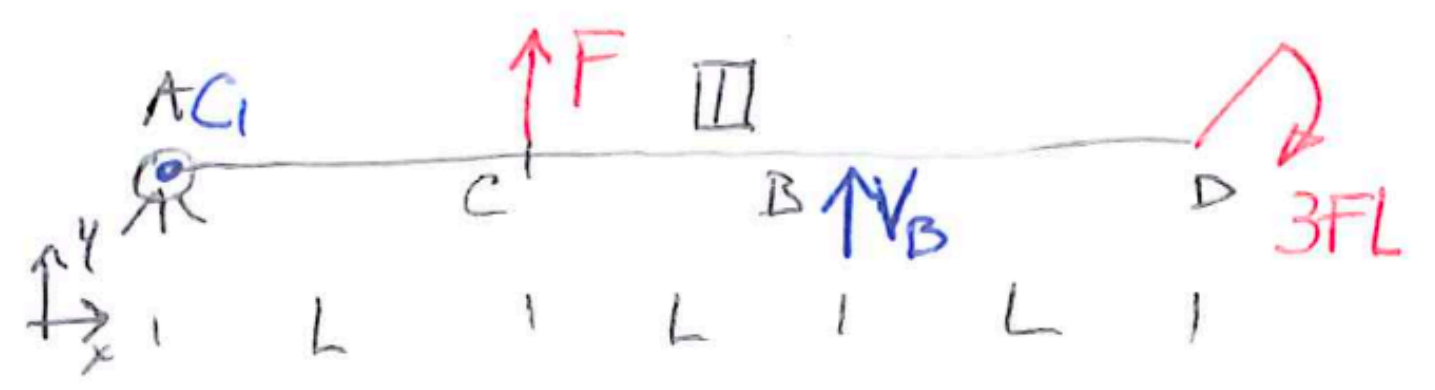
OPERATIVAMENTE SI SEGUE QUESTO PROCEDIMENTO:

- (1) SI METTE IN EVIDENZA LA REAZIONE VINCOLARE INCONNITA "LIBERANDO" LA CORRISPONDENTE COMPONENTE DI SPOSTAMENTO.
SI "DEGRADA" IL VINCOLO PRESENTE NEL PUNTO RIDUCENDO QUINDI DI UNA UNITÀ IL G.D.V. DELLA STRUTTURA: QUESTA DIVIENE 1 VOLTA IPOSTATICA (CATENA CINEMATICA)
- (2) SI INDIVIDUA UN CAMPO DI SPOSTAMENTI VIRTUALI (= INFINITESIMI E COMPATIBILI CON I RESTANTI VINCOLI) CHE DIPENDE DA UN UNICO PARAMETRO LIBERO, O LAGRANGIANO; PER ESEMPIO $\delta\theta$.
- (3) SI CALCOLA IL LAVORO VIRTUALE COMPIUTO DAI CARICHI PRESENTI (IVI INCLUSA LA REAZIONE VINCOLARE MESSA IN EVIDENZA) PER LO SPOSTAMENTO VIRTUALE E SI IMPONE $\boxed{\delta\mathcal{L} = 0 \quad \forall \delta\theta}$. QUESTA EQUAZIONE FORNISCE LA REAZIONE CERCATA.

ESEMPIO: PER LA STRUTTURA ISOSTATICA IN FIGURA SI VUOLE CALCOLARE V_B ! 11

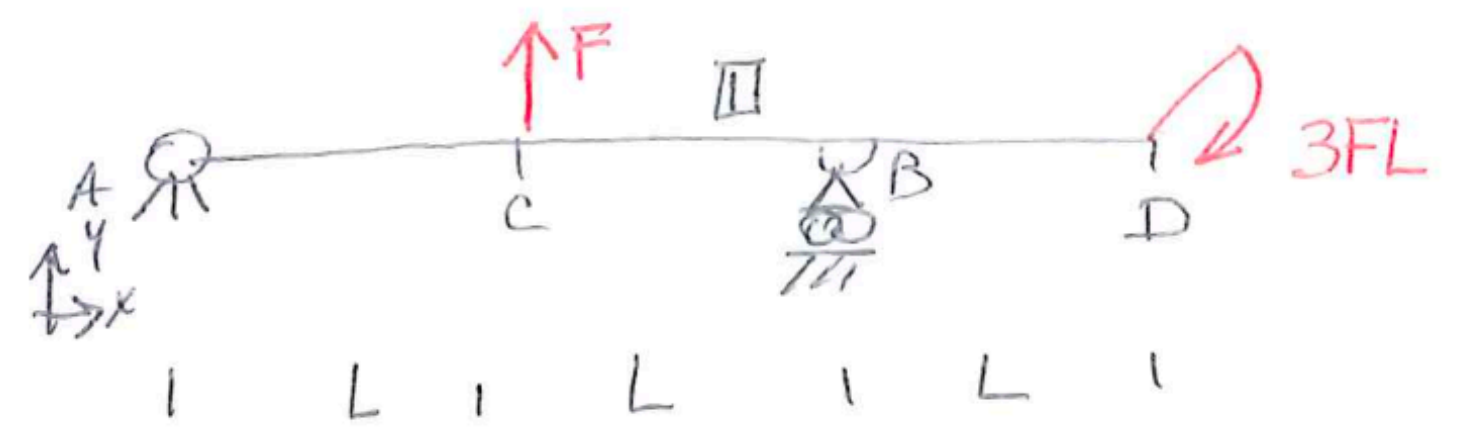


(1) SI ELIMINA IL VINCOLO IN (B) (ESSENDO UN VINCOLO SEMPLICE, "DEGRADARLO" SIGNIFICA SOPPRIMERLO) EVIDENZIANDO LA REAZIONE V_B :



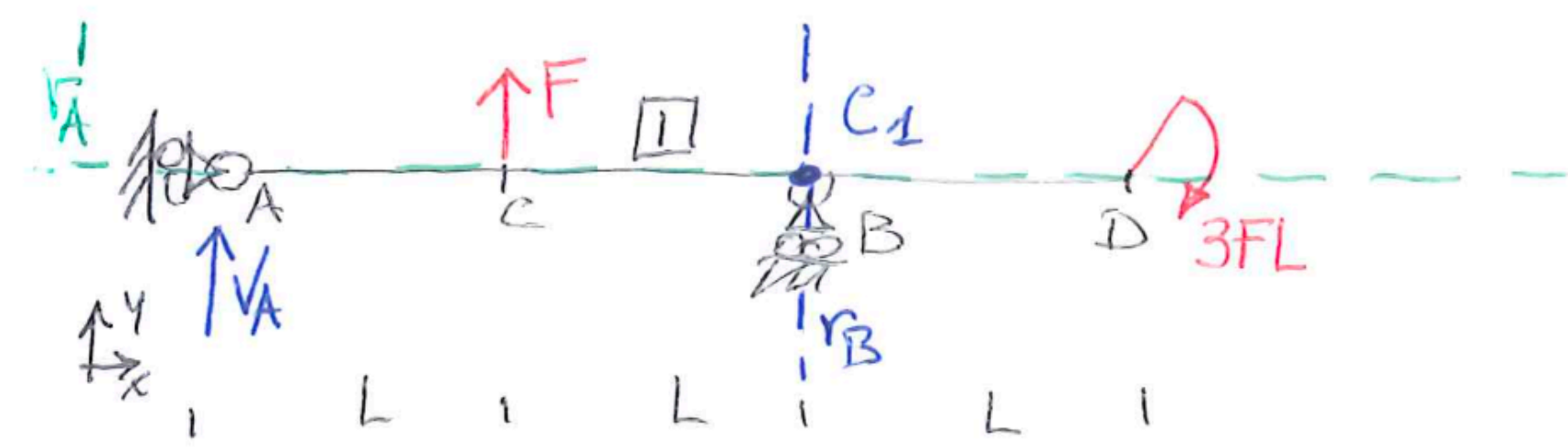
$$C_1 = (0, 0)$$

ESEMPIO: PER LA STRUTTURA ISOSTATICA IN FIGURA SI VUOLE CALCOLARE V_B ! 11

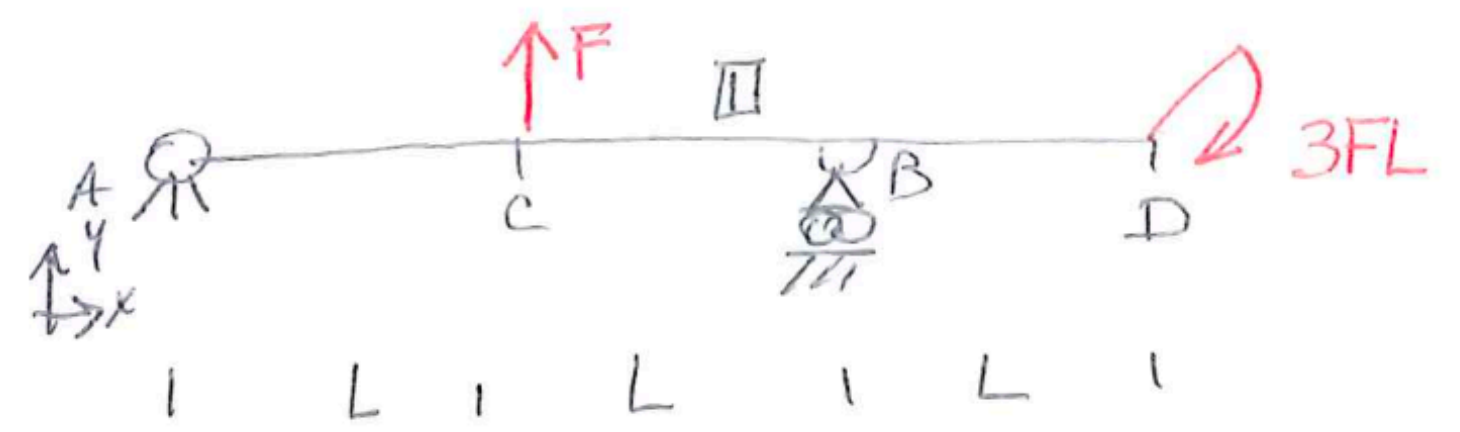


PER LA STESSA STRUTTURA DI PARTENZA, SE SI VUOLE CALCOLARE LA REAZIONE V_A SI PROCEDE COSÌ! 12

(1) SI DEGRADA LA CERNIERA IN (A) SOSTITUENDOLA CON UN CARRELLO CON PIANO DI SCORRIMENTO VERTICALE, IN MODO DA EVIDENZIARE LA FORZA INCOGNITA V_A !



ESEMPIO: PER LA STRUTTURA ISOSTATICA IN FIGURA SI VUOLE CALCOLARE V_B ! 11



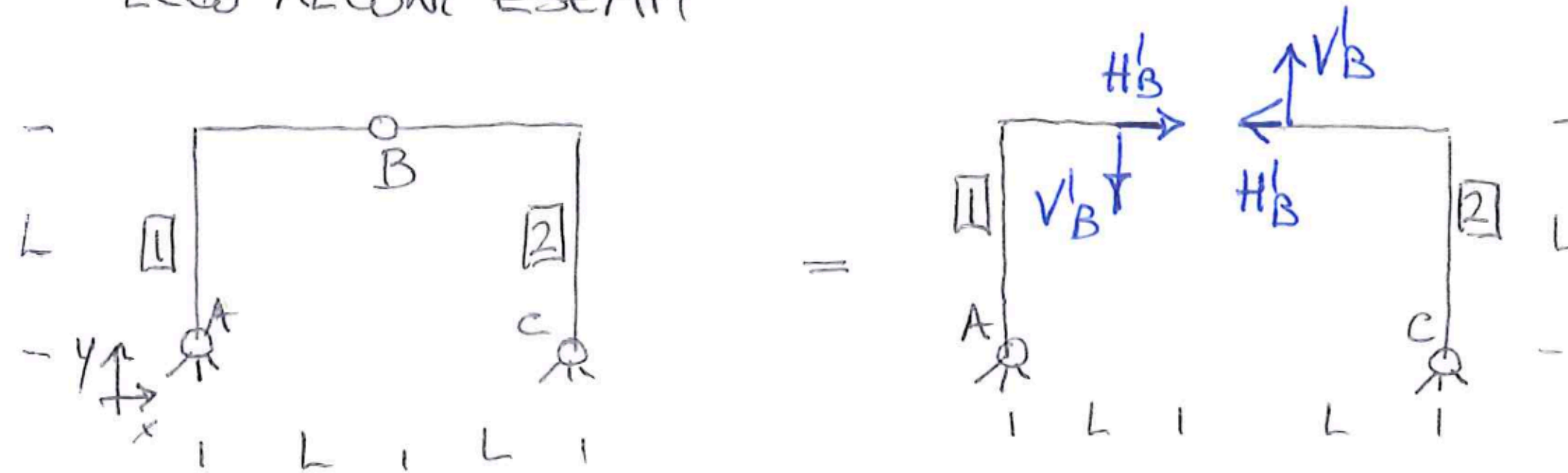
SE INFINE SI VUOLE CALCOLARE LA REAZIONE H_A SI PROCEDE COSÌ:

- (1) SI ~~DEGRADA~~ LA CERNIERA IN (A) SOSTITUENDOLA CON UN CARRELLO CON PIANO DI SCORRI-
MENTO ORIZZONTALE, COSÌ DA EVIDENZIARE LA FORZA INCOGNITA H_A :



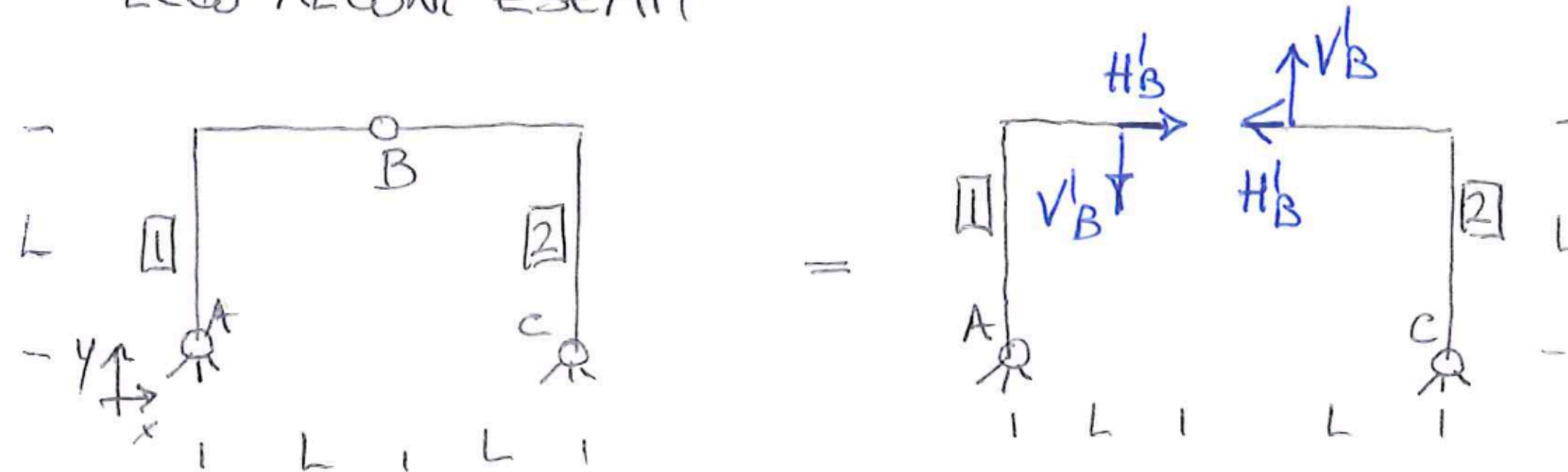
PER CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI DI VINCOLI INTERNI OCCORRE DI NUOVO "DEGRADARE" IL VINCULO METTENDO IN EVIDENZA LE DUE REAZIONI CHE LE 2 PARTI SI TRASMETTONO MUTUAMENTE ATTRAVERSO IL VINCULO. OVVIAMENTE I VERSI DELLE 2 REAZIONI DEBONO RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE.

ECCO ALCUNI ESEMPLI



PER CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI DI VINCOLI INTERNI OCCORRE DI NUOVO "DEGRADARE" IL VINCULO METTENDO IN EVIDENZA LE DUE REAZIONI CHE LE 2 PARTI SI TRASMETTONO MUTUAMENTE ATTRAVERSO IL VINCULO. OVVIAMENTE I VERSI DELLE 2 REAZIONI DEBONO RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE.

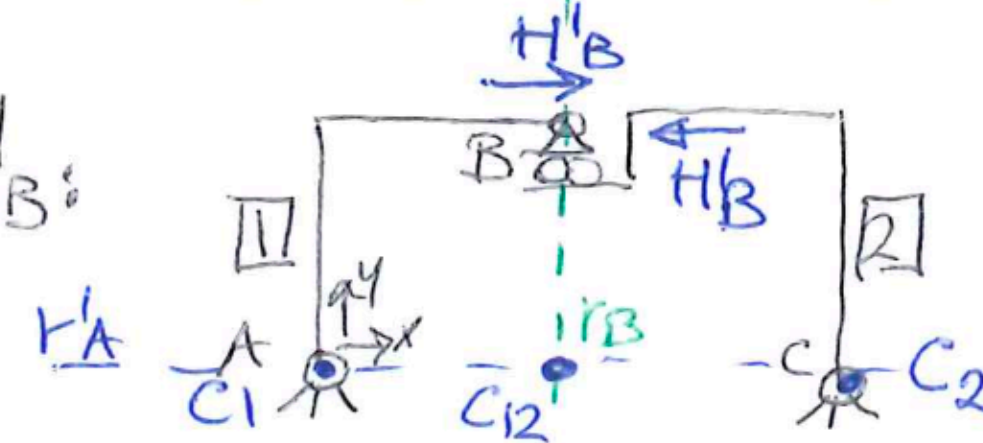
ECCO ALCUNI ESEMPI



OVVIAMENTE SI DEVE CONSIDERARE UNA CATENA CINEMATICA PER VOLTA:

• PER DETERMINARE H_B :

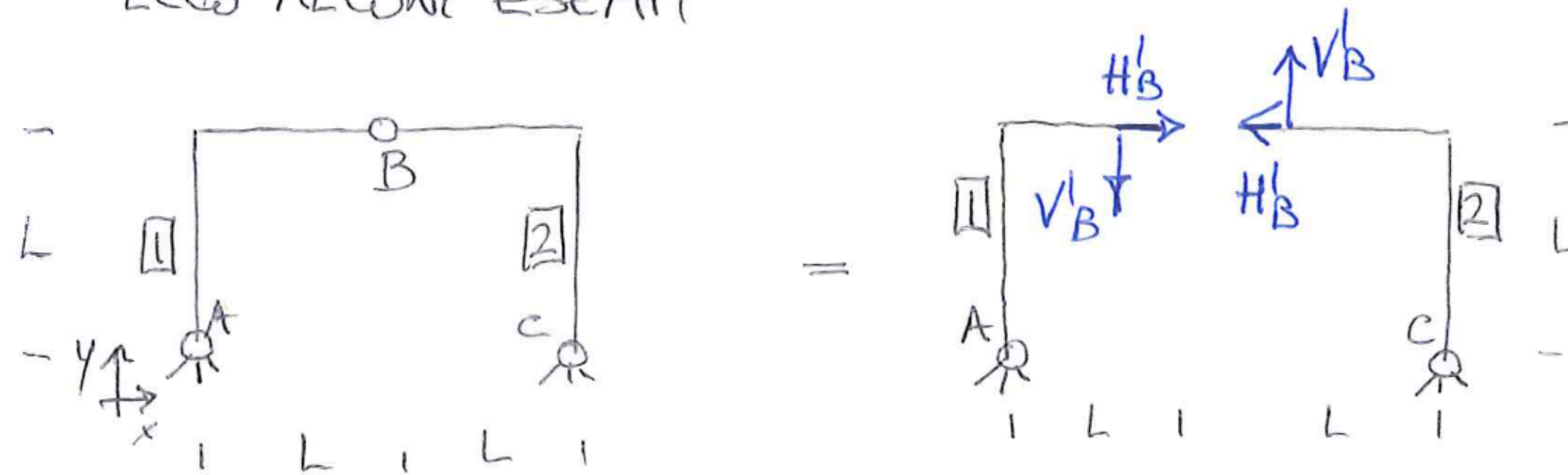
SI NOTI ALLINEAMENTO $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$.



$$\begin{aligned}
 C_1 &\equiv (A) = (0,0) \\
 C_2 &\equiv (C) = (2L,0) \\
 C_{12} &= (L,0) \begin{cases} C_{12} \in r_B \\ C_{12} \in r'_A \end{cases}
 \end{aligned}$$

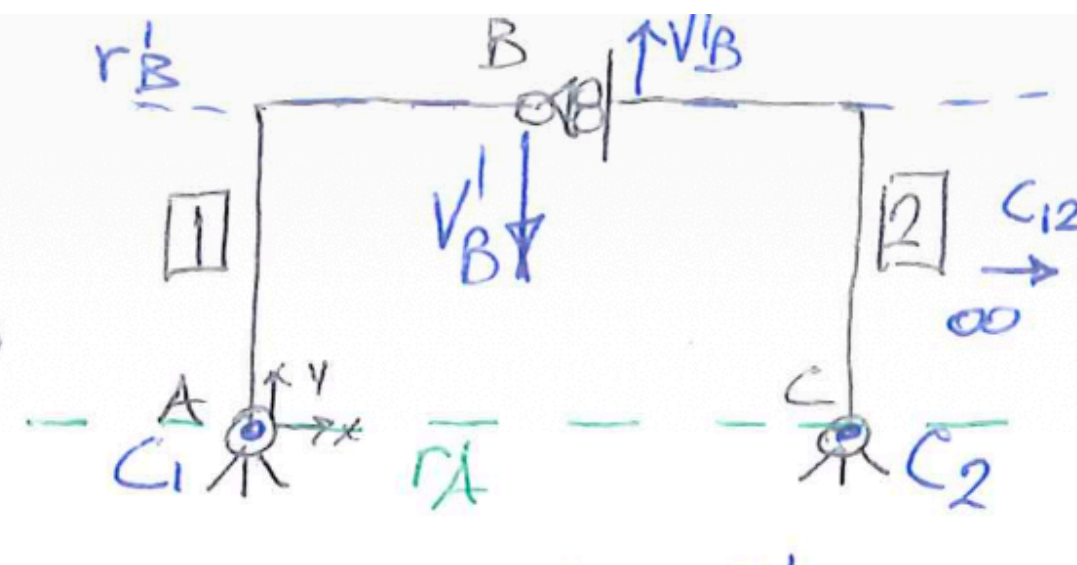
PER CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI DI VINCOLI INTERNI OCCORRE DI NUOVO "DEGRADARE" IL VINCULO METTENDO IN EVIDENZA LE DUE REAZIONI CHE LE 2 PARTI SI TRASMETTONO MUTUAMENTE ATTRAVERSO IL VINCULO. OVVIAMENTE I VERSI DELLE 2 REAZIONI DEBONO RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE.

ECCO ALCUNI ESEMPI



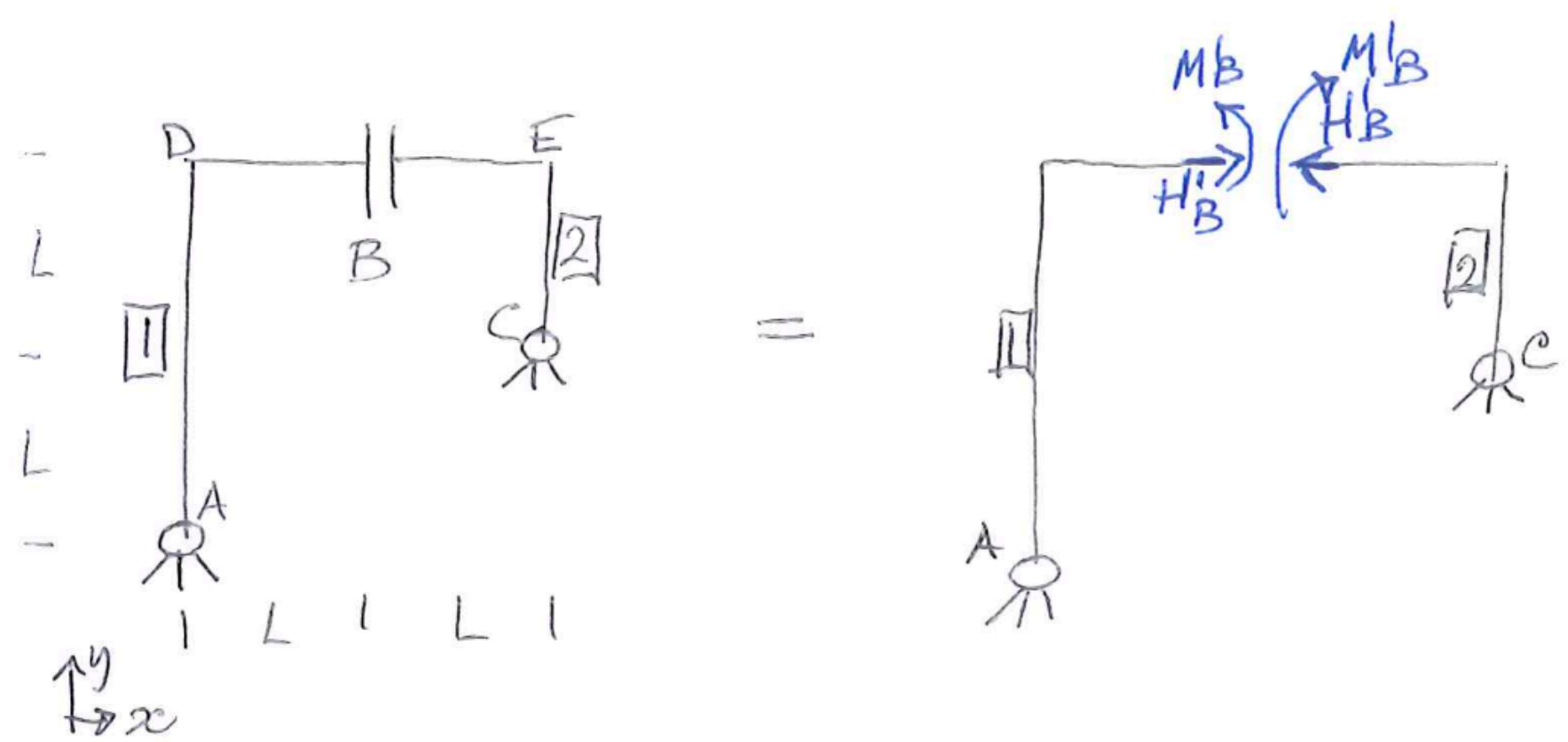
• PER DETERMINARE V_B^I :

SI NOTI L'ALLINEAMENTO $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$.

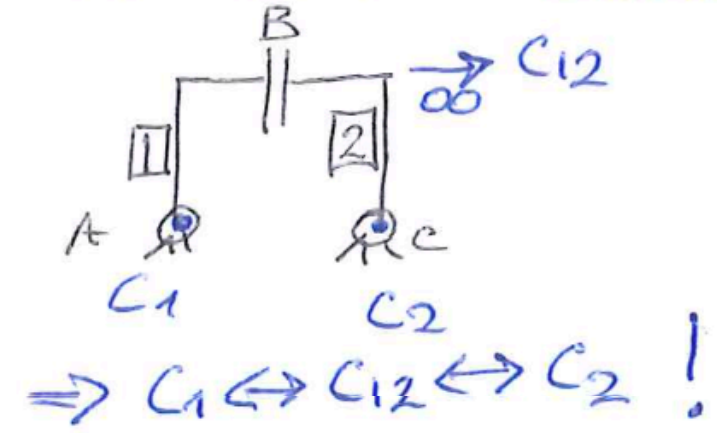


$C_1 \equiv (A) = (0, 0)$
 $C_2 \equiv (C) = (2L, 0)$
 $C_{12} = (\infty, 0) \begin{cases} C_{12} \in r_A^I \\ C_{12} \in r_B \end{cases}$

14



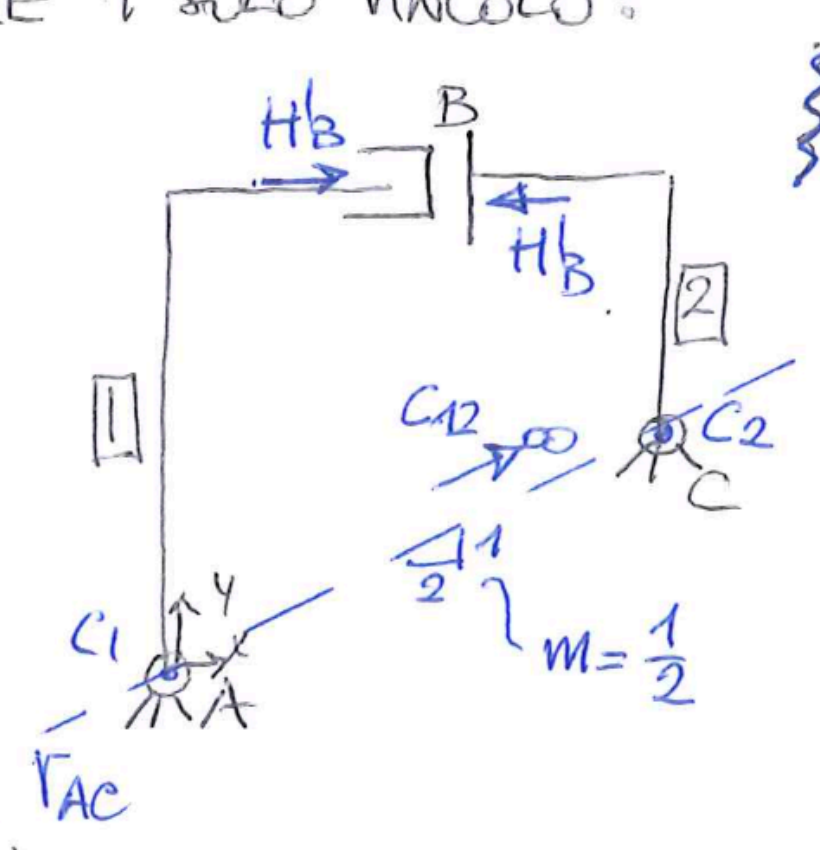
SI NOTI CHE SE I PLASTRI DELLA TRAVE 1 E 2 FOSSERO DI EGUALE LUNGHEZZA, LA STRUTTURA SAREBBE LABILE!



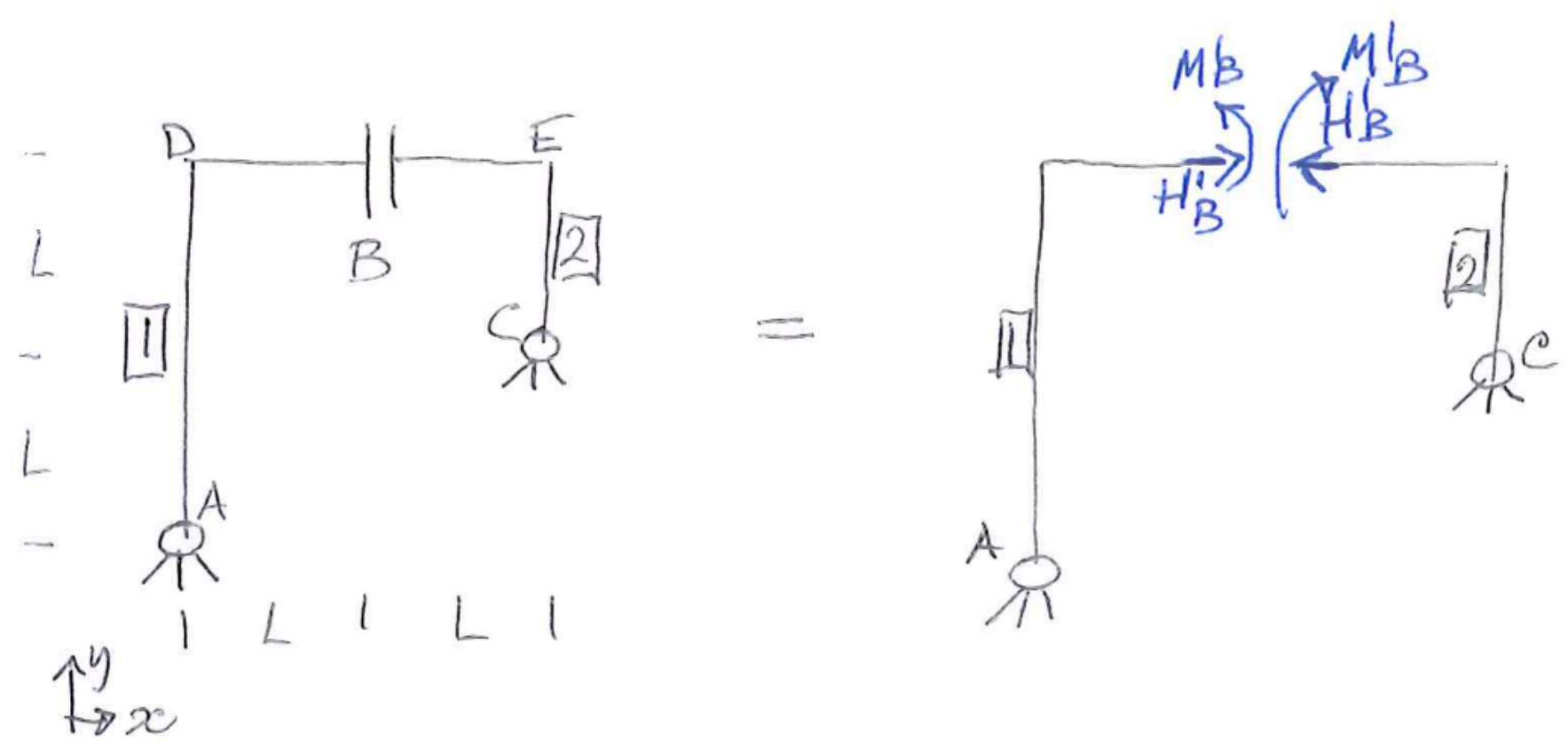
ANCHE IN QUESTO CASO SI DEVE CONSIDERARE UNA CATENA CINEMATICA PER VOLTA, DEGRADANDO SEMPRE 1 SOLO VINCOLO:

• PER DETERMINARE H_B^I :

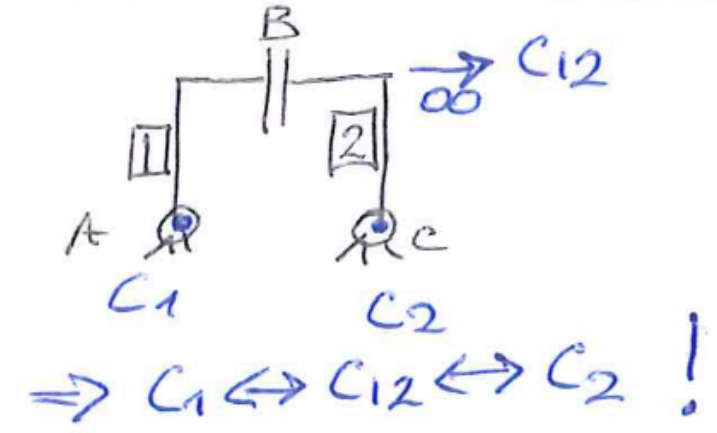
SI NOTI CHE PER LA PRESENZA DEL PATTINO-MANICOTTO IN (B) $C_{12} \in r_{\infty}$
 PER L'ALLINEAMENTO $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$, $C_{12} \in r_{AC}$
 NE SEGUE CHE C_{12} È PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA r_{AC} .



$C_1 \equiv (A) = (0, 0)$
 $C_2 \equiv (C) = (2L, L)$
 $C_{12} = (\infty, \frac{1}{2})$
 ↑
 È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI r_{AC} .

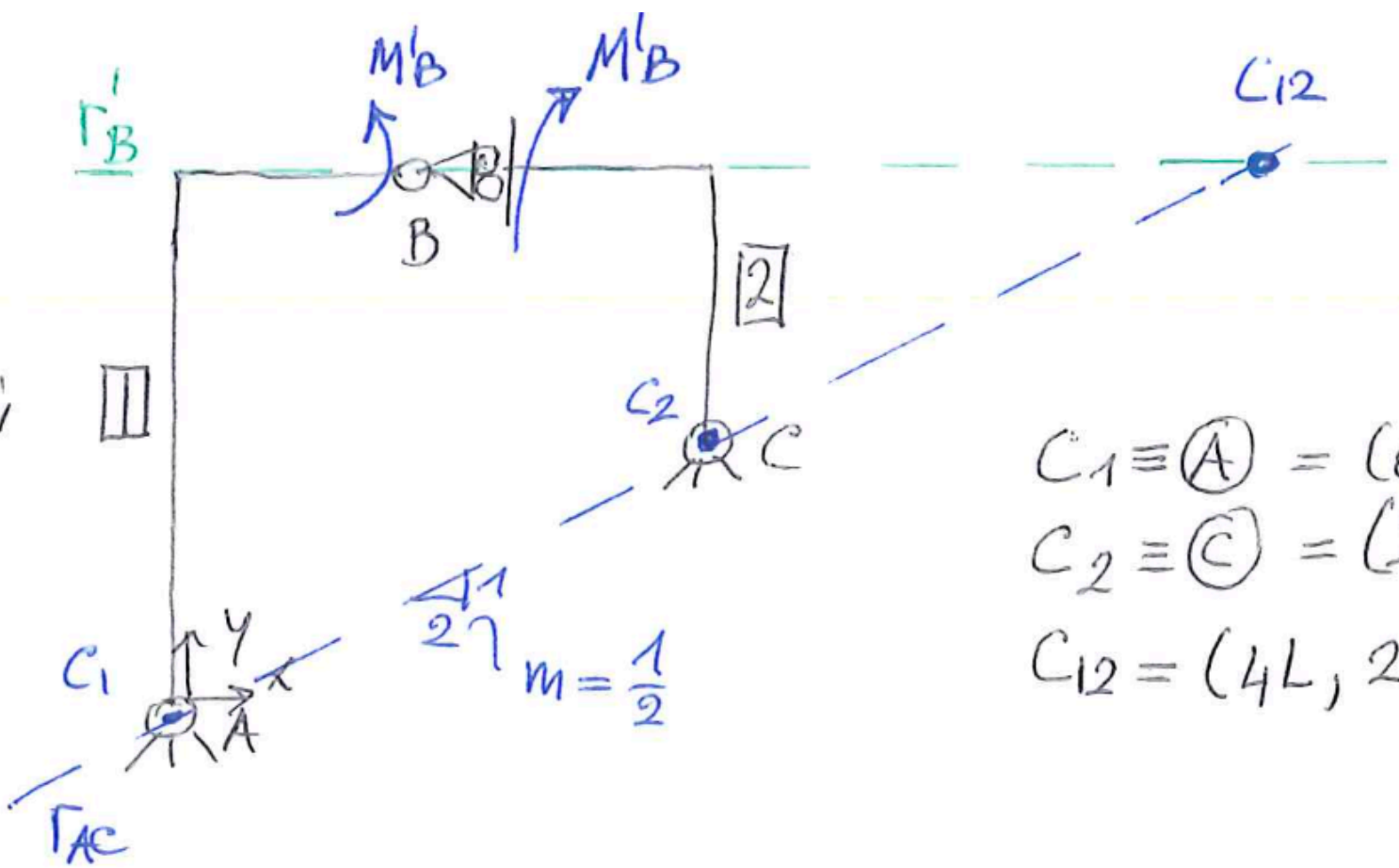


SI NOTI CHE SE I PLASTRI DELLA TRAVE 1 E 2 FOSSERO DI EGUALE LUNGHEZZA, LA STRUTTURA SAREBBE LABILE!



• PER DETERMINARE M'_B :

SI NOTI CHE PER LA PRESENZA DEL CARRELLO IN (B) C_{12} È r'_B PER L'ALLINEAMENTO $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$, $C_{12} \in r_{AC}$ NE SEGUE CHE C_{12} È IL PUNTO DOVE r'_B E r_{AC} SI INTERSECANO.



$$C_1 \equiv (A) = (0, 0)$$

$$C_2 \equiv (C) = (2L, L)$$

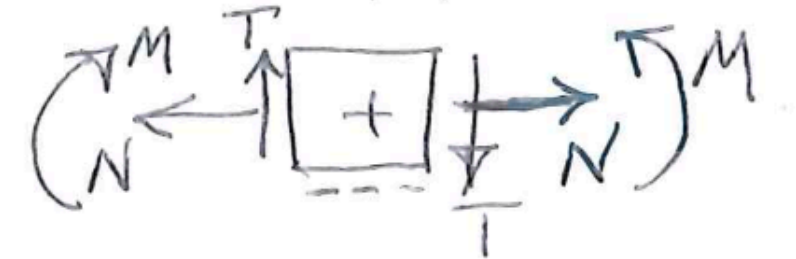
$$C_{12} = (4L, 2L)$$

SI NOTI CHE L'EQUAZIONE DI r_{AC} È $y = \frac{1}{2}x$; QUELLA DI r'_B È $y = 2L$; L'INTERSEZIONE È DUNQUE $C_{12} = (4L, 2L)$.

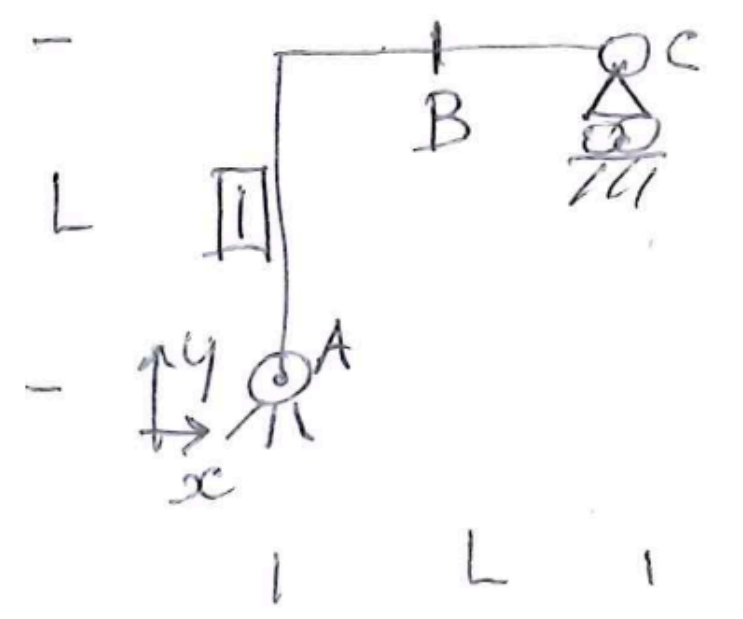
CALCOLO DI COMPONENTI DELL'AZIONE INTERNA IN UN PUNTO DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA (NON LABILE) MEDIANTE IL P.L.V.

SI PROCEDE IN MODO ANALOGO AL CALCOLO DI REAZIONI DI VINCOLI INTERNI; SI INTRODUCE UNA SCONNESSIONE CHE "RILASCI" LA SOLA COMPONENTE DI SPOSTAMENTO ASSOCIATA ALL'AZIONE INTERNA DA CALCOLARE.

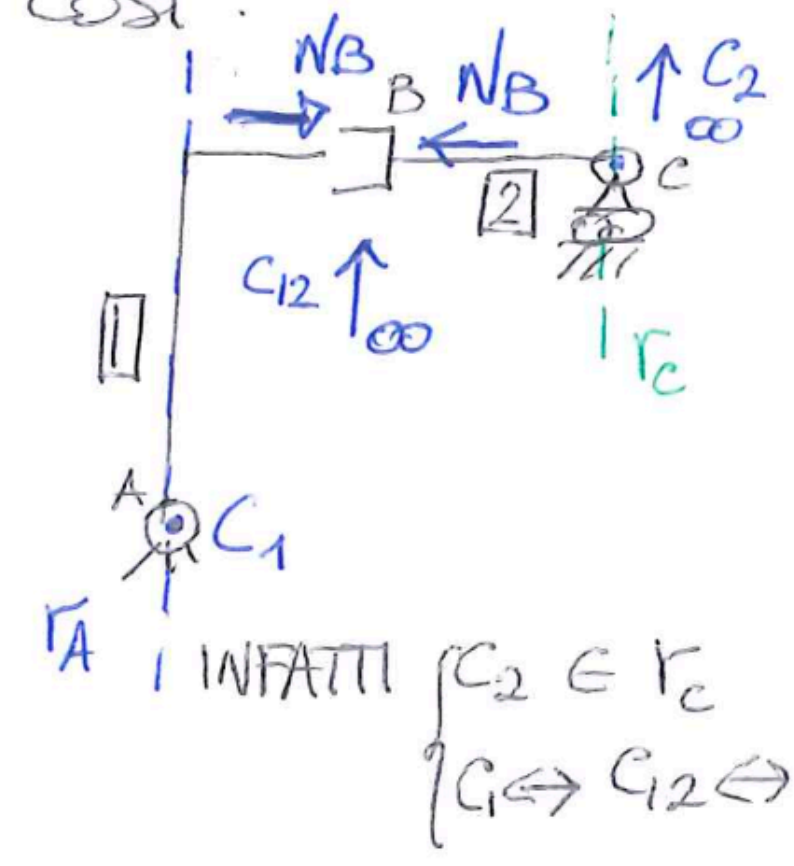
I VERSI DELLE AZIONI INTERNE DEVONO RISPETTARE IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE E VANNO SCELTI CONFORMEMENTE A QUELLI ASSUNTI POSITIVI NELLA CONVENZIONE DEL CONICO ELEMENTARE:



PER ESEMPIO, SE SI DEVONO CALCOLARE LE AZIONI INTERNE NEL PUNTO (B) DELLA STRUTTURA IN FIGURA SI PROCEDE COSI':



CALCOLO DI N:



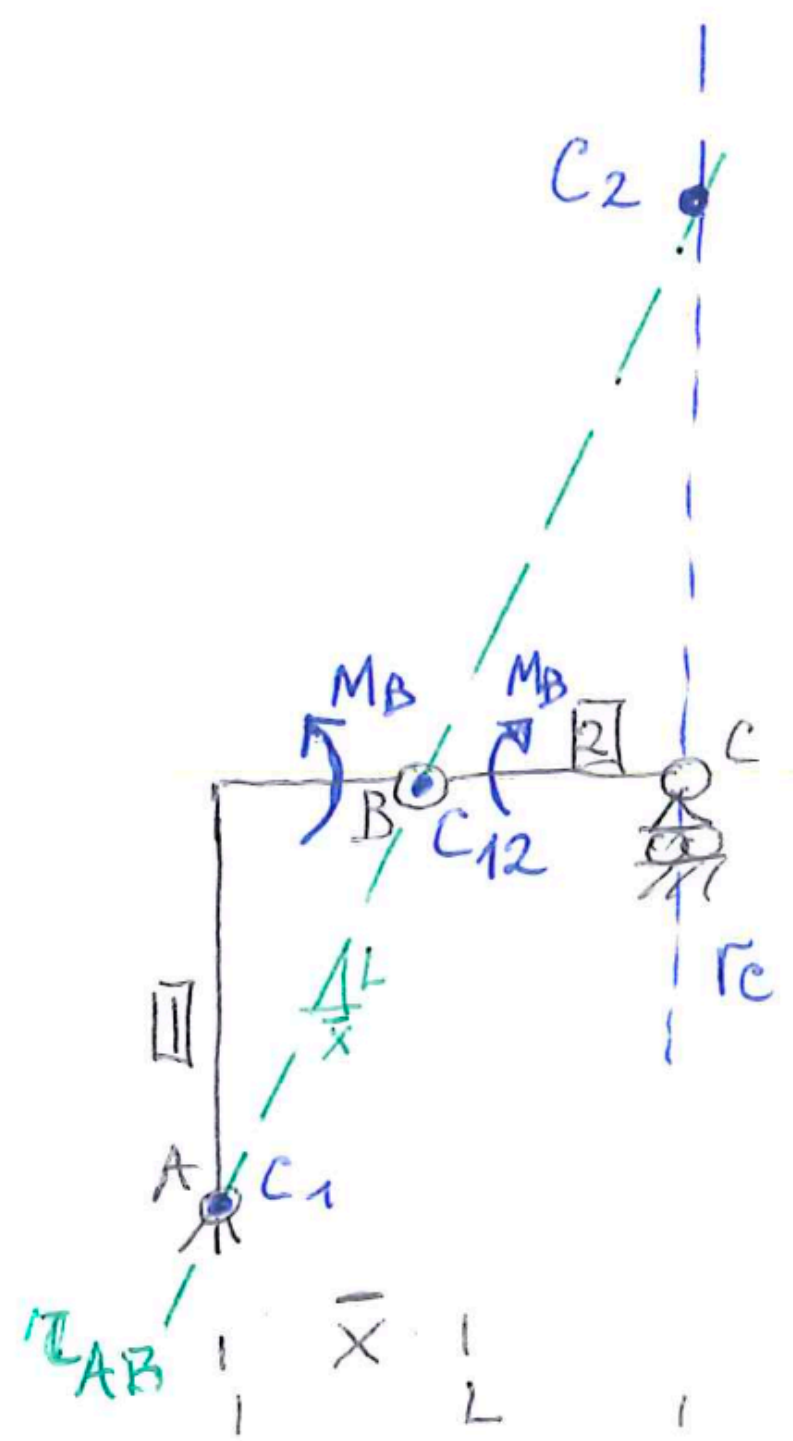
$$C_1 = A = (0, 0)$$

$$C_{12} = (\infty, \infty)$$

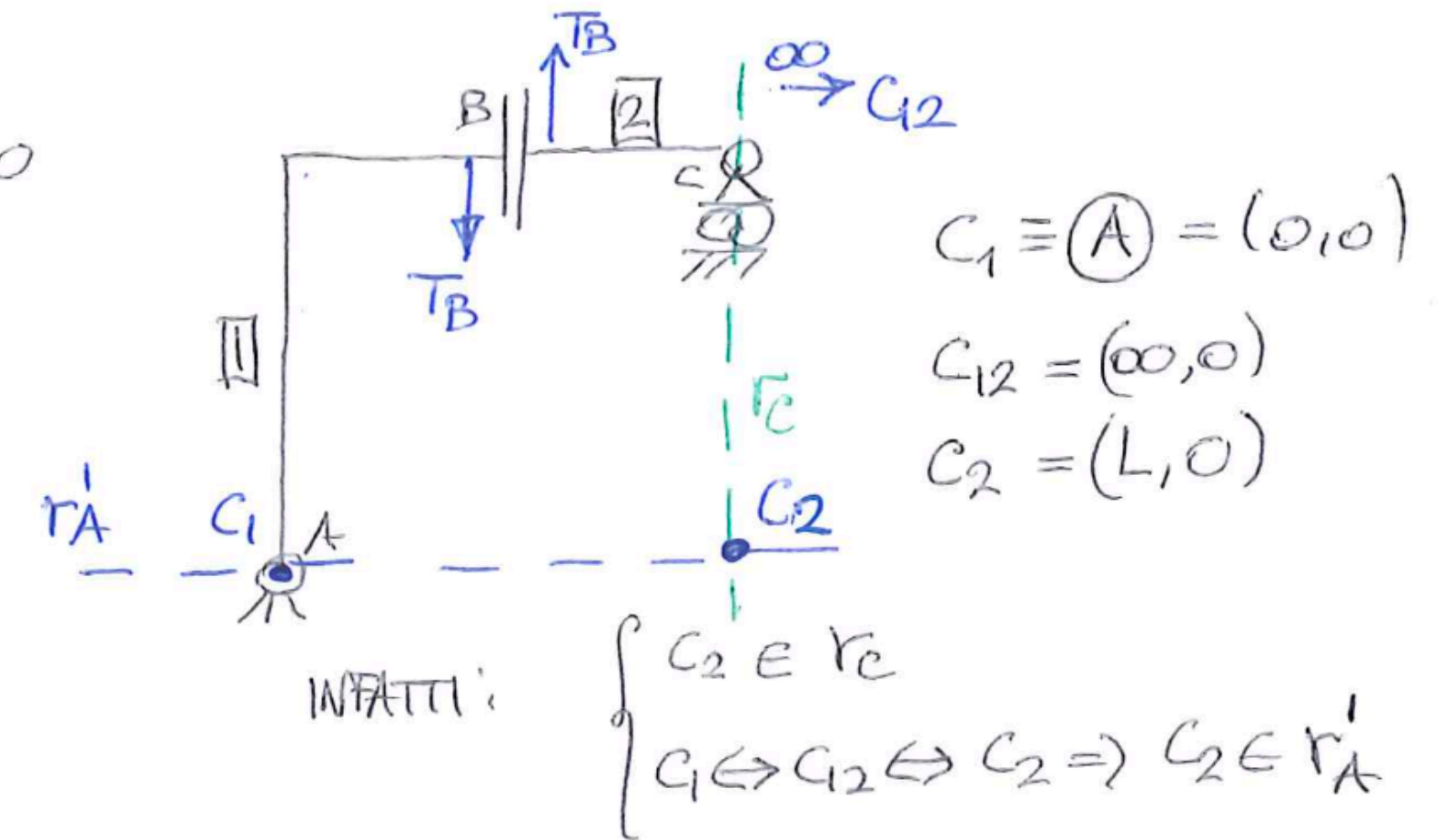
$$C_2 = (\infty, \infty)$$

INFATTI $\begin{cases} C_2 \in \Gamma_C \\ C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 \Rightarrow C_2 \in \Gamma_A \end{cases}$

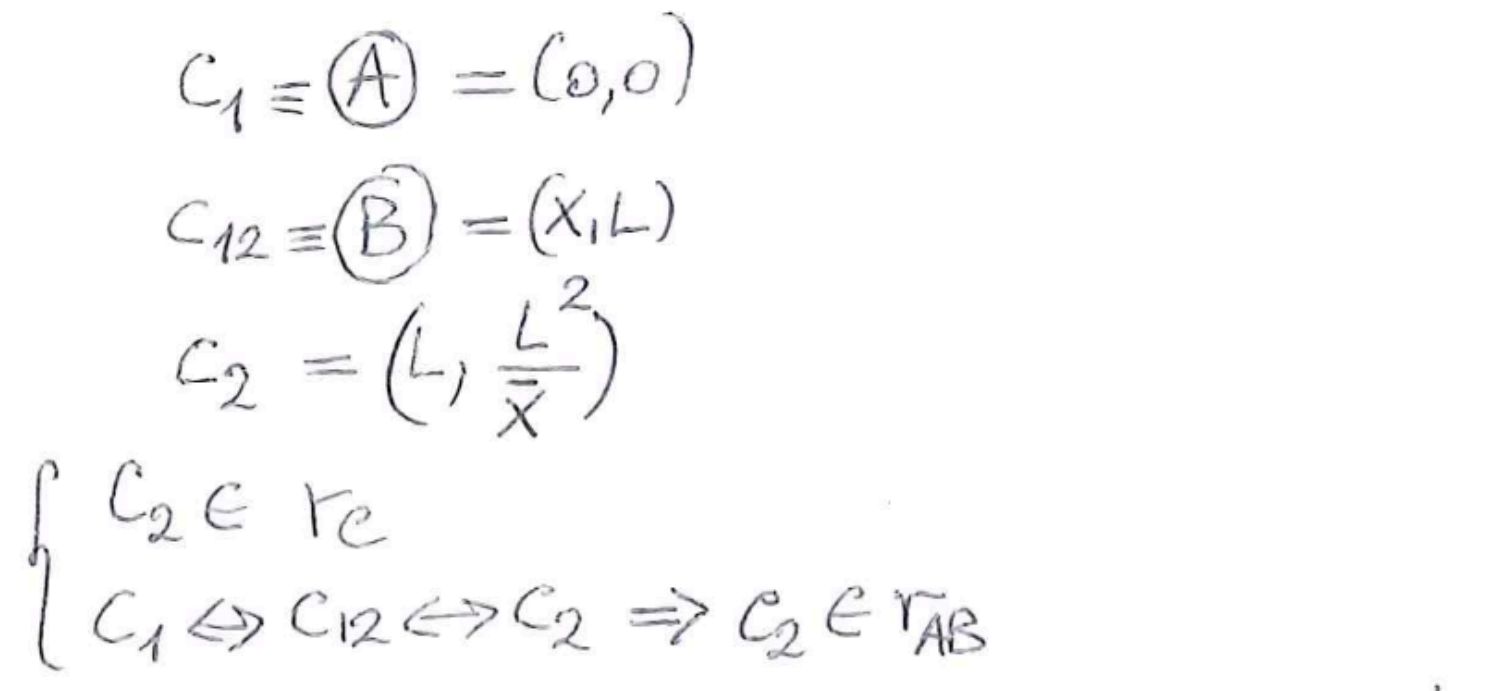
CALCOLO DI COMPONENTI DELL'AZIONE INTERNA IN UN PUNTO DI UNA STRUTTURA ISOSTATICA (NON LABILE) MEDIANTE IL P.L.V.



CALCOLO DI T_i

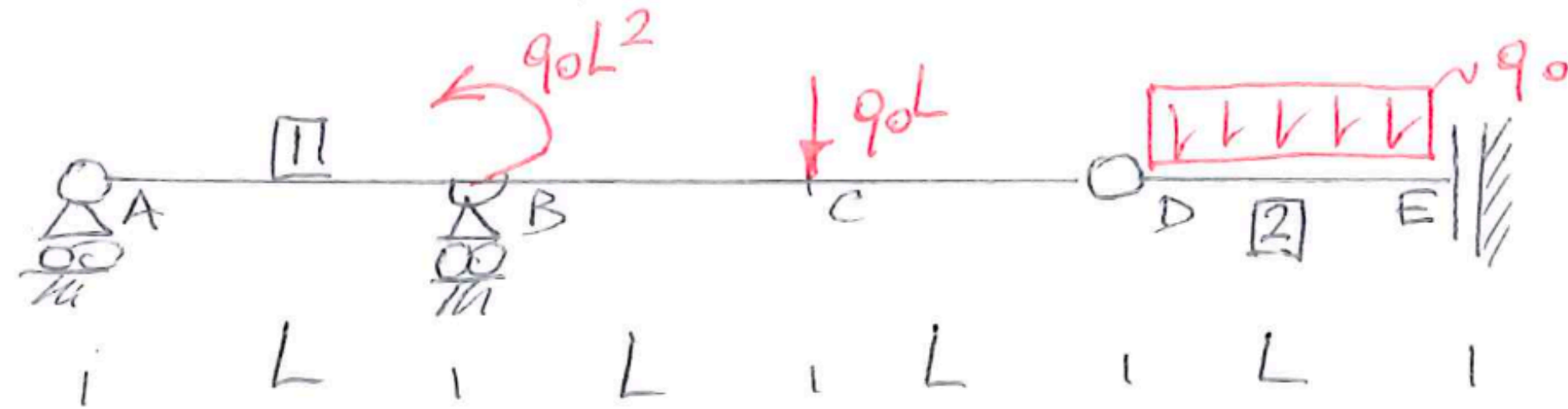


CALCOLO DI M_i



ELA PENDENZA DELLA RETTA r_{AB} E' INDIVIDUATA DAL COEFFICIENTE ANGOLARE $m = \frac{L}{x}$.

I) PER LA STRUTTURA ISOSTATICA QUI RAFFIGURATA, SI CALCOLINO LA REAZIONE VERTICALE IN (A), V_A , E IL MOMENTO FLETTENTE NEL PUNTO (C), M_C . 16



$$2 \times 3 = 6 \text{ GDL}$$

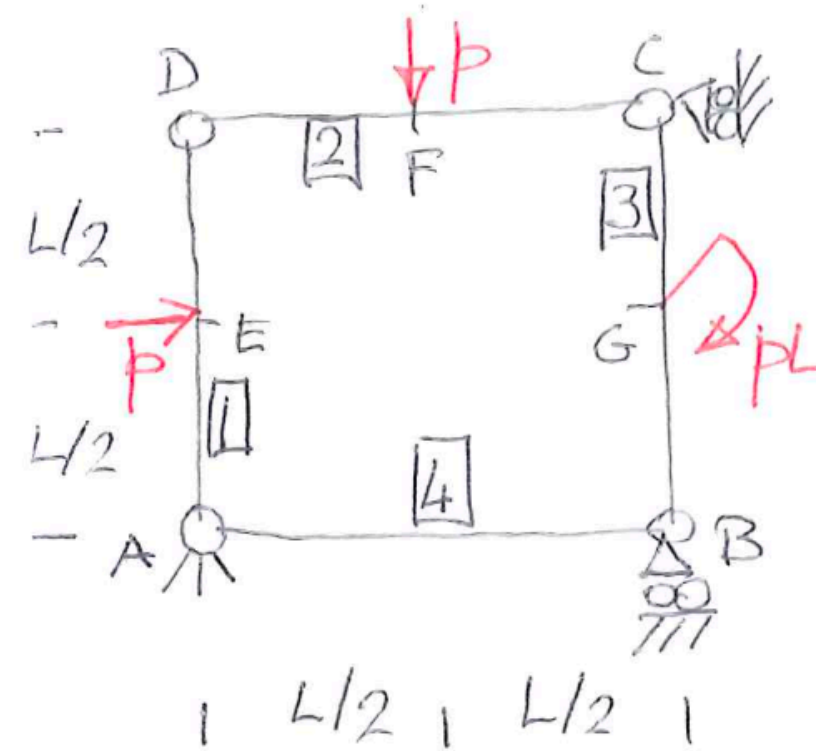
$$1(A) + 1(B) + 2(D) + 2(E) = 6 \text{ GDL}$$

⇒ STRUTTURA ISOSTATICA NON
LABILE.

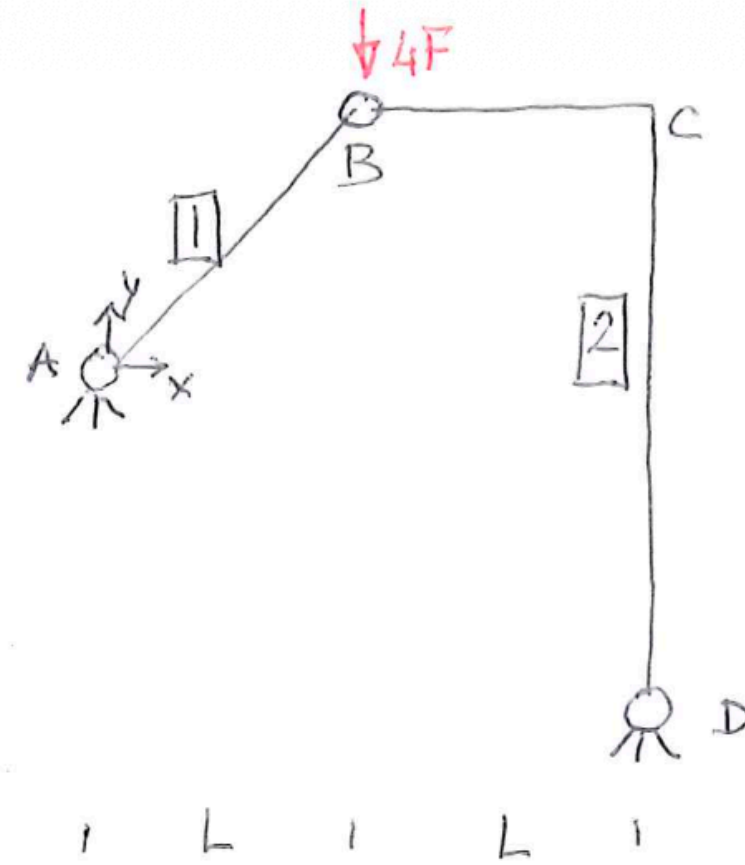
II) PER LA STRUTTURA ISOSTATICA AD ANELLO CHIUSO ^{NON RIGIDO} (IPOSTATICO) GIÀ
 CONSIDERATA NELLA LEZIONE 7, PAG. 11 SI USA IL PLV PER
 CALCOLARE DIRETTAMENTE LE REAZIONI VINCOLARI A TERRA (SENZA
 LA NECESSITÀ DI "ROMPERE" PRELIMINARMENTE L'ANELLO).

LA STRUTTURA È QUI RIPROPOSTA CON LA MEDESIMA CONDIZIONE DI CARICO.

18



PER LA STRUTTURA ISOSTATICA RIPORTATA IN FIGURA SI VOGLIONO CALCOLARE CON IL PLV LA REAZIONE ORIZZONTALE H_D E IL MOMENTO FLETTENTE IN (C), M_c . 21



- SI VERIFICA AGEVOLMENTE CHE :
 - L $GDL = 2 \times 3 = 6$
 - $GDV = 2(A) + 2(B) + 2(D)$ } ISOSTATICA
- LE 3 CERNIERE (A), (B), (C) NON SONO ALLINEATE
- L PER CUI LA STRUTTURA È NON LABILE.
- PER CALCOLARE H_D IL VINCOLO IN (D) DEVE ESSERE DEGRADATO IN MODO DA EVIDENZIARE

> Indicazioni bibliografiche

A | Per i **contenuti del corso**:



- A-1. M. Capurso, *Lezioni di scienza delle costruzioni*, Pitagora: Bologna, 1971. (Argomenti 1,4-10)
- A-2. D. Bigoni, et al. , *Geometria delle masse*, Progetto Leonardo: Bologna, 1995. (Argomento 3)
- A-3. E. Guagenti et al., *Statica – Fondamenti di meccanica strutturale*, McGraw-Hill: Milano, 2005. (Argomenti 0-2)

> **altre Informazioni**

Appunti per alcuni approfondimenti, esercizi di autovalutazione e l'intera collezione dei temi d'esame risolti sono resi disponibili (in formato PDF) sul sito web dei docenti:

> [Pagina docente prof. Reccia](#)

> [Pagina docente prof. Cazzani](#)