Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

***Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura* - a.a. 2025/26**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
UNICA

Statica e Scienza delle Costruzioni

PRIMA PARTE: STATICA

> ***Lezioni 15-16-17***
> *Cinematica*

Emanuele Reccia
emanuele.reccia@unica.it
Antonio cazzani
antonio.cazzani@unica.it

CINEMATICA DI SISTEMI RIGIDI PIANI.

IN ANALOGIA CON LO STUDIO DELLA STATICA DI SISTEMI RIGIDI PIANI, FIN QUI CONDOTTO, HA SENSO SOFFERMARSI SULL'ASPETTO DUALE DELLA LORO CINEMATICA, CHE CONSISTE NELL'AFFRONTARE L'ANALISI DEI POSSIBILI MOTI, PRESCINDENDO DALLE CAUSE CHE LI PRODUCONO.

CI SI LIMITA, PER SEMPLICITÀ, AD ANALIZZARE LA CINEMATICA DI SISTEMI RIGIDI NEL PIANO, IN PERFETTA ANALOGIA CON QUANTO SI È FATTO IN AMBITO STATICO: LO SI FA A PARTIRE DALLO STUDIO DEL SINGOLO CORPO RIGIDO.

SI INIZIA CON L'ANALIZZARE IL CAMPO DI SPOSTAMENTO DI UN CORPO RIGIDO LIBERO

IN SOSTANZA SI PUÒ DIMOSTRARE CHE GLI UNICI MOTI COMPATIBILI CON IL VINCOLO DI RIGIDITÀ SONO

- TRASLAZIONI
- ROTAZIONI.

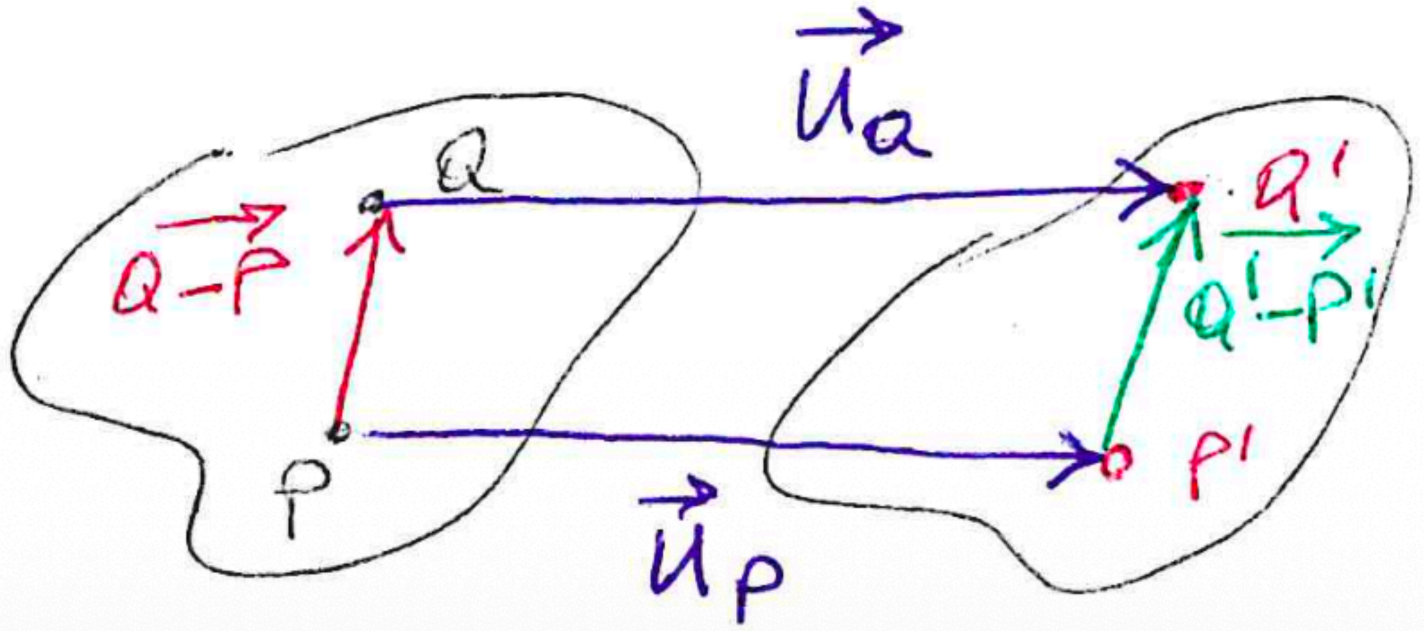
PIÙ SPECIFICAMENTE SI PUÒ AFFERMARE CHE TRASLAZIONI E ROTAZIONI SONO MOTI RIGIDI, CIOÈ NON ALTERANO LE DISTANZE FRA 2 PUNTI COMUNQUE SCELTI.

COMBINANDO OPPORTUNAMENTE TRASLAZIONI E ROTAZIONI SI OTTENGONO ANCORA MOTI RIGIDI, SICCHÉ È LECITO AFFERMARE CHE IL PIÙ GENERALE MOTO CONSENTITO A UN CORPO RIGIDO È UNA ROTO-TRASLAZIONE

1. TRASLAZIONE

UN MOTO È DEFINITO UNA TRASLAZIONE SE RISULTA, IN TERMINI DI SPOSTAMENTI $\vec{u}$, CHE DETTO $\vec{u}_P$ LO SPOSTAMENTO DI UN PUNTO P, RISULTA CHE

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P \quad \forall \text{ PUNTO } Q. \quad [1]$$



SI PUÒ VEDERE CHE INIZIALMENTE LA DISTANZA FRA P E Q È DATA DA

$d = \overline{PQ} = |\overrightarrow{Q-P}|$; A SPOSTAMENTO AVVENUTO SI HA $d' = \overline{P'Q'} = |\overrightarrow{Q'-P'}|$

ANALIZZANDO LA FIGURA, SI VEDE CHE

$$(\overrightarrow{Q'-P'}) = -\vec{u}_P + (\overrightarrow{Q-P}) + \vec{u}_Q$$

MA $\vec{u}_Q - \vec{u}_P = \vec{0}$ E PERTANTO

$$(\overrightarrow{Q'-P'}) = (\overrightarrow{Q-P}) \implies |\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}|$$

SI NOTI CHE LA IMPLICAZIONE VALE SOLO NEL VERSO INDICATO: $|\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}| \not\Rightarrow (\overrightarrow{Q'-P'}) = (\overrightarrow{Q-P})$!

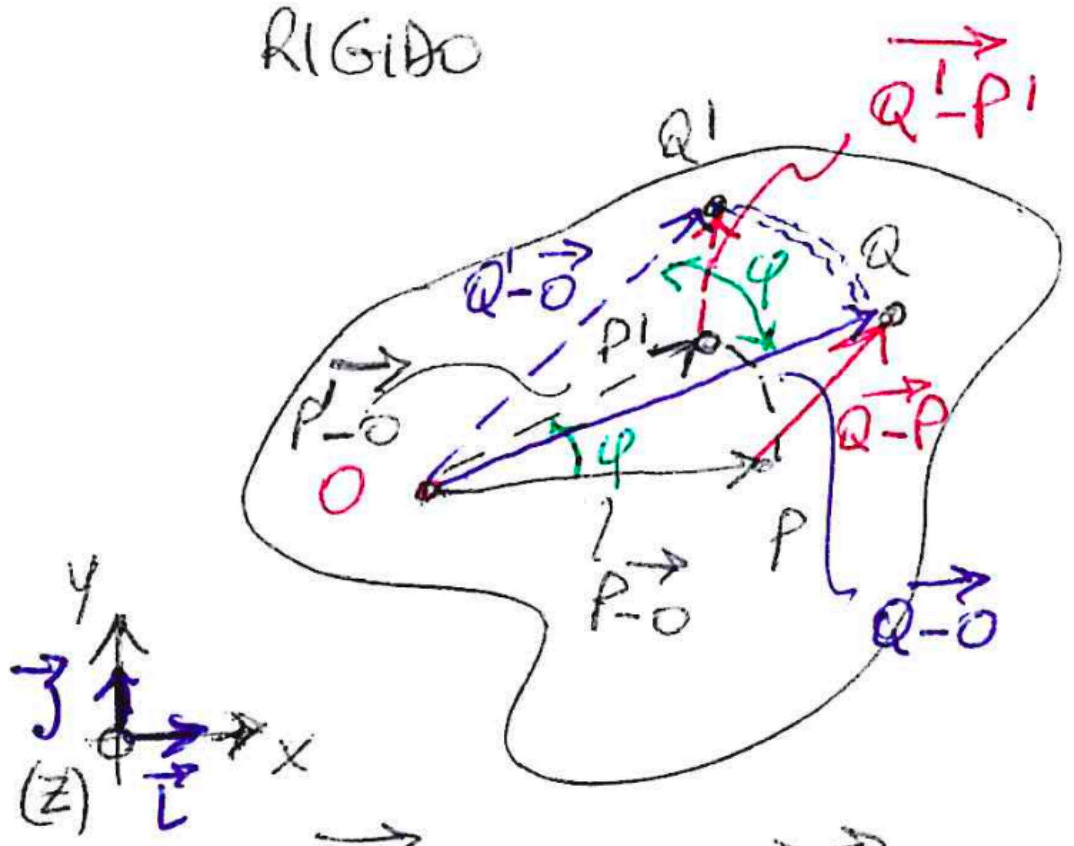
CIOÈ NON SOLO $|\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}|$, MA I DUE VETTORI HANNO ANCHE LA STESSA DIREZIONE E LO STESSO VERSO.

PERTANTO UNA TRASLAZIONE, DEFINITA DALLA [1], SODDISFA IL VINCOLO DI RIGIDITÀ!

2. ROTAZIONE

IN UNA ROTAZIONE TUTTI I PUNTI DEL CORPO RIGIDO RUOTANO ATTORNO A UN ASSE, PERPENDICOLARE AL PIANO, L'ASSE DI ROTAZIONE, CHE INTERSECA IL PIANO STESSO IN UN PUNTO O, IL CENTRO DI ROTAZIONE.(*)
QUESTO PUNTO NON SUBISCE ALCUNO SPOSTAMENTO; OGNI ALTRO PUNTO P DESCRIVE UN ARCO DI CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO $R = |\vec{P-O}|$, DI APERTURA ANGOLARE φ.

SI HA QUINDI, PRESI DUE PUNTI P E Q QUALSIASI ALL'INTERNO DEL CORPO RIGIDO



SI VUOLE VERIFICARE SE $d = |\vec{Q-P}|$ È EGUALE A $d' = |\vec{Q'-P'}|$.

L'EFFETTO DELLA ROTAZIONE È QUELLO DI TRASFORMARE IL VETTORE $(\vec{P-O})$ NEL VETTORE $(\vec{P'-O})$, E IL VETTORE $(\vec{Q-O})$ NEL VETTORE $(\vec{Q'-O})$. MEDIANTE UN TENSORE DI ROTAZIONE, $\underline{\underline{R}}$

SI HA INFATTI

$$\left.\begin{aligned} (\vec{P'-O}) &= \underline{\underline{R}}\,(\vec{P-O}); \\ (\vec{Q'-O}) &= \underline{\underline{R}}\,(\vec{Q-O}). \end{aligned}\right\} \boxed{2}$$

IL TENSORE DI ROTAZIONE, CHE È RAPPRESENTATO DA UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE 2:

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

OPERA SU UN VETTORE TRASFORMANDOLO IN UN ALTRO VETTORE: PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME UNA TRASFORMAZIONE LINEARE NELLO SPAZIO DEI VETTORI.

(*) SI NOTI CHE IL CENTRO DI ROTAZIONE PUÒ ESSERE ESTERNO AL CORPO RIGIDO; QUESTO TUTTAVIA SI MUOVE DI MOTO SOLIDALE, COME SE FOSSE "ATTACCATO" MEDIANTE UNA BARRETTA AL CENTRO DI ROTAZIONE.

L'EFFETTO DI $\underline{R}$ PUÒ ESSERE EVIDENZIATO SE SI INTRODUCONO LE COMPONENTI DEI VETTORI: 3

$$(\overrightarrow{P-O}) = (x_P - x_O)\vec{i} + (y_P - y_O)\vec{j} \quad ; \quad (\overrightarrow{P'-O}) = (x_{P'} - x_O)\vec{i} + (y_{P'} - y_O)\vec{j}$$

$$(\overrightarrow{Q-O}) = (x_Q - x_O)\vec{i} + (y_Q - y_O)\vec{j} \quad ; \quad (\overrightarrow{Q'-O}) = (x_{Q'} - x_O)\vec{i} + (y_{Q'} - y_O)\vec{j}$$

DOVE $\vec{i}$ E $\vec{j}$ SONO I VERSORI DEGLI ASSI x E y.

SE POI SI FA USO DI UNA NOTAZIONE MATRICIALE IN CUI SI RAPPRESENTANO RIGA PER RIGA LE COMPONENTI DEI VETTORI:

$$(\overrightarrow{P-O}) = \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix} ; (\overrightarrow{P'-O}) = \begin{Bmatrix} x_{P'} - x_O \\ y_{P'} - y_O \end{Bmatrix} ; \quad (\overrightarrow{Q-O}) = \begin{Bmatrix} x_Q - x_O \\ y_Q - y_O \end{Bmatrix} ; \quad (\overrightarrow{Q'-O}) = \begin{Bmatrix} x_{Q'} - x_O \\ y_{Q'} - y_O \end{Bmatrix}$$

SI HA CHE LA PRIMA DELLE [2] DIVIENE:

$$(\overrightarrow{P'-O}) = \begin{Bmatrix} x_{P'} - x_O \\ y_{P'} - y_O \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix}}_{\underline{R}\,(\overrightarrow{P-O})} = \begin{Bmatrix} \cos\vartheta(x_P - x_O) - \sin\vartheta(y_P - y_O) \\ \sin\vartheta(x_P - x_O) + \cos\vartheta(y_P - y_O) \end{Bmatrix} \qquad [3]$$

DOVE $\underline{R}$ OPERA SU $(\overrightarrow{P-O})$ MEDIANTE UNA MOLTIPLICAZIONE (RIGHE PER COLONNE) FRA MATRICI.

LA [3] INDICA CHE LE COMPONENTI DEL VETTORE RUOTATO $(\overrightarrow{P'-O})$, CIOÈ DEL TRASFORMATO DI $(\overrightarrow{P-O})$ MEDIANTE $\underline{R}$, SONO:

$$\begin{aligned} x_{P'} - x_O &= \cos\vartheta(x_P - x_O) - \sin\vartheta(y_P - y_O) \\ y_{P'} - y_O &= \sin\vartheta(x_P - x_O) + \cos\vartheta(y_P - y_O) \end{aligned} \qquad [4]$$

SI È QUINDI CAPITO CHE COSA SUCCEDE AL VETTORE $(\vec{P-O})$; CON RAGIONAMENTO ANALOGO SI VEDE COME SI TRASFORMA IL VETTORE $(\vec{Q-O})$:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} x_{Q'}-x_O \\ y_{Q'}-y_O \end{Bmatrix}}_{(\vec{Q'-O})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_Q-x_O \\ y_Q-y_O \end{Bmatrix}}_{\underline{\underline{R}}\,(Q-O)} = \begin{Bmatrix} \cos\theta(x_Q-x_O)-\sin\theta(y_Q-y_O) \\ \sin\theta(x_Q-x_O)+\cos\theta(y_Q-y_O) \end{Bmatrix} \quad [5]$$

SICCHÉ:

$$\begin{aligned} x_{Q'}-x_O &= \cos\theta\,(x_Q-x_O)-\sin\theta\,(y_Q-y_O) \\ y_{P'}-y_O &= \sin\theta\,(x_Q-x_O)+\cos\theta\,(y_Q-y_O) \end{aligned} \quad [6]$$

OCCORRE ORA VEDERE CHE COSA SUCCEDE AL VETTORE $(\vec{Q-P})$, DI COMPONENTI $\begin{Bmatrix} x_Q-x_P \\ y_Q-y_P \end{Bmatrix}$.

PER UNA RELAZIONE ANALOGA ALLE [2] SI HA:

$$(\vec{Q'-P'}) = \underline{\underline{R}}\,(\vec{Q-P}) \quad , \text{ CON } (\vec{Q'-P'}) = \begin{Bmatrix} x_{Q'}-x_{P'} \\ y_{Q'}-y_{P'} \end{Bmatrix}$$

D'ALTRA PARTE È ANCHE $(\vec{Q'-P'}) = (\vec{Q'-O})-(\vec{P'-O})$ E SIMILMENTE

$$(\vec{Q-P}) = (\vec{Q-O})-(\vec{P-O})$$

PERTANTO $(\vec{Q'-P'}) = \underline{\underline{R}}\,[(\vec{Q-O})-(\vec{P-O})] = \underbrace{\underline{\underline{R}}\,(\vec{Q-O})}_{(\vec{Q'-O})} - \underbrace{\underline{\underline{R}}(\vec{P-O})}_{(\vec{P'-O})}$

IN QUANTO $\underline{\underline{R}}$ È OPERATORE LINEARE.

SE ALLORA SI COMBINANO LE [3] E [5], OVVERO LE [4] E [6] SI TROVA:

$$x'_Q - x'_P = \cos\vartheta(x_Q - x_P) - \sin\vartheta(y_Q - y_P)$$

$$y'_Q - y'_P = \sin\vartheta(x_Q - x_P) + \cos\vartheta(y_Q - y_P).$$

$(\overrightarrow{Q'-P'})$

PER VALUTARE d' SI CONSIDERA CHE $(\overrightarrow{Q'-P'}) \times (\overrightarrow{Q'-P'}) = |\overrightarrow{Q'-P'}|^2 = d'^2$

E SI TROVA:

$$d'^2 = \left[\cos\vartheta(x_Q - x_P) - \sin\vartheta(y_Q - y_P)\right]^2 + \left[\sin\vartheta(x_Q - x_P) + \cos\vartheta(y_Q - y_P)\right]^2$$

$$d'^2 = \left[\cos^2\vartheta(x_Q - x_P)^2 + \sin^2\vartheta(y_Q - y_P)^2 - \cancel{2\sin\vartheta\cos\vartheta(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}\right] +$$

$$+ \left[\sin^2\vartheta(x_Q - x_P)^2 + \cos^2\vartheta(y_Q - y_P)^2 + \cancel{2\sin\vartheta\cos\vartheta(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}\right]$$

$$d'^2 = \left[(\underbrace{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta}_{=1})(x_Q - x_P)^2 + (\underbrace{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta}_{=1})(y_Q - y_P)^2\right] = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$$

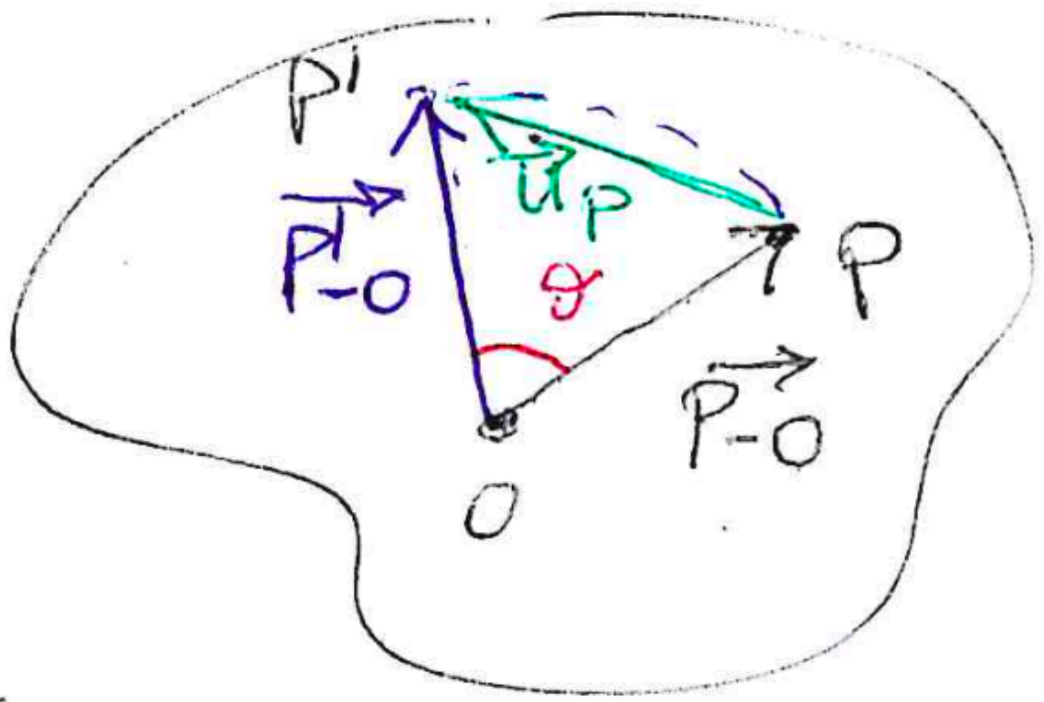
D'ALTRA PARTE $d^2 = |Q-P|^2 = (\overrightarrow{Q-P}) \times (\overrightarrow{Q-P}) = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$ E SI RICONOSCE CHE $d'^2 = d^2 \Rightarrow |\overrightarrow{Q'-P'}| = |\overrightarrow{Q-P}|$

IN QUESTO CASO, TUTTAVIA, $(\overrightarrow{Q'-P'}) \neq (\overrightarrow{Q-P})$ POICHÉ I DUE VETTORI HANNO DIREZIONE E VERSO DIFFERENTE.

SI OSSERVI CHE PER DIMOSTRARE L'INVARIANZA DELLA DISTANZA È STATO NECESSARIO CONSIDERARE 2 PUNTI ASSOLUTAMENTE GENERICI, PRIVI QUINDI DI CONNOTAZIONI PARTICOLARI, COME SAREBBE SE SI ASSUMESSE UNO DEI PUNTI COINCIDENTE CON IL CENTRO DI ROTAZIONE, O. CON QUESTO SI È MOSTRATO CHE UNA ROTAZIONE È UN MOTO CHE RISPETTA IL VINCOLO DI RIGIDITÀ.

SI OSSERVI ANCHE CHE, PER EFFETTO DELLA ROTAZIONE IL PUNTO P SUBISCE QUESTO SPOSTAMENTO, OVVIAMENTE DIRETTO COME LA CONGIUNGENTE P A P':

$$\vec{u}_P = (\overrightarrow{P'-O}) - (\overrightarrow{P-O}) = (\overrightarrow{P'-P})$$



D'ALTRA PARTE, PER LA PRIMA DELLE [2] È:

$$\vec{u}_P = \underline{\underline{R}}\,(\overrightarrow{P-O}) - (\overrightarrow{P-O}) \qquad [7]$$

E SE SI INTRODUCE IL TENSORE IDENTITÀ $\underline{\underline{I}}$, CHE TRASFORMA OGNI VETTORE IN SE STESSO:

$\underline{\underline{I}}\,(\overrightarrow{P-O}) = \overrightarrow{P-O}$, SI PUÒ ANCHE SCRIVERE LA [7] IN QUESTA FORMA:

$$\vec{u}_P = \underline{\underline{R}}\,(\overrightarrow{P-O}) - \underline{\underline{I}}\,(\overrightarrow{P-O}) \qquad [7']$$

IL TENSORE IDENTITÀ È ANCHE ESSO RAPPRESENTATO DA UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE 2 COSIFFATTA:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SI VERIFICA FACILMENTE, OPERANDO PER COMPONENTI CHE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{I}}\,(\overrightarrow{P-O}) = (\overrightarrow{P-O})$$

TENENDO CONTO CHE GLI OPERATORI $\underline{\underline{R}}$ E $\underline{\underline{I}}$ SONO APPLICATI AL MEDESIMO VETTORE, SI PUÒ TRASFORMARE LA [7'] COME SEGUE:

$$\vec{u}_P = [\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}]\,(\overrightarrow{P-O}) \qquad [8]$$

FACENDO COMPARIRE UN NUOVO TENSORE CHE È LA DIFFERENZA FRA $\underline{\underline{R}}$ E $\underline{\underline{I}}$.

LA FORMA MATRICIALE DI $[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}]$ È LA SEGUENTE:

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta - 1 & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - 1 \end{bmatrix}$$

SE SI SVILUPPA LA [8] PER COMPONENTI, INTRODUCENDO IL VETTORE $\vec{u}_P = u_{Px}\vec{i} + u_{Py}\vec{j}$ RAPPRESENTABILE IN FORMA MATRICIALE COME $\vec{u}_P = \begin{Bmatrix} u_{Px} \\ u_{Py} \end{Bmatrix}$ SI HA:

$$\begin{Bmatrix} u_{Px} \\ u_{Py} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta - 1 & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\cos\vartheta - 1)(x_P - x_O) - \sin\vartheta(y_P - y_O) \\ \sin\vartheta(x_P - x_O) + (\cos\vartheta - 1)(y_P - y_O) \end{Bmatrix} \quad [8']$$

E QUINDI SI HANNO QUESTE ESPRESSIONI ESPLICITE PER LE COMPONENTI DEL VETTORE SPOSTAMENTO RELATIVO AL PUNTO P, $\vec{u}_P$:

$$\begin{aligned} u_{Px} &= (\cos\vartheta - 1)(x_P - x_O) - \sin\vartheta(y_P - y_O) \\ u_{Py} &= \sin\vartheta(x_P - x_O) + (\cos\vartheta - 1)(y_P - y_O) \end{aligned} \quad [8''].$$

SI È VISTO CHE TRASLAZIONI E ROTAZIONI NON VIOLANO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ E SONO QUALIFICABILI COME "MOTI RIGIDI". SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE, MA NON LO SI FA IN QUESTA SEDE, CHE SONO GLI UNICI MOTI CHE SODDISFANO QUESTO REQUISITO.

SI PUÒ QUINDI PENSARE CHE IL PIÙ GENERALE MOTO RIGIDO SIA COSTITUITO DALLA COMBINAZIONE TRASLAZIONE + ROTAZIONE, CIOÈ UNA ROTO-TRASLAZIONE.

IN PARTICOLARE, SI PUÒ SCEGLIERE IL PUNTO P COINCIDENTE CON IL CENTRO DI ROTAZIONE; IN QUESTO CASO LO SPOSTAMENTO DEL GENERICO PUNTO Q SI ESPRIME IN QUESTO MODO:

6

$$\vec{u}_Q = \underbrace{\boxed{\vec{u}_P}}_{\text{TRASLAZIONE}} + \underbrace{\boxed{[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}](\overrightarrow{Q-P})}}_{\text{ROTAZIONE}} \qquad [9]$$

CIOÈ, IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{Bmatrix} u_{Qx} \\ u_{Qy} \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{Bmatrix} u_{Px} \\ u_{Py} \end{Bmatrix}} + \boxed{\begin{bmatrix} \cos\vartheta - 1 & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{Bmatrix}} \qquad [9']$$

E PER COMPONENTI:

$$\begin{aligned} u_{Qx} &= \boxed{u_{Px}} + \boxed{(\cos\vartheta - 1)(x_Q - x_P) - \sin\vartheta\,(y_Q - y_P)} \\ u_{Qy} &= \boxed{u_{Py}} + \boxed{\sin\vartheta\,(x_Q - x_P) + (\cos\vartheta - 1)(y_Q - y_P)} \end{aligned} \qquad [9'']$$

NEL SEGUITO SI È INTERESSATI AD APPROFONDIRE LA CINEMATICA DI SISTEMI RIGIDI CHE SI SPOSTANO "POCO", CIOÈ, PER ESSERE PIÙ PRECISI, SOGGETTI A MOTI DI AMPIEZZA INFINITESIMA.

SI INTRODUCONO QUINDI QUESTE 2 IPOTESI:

I) $\vartheta \ll 1$ (rad)

ALLORA IN BASE A QUANTO GIÀ VISTO, SE SI SVILUPPANO IN SERIE DI POTENZE LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE:

$$\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \dots$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \frac{\vartheta^6}{6!} + \dots$$

E SI CONSIDERA SOLO IL PRIMO TERMINE DI OGNI SVILUPPO, SI HA: $\sin\vartheta \simeq \vartheta$, $\cos\vartheta \simeq 1$ [10]

(*) È FACILE VEDERE CHE QUESTO CAPITA SE $\vartheta = 0$ (0, IN GENERALE $\vartheta = k \cdot 2\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$) CIOÈ SE L'ANGOLO DI ROTAZIONE SI ANNULLA

II) $|\vec{u}_P| \ll L$, CON L DIMENSIONE CARATTERISTICA DEL CORPO (PER ESEMPIO: RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO AL CORPO STESSO)

CON QUESTE IPOTESI, LA FORMA MATRICIALE DI $[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}]$ INDICATA NELLE [9'] DIVIENE:

$$[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}] = \begin{bmatrix} 1-1 & -\vartheta \\ \vartheta & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

CIOÈ $[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}]$ ASSUME LA FORMA DI UNA MATRICE ANTISIMMETRICA (DIAGONALE PRINCIPALE NULLA ED ELEMENTI EXTRA DIAGONALI EGUALI IN VALORE ASSOLUTO E DI SEGNO OPPOSTO).

IN TERMINI DI COMPONENTI, LA [9''] DIVIENE:

$$\begin{aligned} u_{Qx} &= \boxed{u_{Px}} \ \boxed{-\vartheta\,(y_Q - y_P)} \\ u_{Qy} &= \boxed{u_{Py}} \ \boxed{+\vartheta\,(x_Q - x_P)} \end{aligned} \qquad [11]$$

TRASLAZIONE INFINITESIMA   ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA

UN ESAME DELLA EQ. [11] RIVELA CHE UNA ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA PUÒ ESSERE ESPRESSA MEDIANTE UN PRODOTTO VETTORIALE, PUR DI INTRODURRE UN VETTORE DI ROTAZIONE INFINITESIMA COSIFFATTO:

$$\vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$$

VERSORE DELL'ASSE Z.

ANGOLO DI ROTAZIONE (CON SEGNO)

NOTA: ESATTAMENTE IN QUESTO ORDINE!

INFATTI SE SI SVILUPPA IL PRODOTTO VETTORIALE $\vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})$ SI HA:

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \vartheta \\ x_Q-x_P & y_Q-y_P & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta \\ y_Q-y_P & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta \\ x_Q-x_P & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_Q-x_P & y_Q-y_P \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \underbrace{\left[-\vartheta(y_Q-y_P)\right]}_{\text{COMPONENTE X DI } \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})} + \vec{j} \underbrace{\left[\vartheta(x_Q-x_P)\right]}_{\text{COMPONENTE Y DI } \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P})} + \vec{k} \cdot 0 \qquad [*]$$

PARTE DI ROTAZIONE CHE INFLUENZA u_{Qx}

PARTE DI ROTAZIONE CHE INFLUENZA u_{Qy}

PERTANTO NEL CASO DI ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA LA [9] È SOSTITUITA DA:

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{Q-P}) \qquad [12]$$

DALLA [12] SEGUE CHE:

- SE $\vartheta = 0$ (CIOÈ $\vec{\omega} = \vec{0}$) SI HA SOLO UNA TRASLAZIONE:

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P \text{ , OVVERO}$$

$$u_{Qx} = u_{Px} \quad \text{E} \quad u_{Qy} = u_{Py}$$

- SE $\vec{u}_P = \vec{0}$ SI HA SOLO ROTAZIONE ATTORNO A P:

$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}) \text{ , OVVERO}$$

$$u_{Qx} = -\vartheta\,(y_Q - y_P)$$

$$u_{Qy} = +\vartheta\,(x_Q - x_P) \, .$$

L'EQUAZIONE APPENA OTTENUTA, [12], VALE $\forall$ COPPIA DI PUNTI P, Q DEL CORPO RIGIDO IN ESAME; IN PARTICOLARE IL VETTORE ROTAZIONE INFINITESIMA $\vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$ CHE VI COMPARE NON DIPENDE DAI PUNTI P, Q SCELTI, MA È UNA PROPRIETÀ DELLA ROTOTRASLAZIONE.

VALE INFATTI IL SEGUENTE TEOREMA: ASSEGNATA UNA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA, IL VETTORE ROTAZIONE INFINITESIMA $\vec{\omega}$ NON DIPENDE DALLA COPPIA DI PUNTI P, Q.

QUINDI

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}) \qquad \forall P, Q. \qquad \vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$$

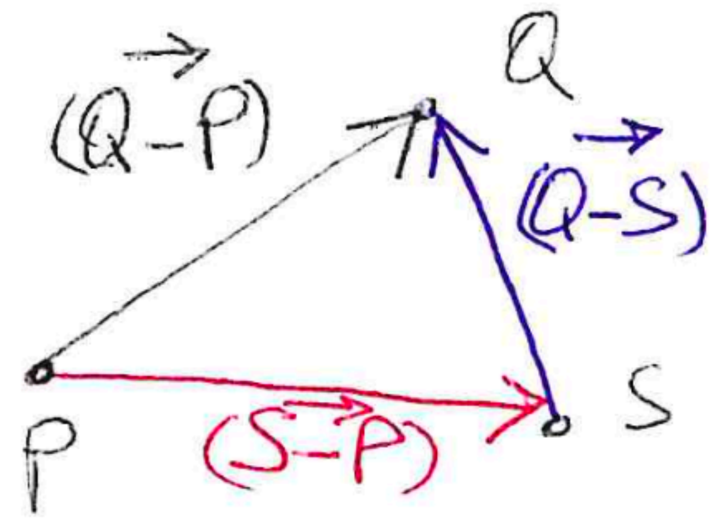
DIMOSTRAZIONE:

SI ASSUMA CHE PER LA COPPIA P, Q SI ABBIA

(a) $\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P})$

E PER LA COPPIA S, Q SI ABBIA

(b) $\vec{u}_Q = \vec{u}_S + \vec{\omega}' \wedge (\overrightarrow{Q-S})$.



D'ALTRA PARTE RISULTA $(\overrightarrow{Q-P}) = (\overrightarrow{S-P}) + (\overrightarrow{Q-S})$ E DALLA (a) SEGUE:

$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge [(\overrightarrow{S-P}) + (\overrightarrow{Q-S})]$

$\vec{u}_Q = \underbrace{[\vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{S-P})]}_{\vec{u}_S} + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-S})$

MA $\vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{S-P}) = \vec{u}_S$, PER CUI LA PRECEDENTE EQUAZIONE FORNISCE:

(c) $\vec{u}_Q = \vec{u}_S + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-S})$

MA (c) DEVE FORNIRE LO STESSO RISULTATO DELLA (b) E CIÒ IMPLICA CHE SIA $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$. $\square$

SI PUÒ ANCHE VERIFICARE QUESTA PROPRIETÀ: IN UNA ROTAZIONE INFINITESIMA SI HA CHE $\vec{u}_Q$ RISULTA SEMPRE PERPENDICOLARE A $(\overrightarrow{Q-P})$

OPERANDO PER COMPONENTI SI VEDE INFATTI DALLA [+] CHE

$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}) = -\vartheta(y_Q - y_P)\vec{i} + \vartheta(x_Q - x_P)\vec{j}$$

D'ALTRA PARTE $(\overrightarrow{Q-P}) = (x_Q - x_P)\vec{i} + (y_Q - y_P)\vec{j}$ PER CUI

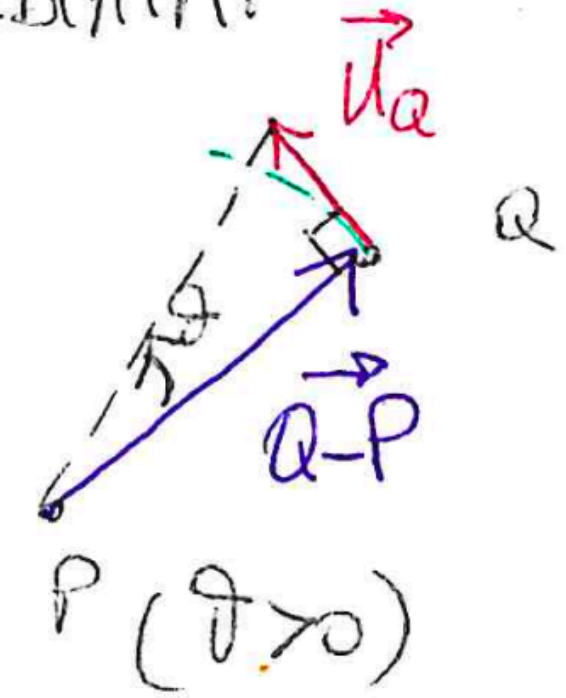
$$[\underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{a}} \wedge \underbrace{(\overrightarrow{Q-P})}_{\vec{b}}] \times \underbrace{(\overrightarrow{Q-P})}_{\vec{c}} = -\vartheta(y_Q - y_P)(x_Q - x_P) + \vartheta(x_Q - x_P)(y_Q - y_P) = 0$$

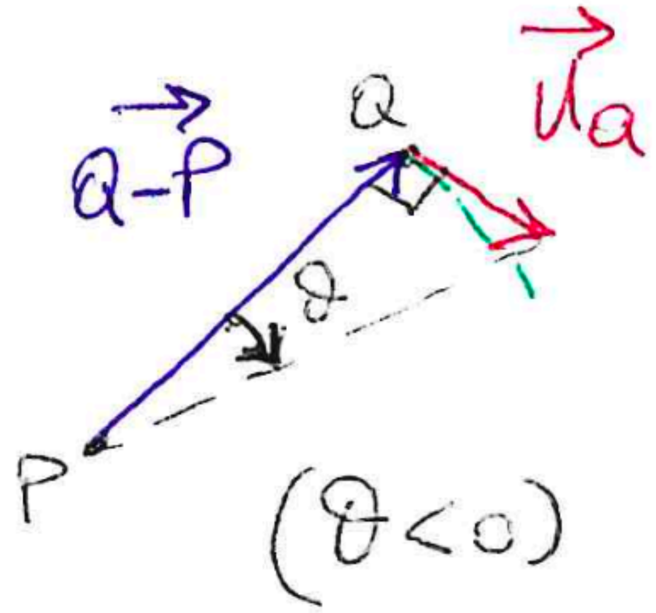
A QUESTO RISULTATO SI PUÒ PERVENIRE ANCHE SFRUTTANDO LA PROPRIETÀ CICLICA DEL PRODOTTO MISTO DI VETTORI: È NOTO INFATTI CHE DATI 3 VETTORI, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ RISULTA

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \wedge \vec{a} \times \vec{b}.$$

IN PARTICOLARE SE $\vec{b} = \vec{c}$ SI TROVA DALLA SECONDA FORMA $\vec{c} \wedge \vec{c} \times \vec{a} = 0$ POICHÉ IL PRODOTTO VETTORIALE DI UN VETTORE PER SE STESSO FORNISCE IL VETTORE NULLO. $(\vec{0})$

DAL PUNTO DI VISTA GRAFICO LA CONSEGUENZA DI QUESTA PROPRIETA' E' IMMEDIATA:





INOLTRE:

$$|\vec{u}_Q| = |\vec{\omega}|\cdot|\vec{Q-P}|\cdot\|\underbrace{\sin\varphi}_{=1}\|$$

DOVE φ È ANGOLO FRA $\vec{\omega}$ E $(\vec{Q-P})$ (CHE RISULTANO $\perp$).

NE SEGUE:

$$|\vec{u}_Q| = \|\vartheta\|\,|\vec{Q-P}|$$

DOVE $\|\cdot\|$ DENOTA IL VALORE ASSOLUTO

DI FATTO UNA ROTAZIONE ATTORNO A P DOVREBBE PRODURRE UN MOTO CIRCOLARE NEL QUALE IL PUNTO Q DESCRIVE UN ARCO DI CIRCONFERENZA, DI CENTRO P E RAGGIO $|\vec{Q-P}|$; SE SI LIMITA LA ROTAZIONE A ESSERE INFINITESIMA, SI TROVA CHE IL PUNTO Q SI MUOVE LUNGO LA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN Q, QUINDI IN DIREZIONE PERPENDICOLARE A $(\vec{Q-P})$.

[12]

UNA ULTERIORE PROPRIETÀ DELLA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA È LA SEGUENTE: LE COMPONENTI DELLO SPOSTAMENTO $\vec{u}_P$ E DELLO SPOSTAMENTO $\vec{u}_Q$ PROIETTATE NELLA DIREZIONE DEL VETTORE $(\overrightarrow{Q-P})$ SONO EGUALI (SE COSÌ NON FOSSE, RISULTEREBBE VIOLATO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ!)

SI CONSIDERI IL VERSORE $\vec{t}$ ASSOCIATO AL VETTORE $(\overrightarrow{Q-P})$:

$$\vec{t} = \frac{(\overrightarrow{Q-P})}{|\overrightarrow{Q-P}|}$$

E SI CONSIDERI IL PRODOTTO SCALARE DI $\vec{t}$ PER $\vec{u}_Q$

$$\vec{u}_Q \times \vec{t} = \left[\vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P})\right] \times \vec{t}$$

$$\vec{u}_Q \times \vec{t} = \vec{u}_P \times \vec{t} + \underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{a}} \wedge \underbrace{(\overrightarrow{Q-P})}_{\vec{b}} \times \underbrace{\vec{t}}_{\vec{c}}$$

E PER LA PROPRIETÀ CICLICA DEL PRODOTTO MISTO, L'ULTIMO TERMINE SVANISCE POICHÉ $\vec{t}$ È PARALLELO A $Q-P$ E DUNQUE $(\overrightarrow{Q-P}) \wedge \vec{t} = \vec{0}$

NE SEGUE

$$\vec{u}_Q \times \vec{t} = \vec{u}_P \times \vec{t}.$$

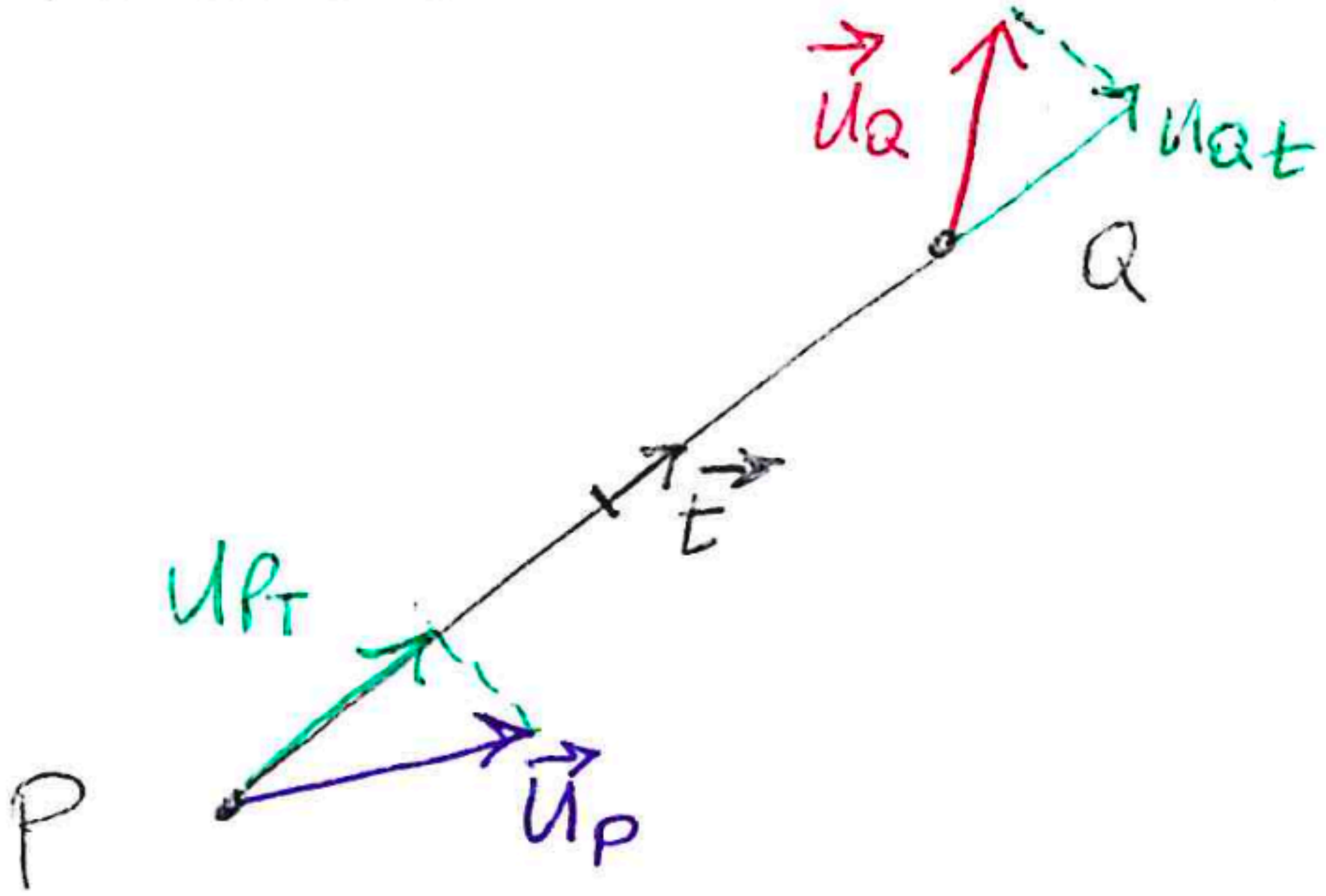
10

NE SEGUE

$$\vec{u}_Q \times \vec{t} = \vec{u}_P \times \vec{t}.$$

10

LA CARATTERIZZAZIONE GRAFICA DI QUESTA PROPRIETÀ È INDICATA IN FIGURA:



$$u_{Qt} = u_{Pt}$$

PERTANTO $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ POSSONO DIFFERIRE SOLO NELLE LORO COMPONENTI $\perp$ AL VETTORE $(\vec{Q-P})$.

SE GLI SPOSTAMENTI $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ NON RISPETTASSERO LA PROPRIETÀ ENUNCIATA, SI AVREBBE CHE I PUNTI P E Q SI AVVICINEREBBERO/ALLONTANEREBBERO SECONDO LA LORO CONGIUNGENTE, VIOLANDO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ!

CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (C.I.R.) DI UNA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA.

PER OGNI ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA:

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}) \quad [12]$$

ESISTE UN PUNTO C (PROPRIO O IMPROPRIO) CARATTERIZZATO DA SPOSTAMENTO NULLO, $\vec{u}_C = \vec{0}$.

C È DETTO C.I.R DELLA ROTO-TRASLAZIONE, ED È QUEL PUNTO RISPETTO AL QUALE LO STESSO MOTO È RAPPRESENTABILE/ATTUABILE ESCLUSIVAMENTE COME UNA ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R. STESSO:

$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-C}) \quad [13]$$

ANALOGA ALLA [12] QUANDO $\vec{u}_C = \vec{0}$

COME GIÀ DETTO, È ESSENZIALE COMPRENDERE CHE $\vec{\omega}$ È IL MEDESIMO IN ENTRAMBI I CASI ([12] O [13]): IL VETTORE ROTAZIONE INFINITESIMA È PROPRIETÀ CARATTERIZZANTE IL MOTO ROTO-TRASLATORIO E NON DIPENDE DAL MODO IN CUI QUESTO VIENE RAPPRESENTATO: SE NELLA [12] SI VARIA IL PUNTO P, MANTENENDO FISSATO IL PUNTO Q, CAMBIANO $\vec{u}_P$ E $(\overrightarrow{Q-P})$, MA NON $\vec{\omega}$.

PER DETERMINARE C SI SOSTITUISCE NELLA [12] A Q L'INCOGNITO PUNTO C PER IL QUALE DEVE RISULTARE $\vec{u}_C = \vec{0}$:

$$\vec{u}_C = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{C-P}) = \vec{0} \qquad [14]$$

DI QUI, NOTO $\vec{u}_P$, $\vec{\omega}$ E $P=(x_P, y_P)$ SI POSSONO RICAVARE LE COORDINATE x_C, y_C DEL PUNTO C.

SE INFATTI SI ESPRIME LA [14] PER COMPONENTI, IN MODO ANALOGO ALLE [11], SI OTTIENE:

11

$$u_{Cx} = 0 = u_{Px} - \vartheta (y_C - y_P) \qquad [14']$$
$$u_{Cy} = 0 = u_{Py} + \vartheta (x_C - x_P)$$

QUESTE COSTITUISCONO UN SISTEMA DI 2 EQUAZIONI LINEARI NELLE INCOGNITE x_C, y_C CHE INDIVIDUANO COMPLETAMENTE $C = (x_C, y_C)$.

LE [14'] COMPORTANO CHE SIA:

$$\begin{cases} u_{Px} = \vartheta (y_C - y_P) \\ u_{Py} = -\vartheta (x_C - x_P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{Px} = \vartheta y_C - \vartheta y_P \\ u_{Py} = -\vartheta x_C + \vartheta x_P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta y_C = u_{Px} + \vartheta y_P \\ \vartheta x_C = -u_{Py} + \vartheta x_P \end{cases}$$

DA QUI, IPOTIZZANDO CHE $\underline{\vartheta \neq 0}$ SI OTTIENE:

$$\begin{cases} y_C = y_P + u_{Px}/\vartheta \\ x_C = x_P - u_{Py}/\vartheta \end{cases} \qquad [15]$$

CIOÈ LE COORDINATE DEL PUNTO C: $C = (x_P - u_{Py}/\vartheta \, , \, y_P + u_{Px}/\vartheta)$.

DALLA [12] E DALLE [15] SI DEDUCE CHE QUANDO $\vec{u}_P = \vec{0}$ (ROTAZIONE INFINITESIMA) SI TROVA $y_C = y_P$; $x_C = x_P$ E DUNQUE $C \equiv P$.

SE INVECE SI HA $\vartheta = 0$, CIOÈ $\vec{\omega} = \vec{0}$ NELLA [12] SI È IN UN CASO DI PURA TRASLAZIONE E LE [15] CADONO IN DIFETTO POICHÉ PER $\vartheta \to 0$ SI HA CHE $x_C \to \infty$, $y_C \to \infty$. E DUNQUE C DIVIENE UN PUNTO IMPROPRIO, CHE PUÒ ESSERE UNIVOCAMENTE DETERMINATO MEDIANTE LA PENDENZA (COEFFICIENTE ANGOLARE) DI UNA RETTA DEL PIANO.

DALLE [15] RESTA INFATTI FISSATO IL RAPPORTO FRA y_C E x_C:

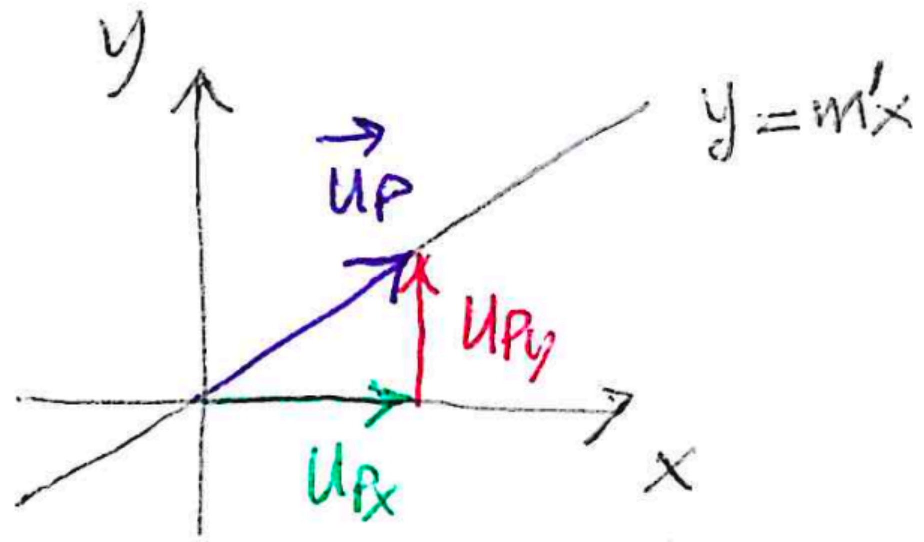
$$\frac{y_C}{x_C} = \frac{y_P + u_{Px}/\vartheta}{x_P - u_{Py}/\vartheta} = \frac{\frac{\vartheta y_P + u_{Px}}{\vartheta}}{\frac{\vartheta x_P - u_{Py}}{\vartheta}} . \qquad [16]$$

SE DALLA [16] SI CONSIDERA $\lim_{\vartheta \to 0}$ SI OTTIENE:

$$\lim_{\vartheta \to 0} \frac{\frac{\vartheta y_P + u_{Px}}{\cancel{\vartheta}}}{\frac{\vartheta x_P - u_{Py}}{\cancel{\vartheta}}} = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{\vartheta y_P + u_{Px}}{\vartheta x_P - u_{Py}} = -\frac{u_{Px}}{u_{Py}} \qquad [16']$$

SE ORA SI RAPPRESENTA IN GRAFICO UNA RETTA, SPICCATA DALL'ORIGINE ALLINEATA CON IL VETTORE $\vec{u}_P$, SI TROVA FACILMENTE CHE QUESTA SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA $y = m'x$, DOVE m È IL COEFFICIENTE ANGOLARE, PARI AL RAPPORTO FRA LE COMPONENTI DI $\vec{u}_P$:

12



$$m' = \frac{u_{Py}}{u_{Px}} \qquad [17]$$

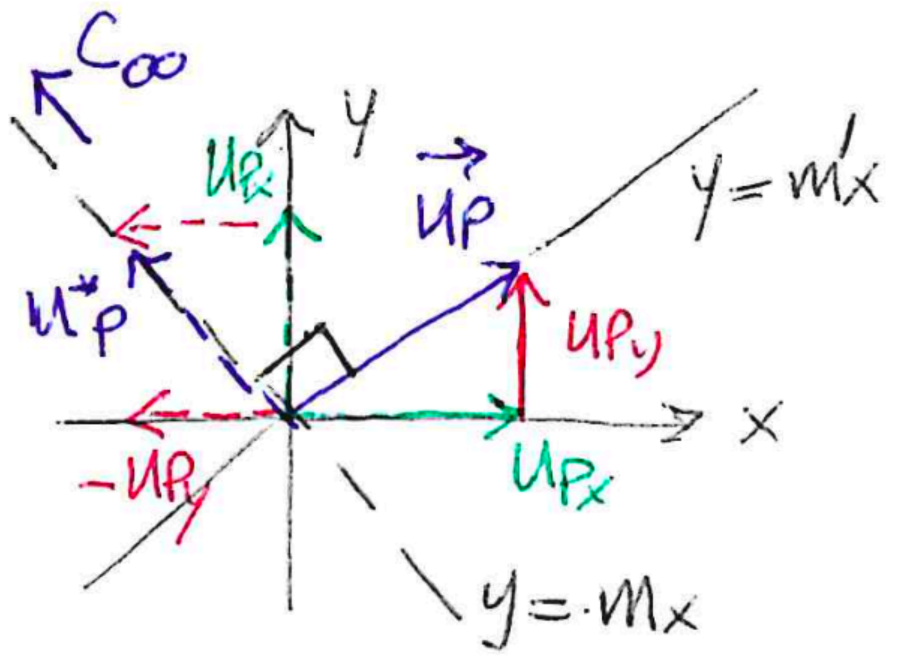
LA RETTA CHE AMMETTE COME COEFFICIENTE ANGOLARE m QUELLO DEFINITO DALLA [16']

$$m = -\frac{u_{Px}}{u_{Py}} = -\frac{1}{m'},$$

È NOTO DA CONSIDERAZIONI DI GEOMETRIA ANALITICA CHE QUANDO I COEFFICIENTI ANGOLARI DI 2 RETTE SODDISFANO LA CONDIZIONE

$$m\, m' = -1$$

ALLORA LE 2 RETTE SONO PERPENDICOLARI; ED È QUESTO IL CASO.



SE INFATTI SI RIPORTA LUNGO L'ASSE Y UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA u_{Px} E, NEL VERSO NEGATIVO DELL'ASSE X, UN SEGMENTO DI LUNGHEZZA u_{Py}, QUESTI IDENTIFICANO UN NUOVO VETTORE $\vec{u}_P^*$ COSÌ ESPRIMIBILE:

$$\vec{u}_P^* = (-u_{Py})\,\vec{i} + (u_{Px})\,\vec{j}$$

CHE RISULTA PERPENDICOLARE RISPETTO A $\vec{u}_P$:

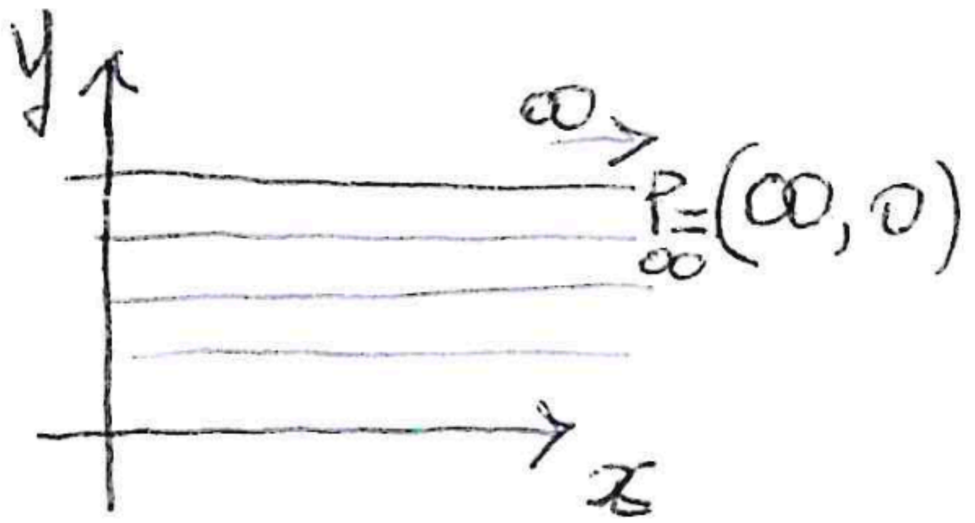
$$\vec{u}_P \times \vec{u}_P^* = (u_{Px})(-u_{Py}) + (u_{Py})(u_{Px}) = 0.$$

IL PUNTO <u>IMPROPRIO</u> (CIOÈ INFINITAMENTE LONTANO) IN DIREZIONE $\vec{u}_P^*$ È IL C.I.R., C_∞
SI CONVIENE DI DENOTARE LE COORDINATE DEI PUNTI IMPROPRI IN QUESTO MODO:
$C_\infty = (\infty, m)$, DOVE m È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI TUTTE LE RETTE PARALLELE ALLA DIREZIONE DATA.

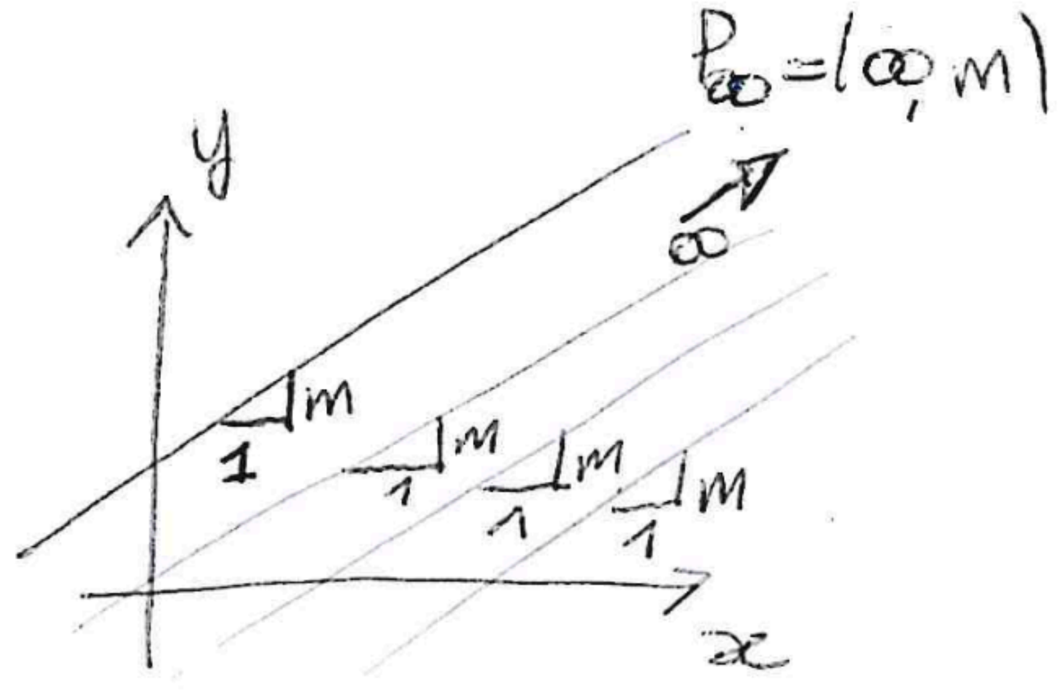
PERTANTO I PUNTI <u>IMPROPRI</u> RISULTANO INDIVIDUATI DALL'AVERE LA PRIMA COORDINATA PARI A ∞; LA SECONDA COORDINATA (CHE SAREBBE ANCORA PARI A ∞, PER QUANTO SOPRA VISTO) È INVECE <u>SOSTITUITA</u> DAL COEFFICIENTE ANGOLARE m COMUNE A UNA FAMIGLIA DI RETTE PARALLELE, AVENTI TUTTE LA STESSA DIREZIONE.

I PUNTI IMPROPRI POSSONO COSÌ INTERPRETARSI COME QUEI PUNTI IN CUI "CONVERGONO" LE RETTE PARALLELE AVENTI LO STESSO COEFFICIENTE ANGOLARE CHE, PER LA GEOMETRIA EUCLIDEA, <u>NON</u> AMMETTONO PUNTO DI INTERSEZIONE.

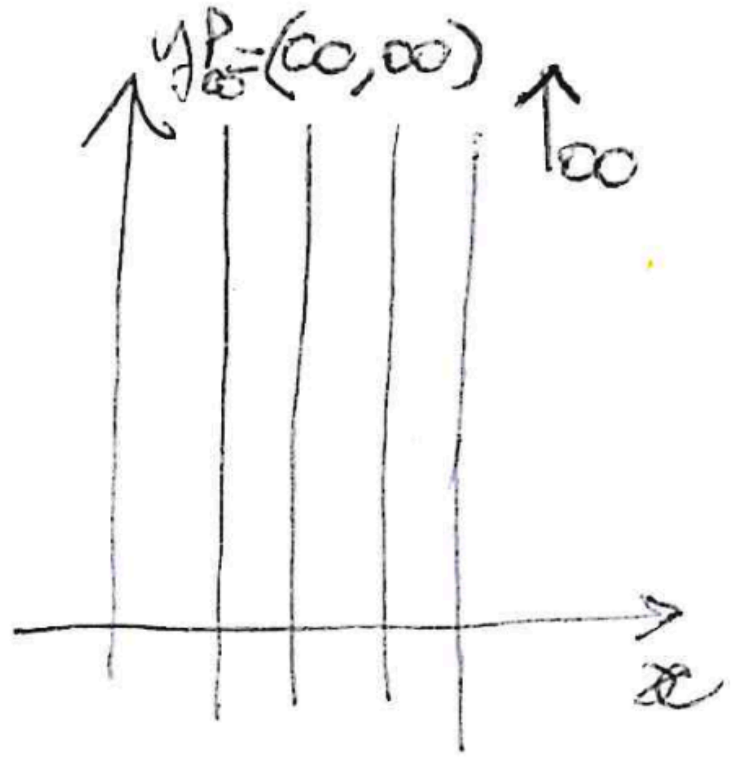
ESEMPI:



RETTE PARALLELE ORIZZONTALI



RETTE PARALLELE OBLIQUE (COEFFICIENTE ANGOLARE m)

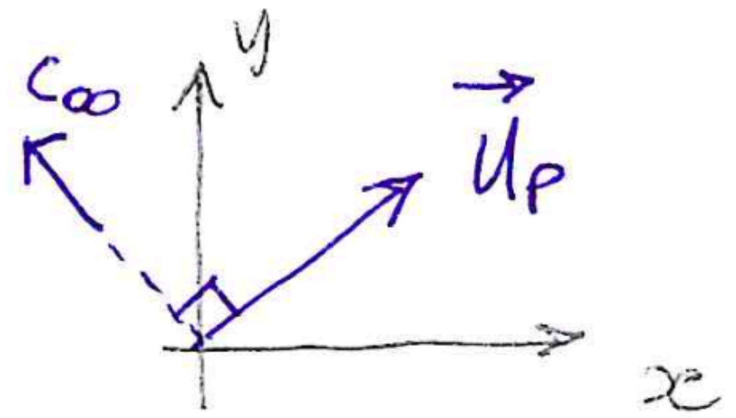


RETTE PARALLELE VERTICALI

SI NOTI CHE NELL'AMBITO DELLA CONVENZIONE ADOTTATA PER IDENTIFICARE I PUNTI IMPROPRI: $P_\infty = (\infty, m)$ LA NOTAZIONE $P = (0, \infty)$ NON HA ALCUN SIGNIFICATO, A DIFFERENZA DI $P = (\infty, 0)$ O DI $P = (\infty, \infty)$ CHE IDENTIFICANO RISPETTIVAMENTE IL PUNTO IMPROPRIO IN DIREZIONE ORIZZONTALE E QUELLO IN DIREZIONE VERTICALE. INFATTI, SE LA PRIMA COORDINATA HA VALORE FINITO, ALLORA NON SI PUÒ PARLARE DI UN PUNTO IMPROPRIO E QUINDI NON HA SENSO CHE LA SECONDA COORDINATA NON ABBIA VALORE FINITO □

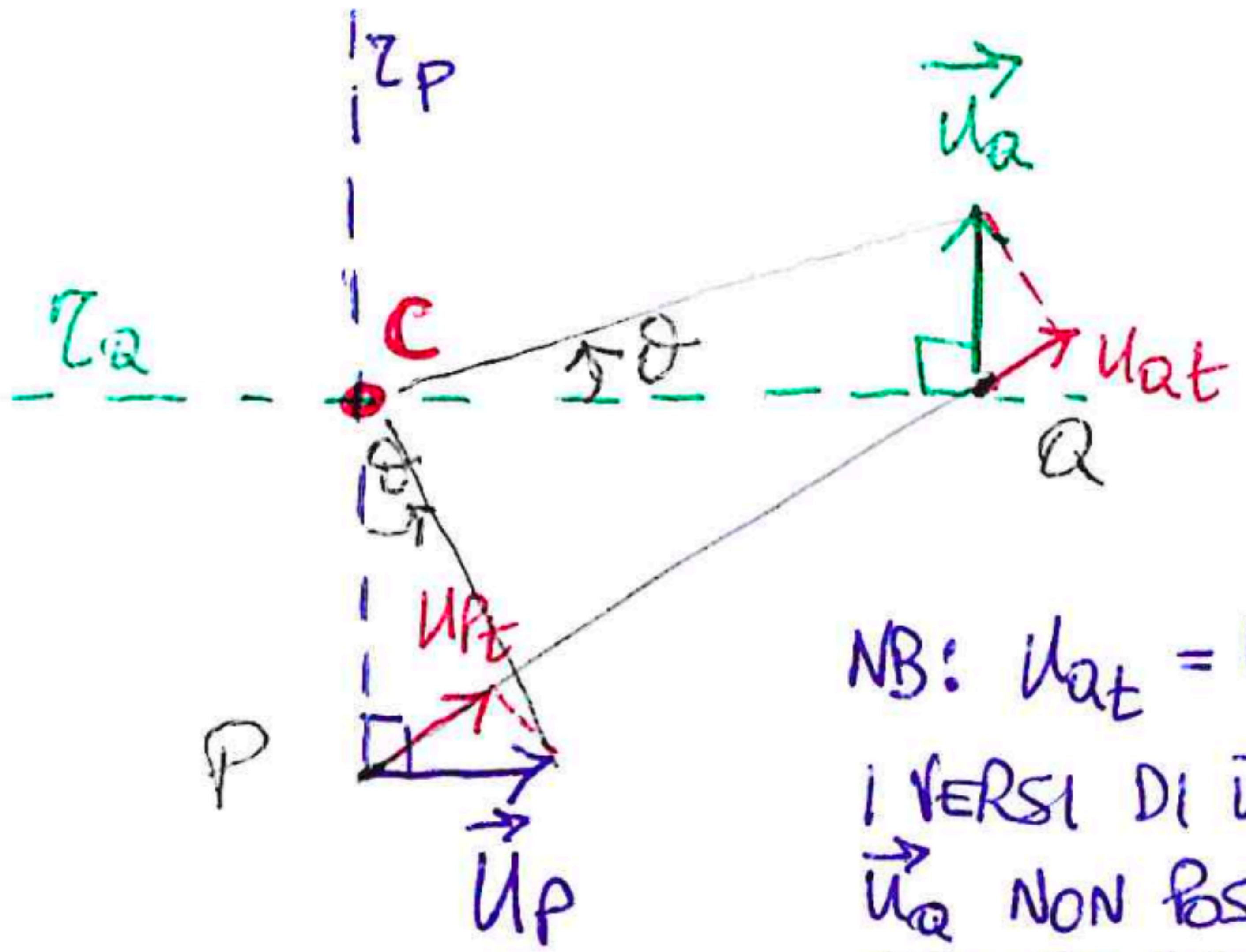
13

SI OSSERVI ANCHE CHE IL C.I.R. NEL CASO DI MOTO DI PURA TRASLAZIONE (CIOÈ CON $\vec{\omega} = \vec{0}$) SI TROVA IN DIREZIONE PERPENDICOLARE A QUELLA DELLO SPOSTAMENTO:



DETERMINAZIONE GRAFICA DEL C.I.R. NOTI GLI SPOSTAMENTI DI 2 PUNTI.

SE SONO NOTI GLI SPOSTAMENTI DI 2 PUNTI (ARBITRARI MA DISTINTI) SI PUÒ DETERMINARE PER VIA GRAFICA IL C.I.R. C :



NB: $u_{Qt} = u_{Pt}$:
I VERSI DI $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ NON POSSONO ESSERE ASSEGNATI A CASO.

INFATTI, NOTA LA ROTOTRASLAZIONE INFINITESIMA

$$\vec{u}_Q = \vec{u}_P + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-P}), \quad [12]$$

QUESTA, SE VIENE RAPPRESENTATA COME UNA ROTAZIONE INFINITESIMA RISPETTO AL C.I.R. C DEVE FORNIRE:

$$\vec{u}_P = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-C}) \quad [17]$$

$$\vec{u}_Q = \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-C}) \quad [18]$$

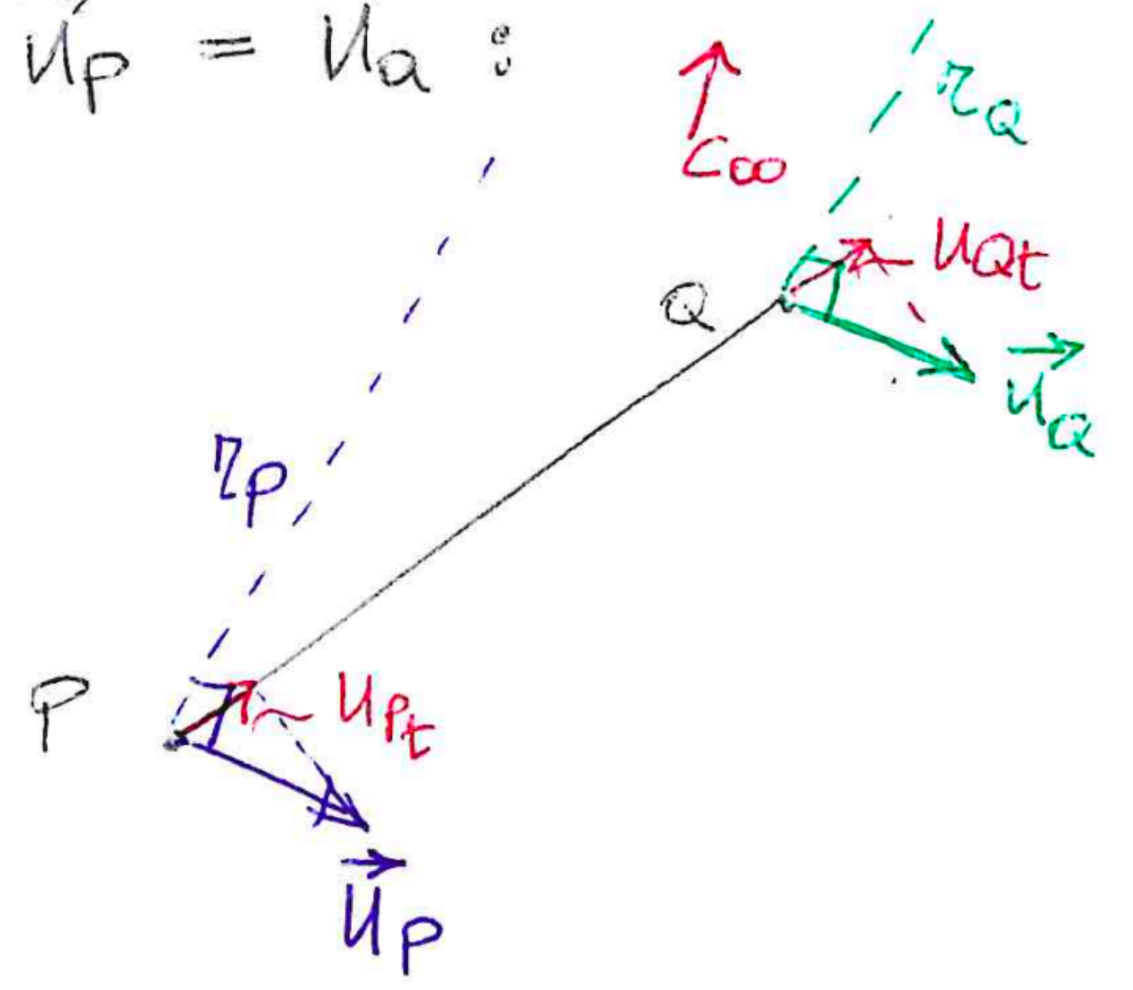
NOTA 1. SE È NOTO SOLO LO SPOSTAMENTO DI UN SOLO PUNTO, RISULTA INDIVIDUATA LA RETTA CUI APPARTIENE C, MA QUESTO NON PUÒ ESSERE LOCALIZZATO. □

NOTA 2. NOTA LA POSIZIONE DI C SI HA IMMEDIATAMENTE (SI VEDA LA NOTA ALLA FIGURA DI PAGINA 9) 14

$$|\vec{u}_Q| = \|\vartheta\| \, |\vec{Q-C}| = \overline{QC} \, \|\vartheta\|$$

$$|\vec{u}_P| = \|\vartheta\| \, |\vec{P-C}| = \overline{PC} \, \|\vartheta\| \qquad \square$$

NOTA 3 LA COSTRUZIONE GRAFICA VALE ANCHE NEL CASO PARTICOLARE CHE SIA $\vec{u}_P = \vec{u}_Q$:

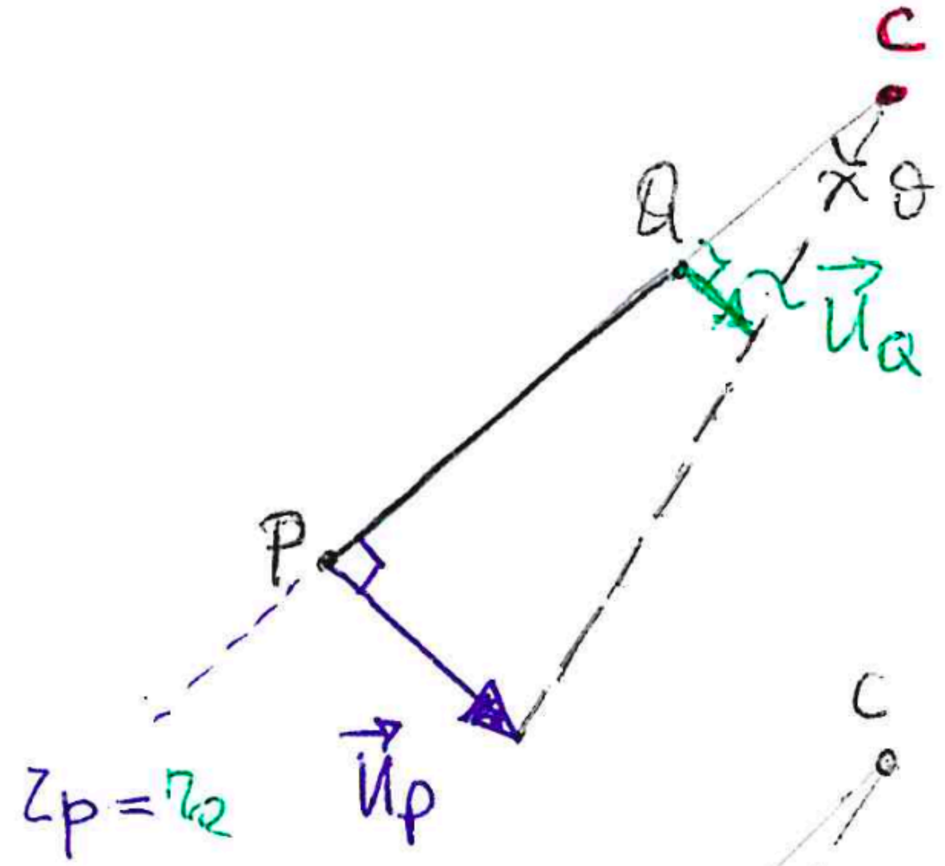


IN QUESTO CASO LE 2 RETTE r_P E r_Q, PASSANTI PER P E Q E RISPETTIVAMENTE ⊥ A $\vec{u}_P$ E A $\vec{u}_Q$ RISULTANO PARALLELE.

IN QUESTO CASO LA LORO INTERSEZIONE È IL PUNTO IMPROPRIO C_∞, DOVE CONVERGONO TUTTE LE RETTE PARALLELE AVENTI IL MEDESIMO COEFFICIENTE ANGOLARE DI r_P E r_Q.

□.

NOTA 4 LA SITUAZIONE SOPRA PRESENTATA PUÒ ESSERE CONSIDERATA IL CASO LIMITE DI QUELLO RIPORTATO IN FIGURA, CHE SI REALIZZA QUANDO $\vec{u}_P$ E $\vec{u}_Q$ SONO PARALLELI MA DISTINTI: $|\vec{u}_P| \neq |\vec{u}_Q|$:

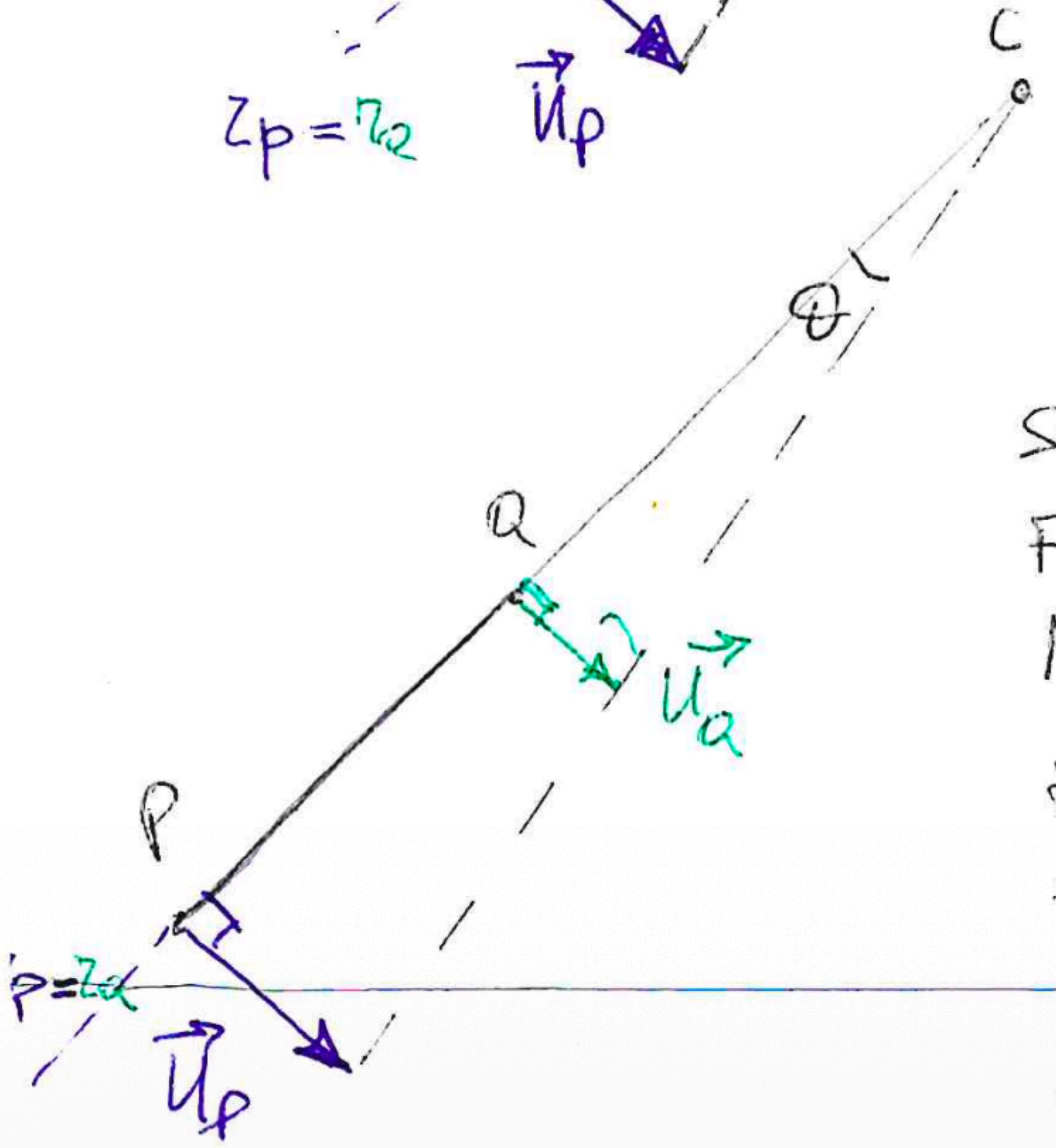


PER QUANTO SOPRA DETTO

$|\vec{u}_Q| = \overline{QC}\,\|\theta\|$ [+]

$|\vec{u}_P| = \overline{PC}\,\|\theta\|$ [++]

SE $|\vec{u}_Q| \to |\vec{u}_P|$ CON $Q \neq P$, L'UNICO MODO DI SODDISFARE LE [+] E [++] È CHE $\overline{QC} \to \infty$; $\overline{PC} \to \infty$ E $\|\theta\| \to 0$: SOLO IN QUESTO CASO SI PUÒ OTTENERE UN VALORE FINITO ED EGUALE PER $|\vec{u}_P|$ E $|\vec{u}_Q|$



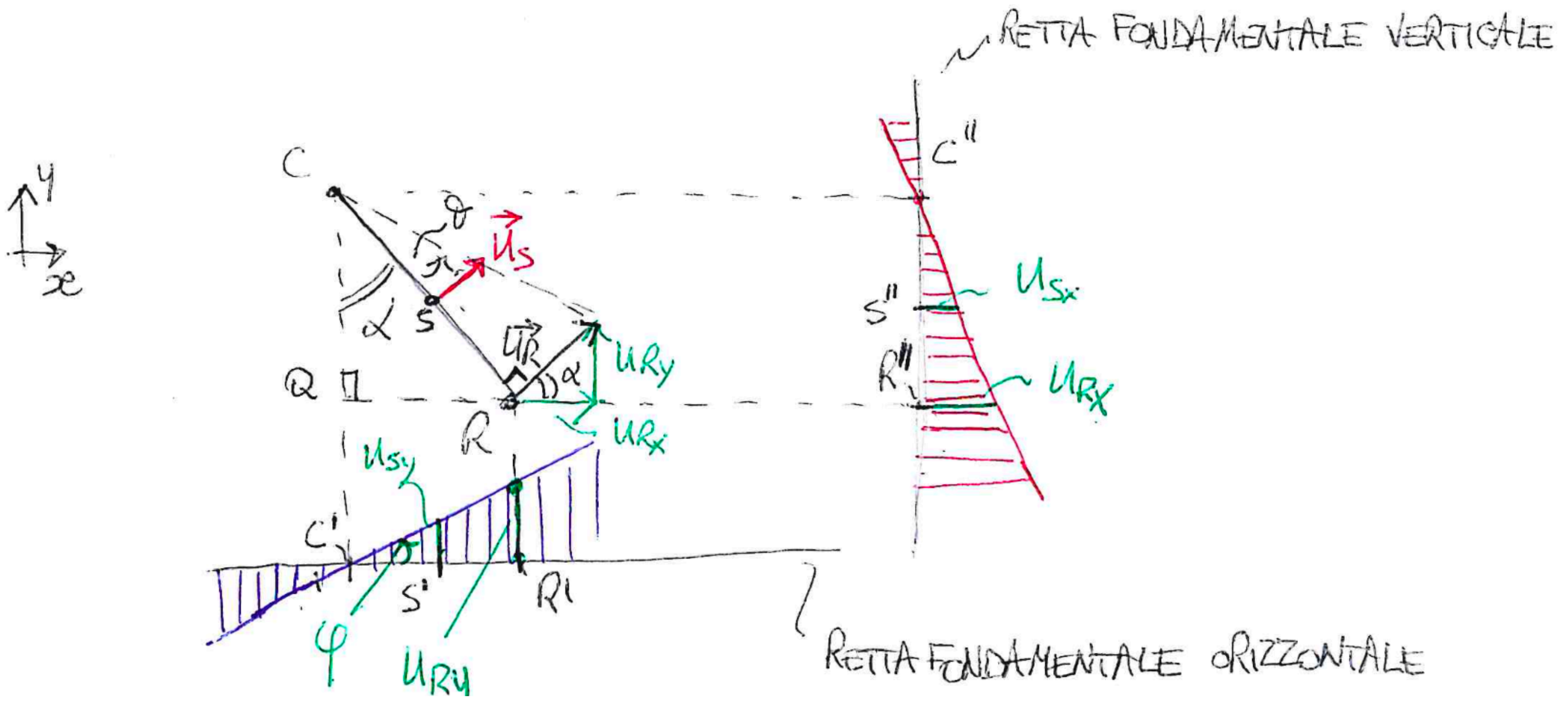
SI VEDE INFATTI CHE, MANTENENDO INVARIATA LA DISTANZA FRA I PUNTI P E Q E IL VALORE DI $\vec{u}_P$, MANO A MANO CHE $\vec{u}_Q$ SI AVVICINA AL VALORE DI $\vec{u}_P$ SI HA CHE IL PUNTO C, SEMPRE GIACENTE SULLE RETTE r_P E r_Q (IN QUESTO CASO COINCIDENTI) SI SPOSTA, ALLONTANANDOSI PROGRESSIVAMENTE DA P E Q. QUANDO $C = C_\infty$ SI HA $\vec{u}_Q = \vec{u}_P$

DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO.

GLI SPOSTAMENTI IN UNA ROTOTRASLAZIONE INFINITESIMA POSSONO ESSERE RAPPRESENTATI MEDIANTE LE COMPONENTI ORIZZONTALI E VERTICALI, UNA VOLTA CHE SIA NOTA LA POSIZIONE DEL C.I.R.; C L'UNICO PUNTO PER IL QUALE È NOTO CHE $\vec{u}_C = \vec{0}$ CIOÈ ANCHE $u_{Cx} = 0$ & $u_{Cy} = 0$.

UNA VOLTA CHE SIA DATA LA POSIZIONE DI C, LE COMPONENTI ORIZZONTALE (u_{Rx}) E VERTICALE (u_{Ry}) DI QUALSIASI PUNTO R POSSONO ESSERE DETERMINATE SEGUENDO QUESTA COSTRUZIONE.

SI TRACCIANO 2 RETTE FONDAMENTALI, UNA ORIZZONTALE (IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE SI RICAVANO LE COMPONENTI VERTICALI DELLO SPOSTAMENTO, u_y) E UNA VERTICALE (SULLA QUALE SI LEGGONO LE COMPONENTI ORIZZONTALI DELLO SPOSTAMENTO, u_x).



LA COSTRUZIONE SI BASA SU QUESTE RELAZIONI GEOMETRICHE E TRIGONOMETRICHE:

$(\vec{R-C})$ HA MODULO $|\vec{R-C}| = \overline{RC}$. LE SUE PROIEZIONI SULLE

16

RETTE FONDAMENTALI VALGONO:

$\overline{C''R''} = \overline{CQ} = \overline{RC} \cos\alpha$

$\overline{C'R'} = \overline{QR} = \overline{RC} \sin\alpha$

DA QUI È AGEVOLE VERIFICARE CHE

$u_{Rx} = \overline{C''R''} \cdot \vartheta = \overline{RC} \cos\alpha\, \vartheta$ [19]

$u_{Ry} = \overline{C'R'} \cdot \vartheta = \overline{RC} \sin\alpha\, \vartheta$ [20]

D'ALTRA PARTE $|\vec{u}_R| = |\vec{\omega} \wedge (\vec{R-C})| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{R-C}| \cdot 1 = |\vec{R-C}| \cdot \vartheta = \overline{RC} \cdot \vartheta$

SI HA POI

$u_{Rx} = |\vec{u}_R| \cdot \cos\alpha = \overline{RC} \cdot \vartheta \cdot \cos\alpha$ [21]

$u_{Ry} = |\vec{u}_R| \cdot \sin\alpha = \overline{RC} \cdot \vartheta \cdot \sin\alpha$ [22]

E L'EGUAGLIANZA DELLE [19] E [21] E DELLE [20] E [22] PERMETTONO DI CONCLUDERE CHE LE COMPONENTI u_{Rx}, u_{Ry} VALUTATE PERPENDICOLARMENTE ALLE RETTE FONDAMENTALI COINCIDONO CON LE EFFETTIVE COMPONENTI DEL VETTORE SPOSTAMENTO $\vec{u}_R$.

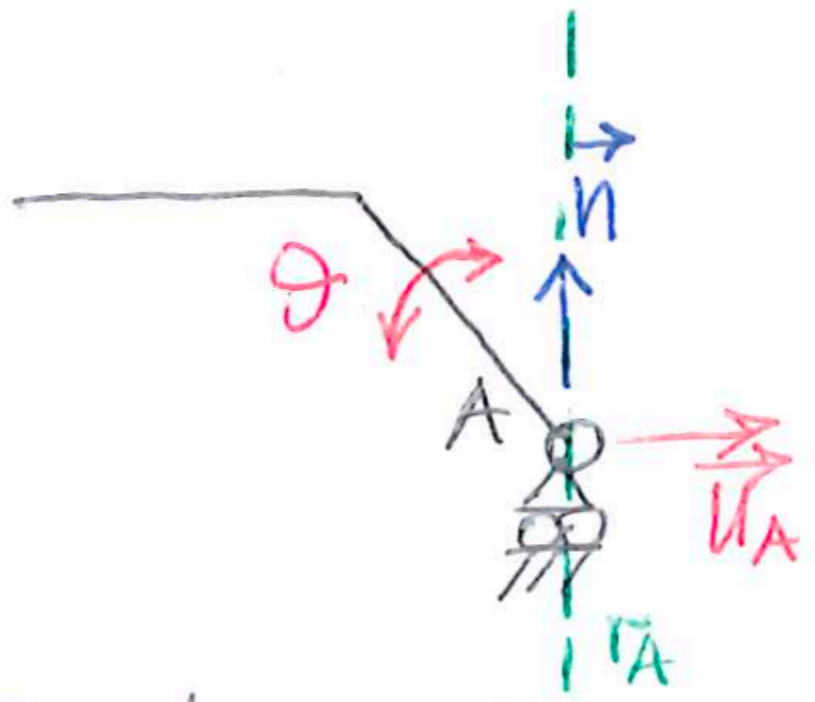
PER L'ASSOLUTA GENERALITÀ DELLA SCELTA DEL PUNTO R SI CONCLUDE CHE LA COSTRUZIONE GRAFICA APPENA PRESENTATA HA VALIDITÀ GENERALE.

IN PARTICOLARE, LE COMPONENTI DI OGNI PUNTO S COMPRESO FRA C ED R SONO RICAVABILI DAI 2 DIAGRAMMI, E RISULTANO FUNZIONI LINEARI DELL'ANGOLO DI ROTAZIONE ϑ E DELLA DISTANZA DA C.

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO PIANO VINCOLATO E DI SISTEMI DI CORPI RIGIDI PIANI SOGGETTI A VINCOLI

SI INIZIA A STUDIARE QUALE EFFETTO HANNO VINCOLI SEMPLICI, DOPPI E TRIPLI RISPETTO ALLA POSSIBILITA' DI DETERMINARE IL C.I.R.

VINCOLI SEMPLICI (CORRISPONDONO A 1 GDV = 1 EQUAZIONE DI VINCOLO)



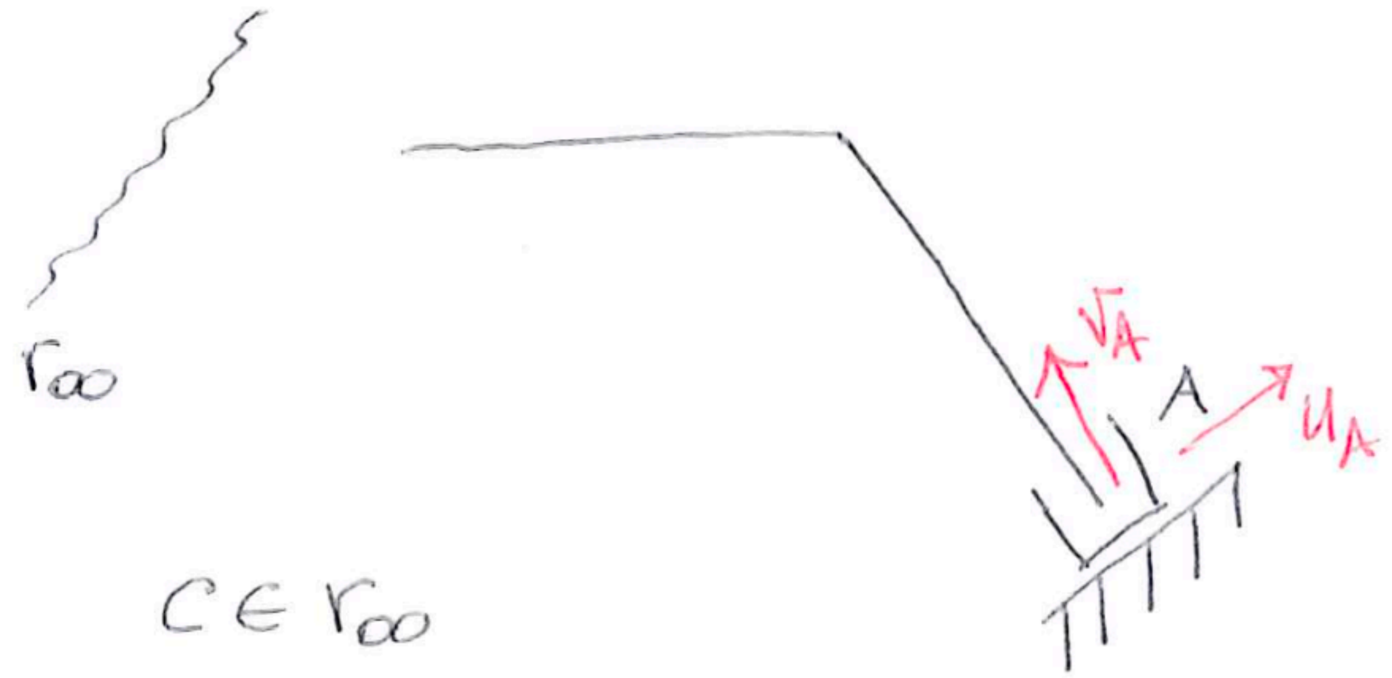
$C \in r_A$

CARRELLO: NEL PUNTO (A) DOVE E' APPLICATO IMPONE CHE NON POSSONO ESSERVI COMPONENTI DI SPOSTAMENTO IN DIREZIONE $\vec{n}$, PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO.

L'EQUAZIONE DI VINCOLO È: $\vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0}$

IL VINCOLO IMPONE UNA CONDIZIONE IN TERMINI DI C.I.R.: POICHÉ LO SPOSTAMENTO IN (A) È DIRETTO $\perp$ A $\vec{n}$, $C \in r_A$.

SI OSSERVI CHE QUESTA CONDIZIONE (APPARTENENZA DI C A UNA RETTA) NON È SUFFICIENTE A LOCALIZZARLO COMPLETAMENTE.



PATTINO - MANICOTTO (INCASTRO SEMPLICE): IL VINCOLO IN (A) FISSA, BLOCCANDOLA, LA ROTAZIONE:

$\boxed{\vartheta = 0}$ È L'EQUAZIONE DI VINCOLO.

VENGONO LASCIATE LIBERE TUTTE LE POSSIBILITA' DI TRASLAZIONE (OTTENUTE COMBINANDO IN TUTTI I MODI POSSIBILI LE TRASLAZIONI SECONDO I 2 PIANI DI SCORRIMENTO MUTUAMENTE ORTOGONALI (u_A E v_A)

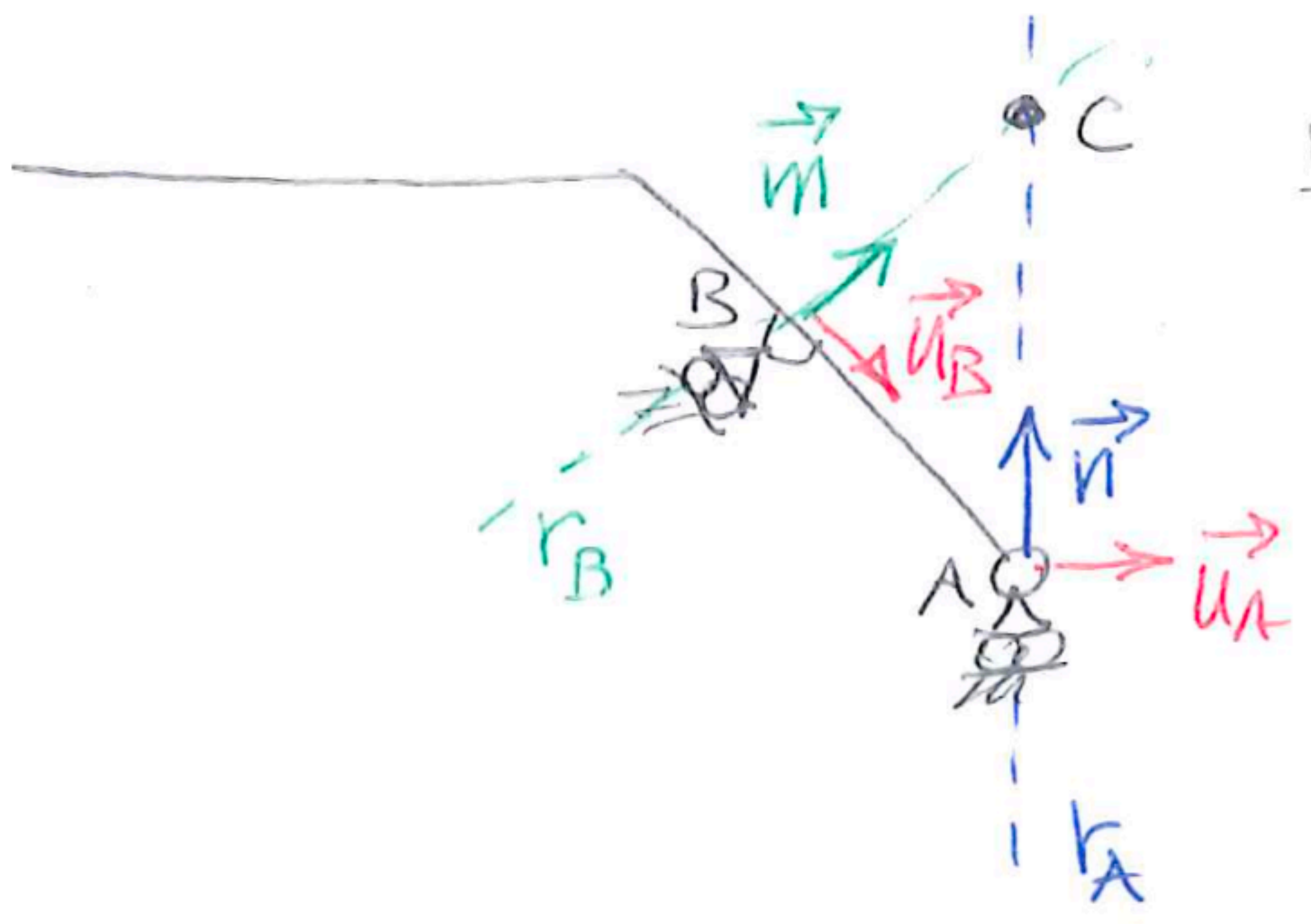
CONSEGUENTEMENTE IL MOTO RISULTANTE È UNA GENERICA TRASLAZIONE: $C = C_\infty$. NON È POSSIBILE UNA LOCALIZZAZIONE PIÙ PRECISA: TUTTAVIA SE SI INTRODUCE LA RETTA IMPROPRIA, r_∞, COME LUOGO DEI PUNTI IMPROPRI, ALLORA $C \in r_\infty$.

NOTA 1. NEL CASO DI VINCOLO SEMPLICE SI RICONOSCE CHE IL C.I.R. DEVE SODDISFARE UNA SOLA CONDIZIONE: SI PUÒ SOLO AFFERMARE CHE C APPARTIENE A UNA BEN PRECISA RETTA (r_A NEL PRIMO CASO; r_∞ NEL SECONDO) MA NON È LOCALIZZABILE CON MAGGIORE PRECISIONE.

PERALTRO UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A UN VINCOLO SEMPLICE POSSIEDE 2 GDL RESIDUI, CORRISPONDENTI A 2 POSSIBILITA' DI MOTO INDIPENDENTI (PER ESEMPIO: TRASLAZIONE PARALLELA AL PIANO DI SCORRIMENTO IN (A) E ROTAZIONE ATTORNO AD (A) NEL PRIMO CASO; 2 TRASLAZIONI INDIPENDENTI SECONDO I 2 PIANI DI SCORRIMENTO NEL SECONDO) E FINCHÉ NON SI "ASSEGNA" LA RICETTA SECONDO CUI I DUE MOTI SI COMBINANO NON È POSSIBILE CARATTERIZZARE UNIVOCAMENTE UNA ROTO-TRASLAZIONE. □

2

VINCOLI DOPPI O COMBINAZIONE DI 2 VINCOLI SEMPLICI (CORRISPONDONO A 2 GDV = 2 EQUAZIONI DI VINCOLO)



DOPPIO CARRELLO: NEI PUNTI (A) E (B) DOVE SONO APPLICATI IMPONGONO CHE LO SPOSTAMENTO DEBBA ESSERE PARALLELO AL PIANO DI SCORRIMENTO: NE SEGUE CHE LE 2 EQUAZIONI DI VINCOLO SONO:

$$\begin{cases} \vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0} \\ \vec{u}_B \times \vec{m} = \boxed{u_{Bm} = 0} \end{cases}$$

LE 2 EQUAZIONI DI VINCOLO IMPONGONO 2 CONDIZIONI AL C.I.R.!

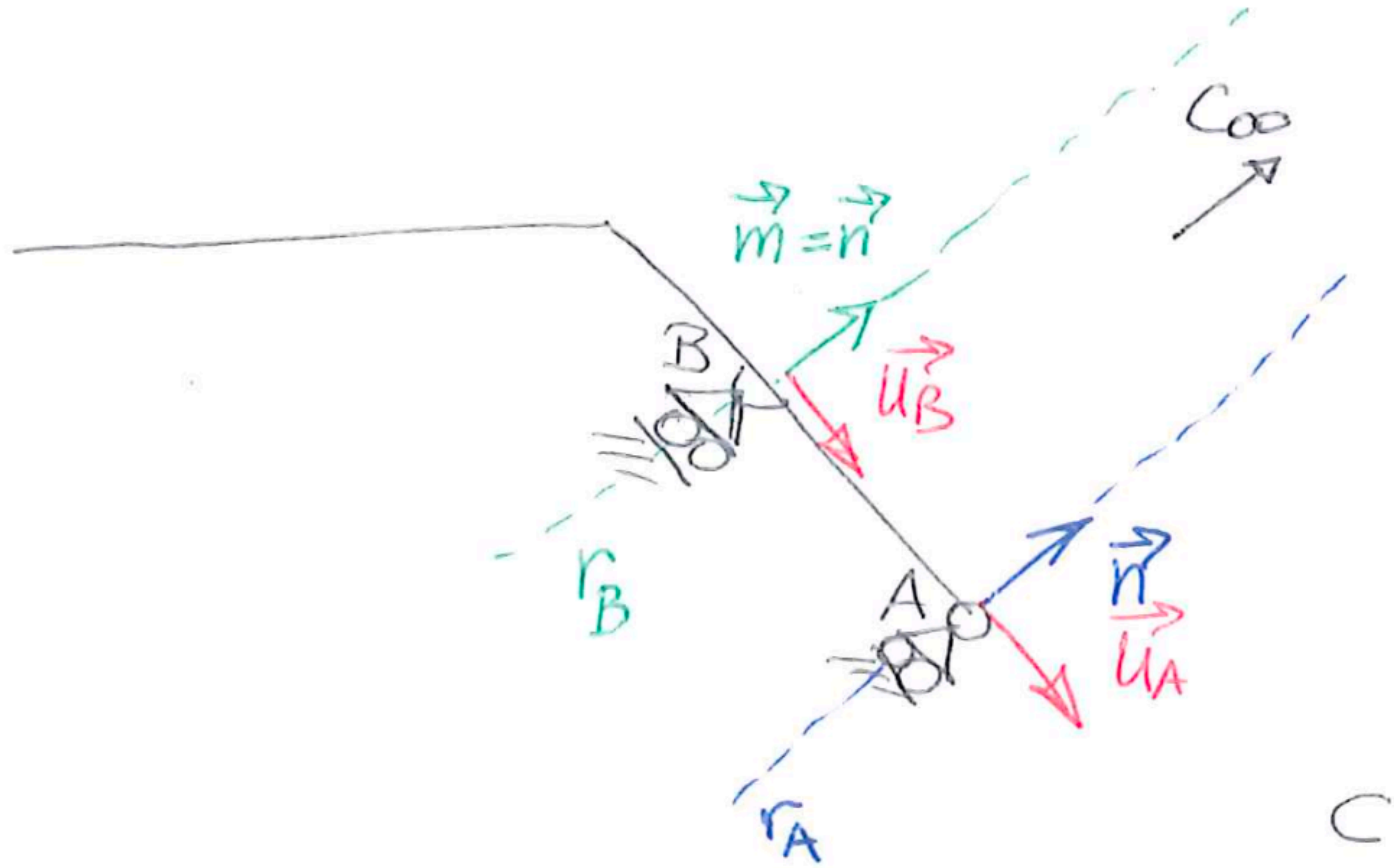
$C \in r_A$ PER IL VINCOLO IN (A)

$C \in r_B$ PER IL VINCOLO IN (B)

$\Rightarrow$ C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DI r_A E r_B.

C E' QUINDI COMPLETAMENTE DEFINITO IN QUESTO CASO!

COME CASO PARTICOLARE SI PUÒ CONSIDERARE QUELLO DI DOPPIO CARRELLO CON PIANI DI SCORRIMENTO PARALLELO:



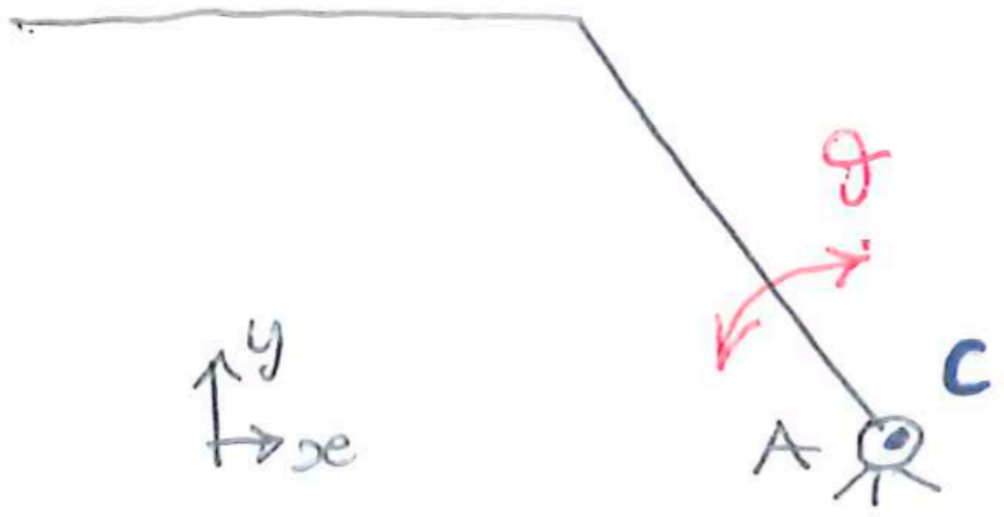
LE 2 EQUAZIONI DI VINCOLO SONO

$$\begin{cases} \vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0} \\ \vec{u}_B \times \vec{n} = \boxed{u_{Bn} = 0} \end{cases}$$

LE 2 EQ. DI VINCOLO IMPONGONO ANCORA 2 CONDIZIONI AL C.I.R.:

$$\left.\begin{array}{ll} C \in r_A & \text{PER IL VINCOLO IN (A)} \\ C \in r_B & \text{PER IL VINCOLO IN (B)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DI r_A E r_B: POICHÉ SI TRATTA DI RETTE PARALLELE $C = C_\infty$ NELLA DIREZIONE INDIVIDUATA DA $\vec{n}$, ORTOGONALE ALLA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO CONSENTITO (TRASLAZIONE)



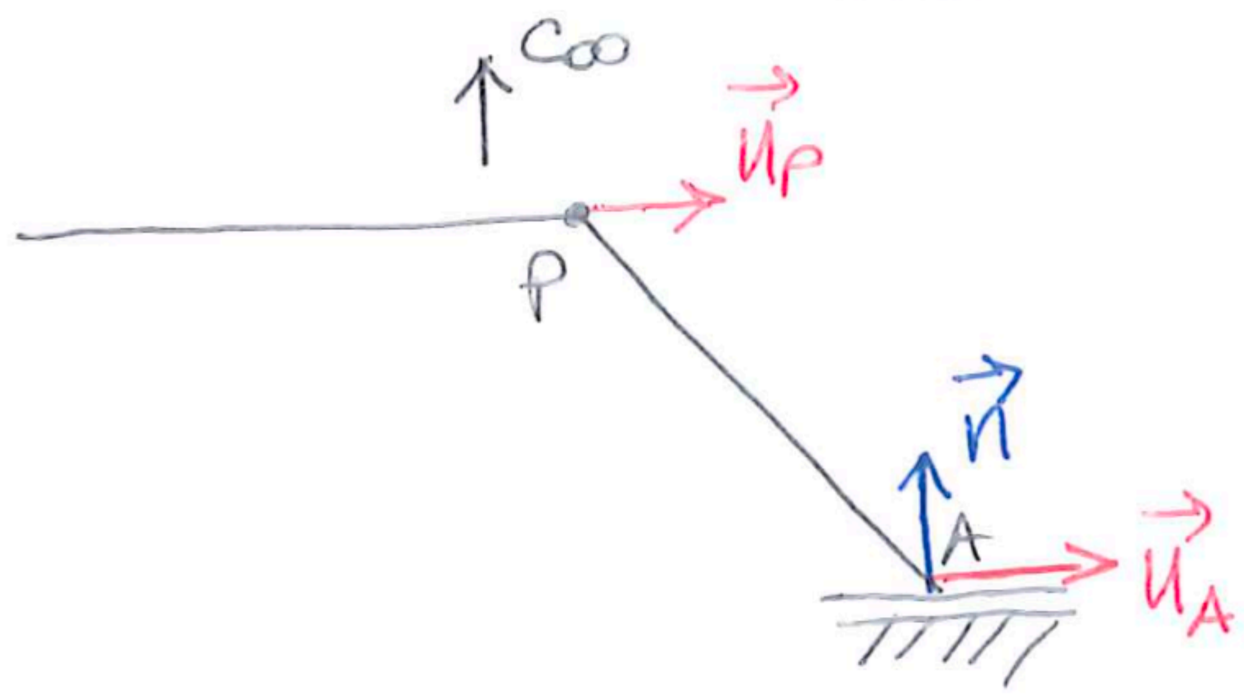
CERNIERA: È EQUIVALENTE A UN DOPPIO CARRELLO CON PIANI DI SCORRIMENTO ORTOGONALI APPLICATI NEL PUNTO A: 3

IL PUNTO A NON PUÒ SUBIRE SPOSTAMENTI, E CIÒ CORRISPONDE A 2 EQ. DI VINCOLO

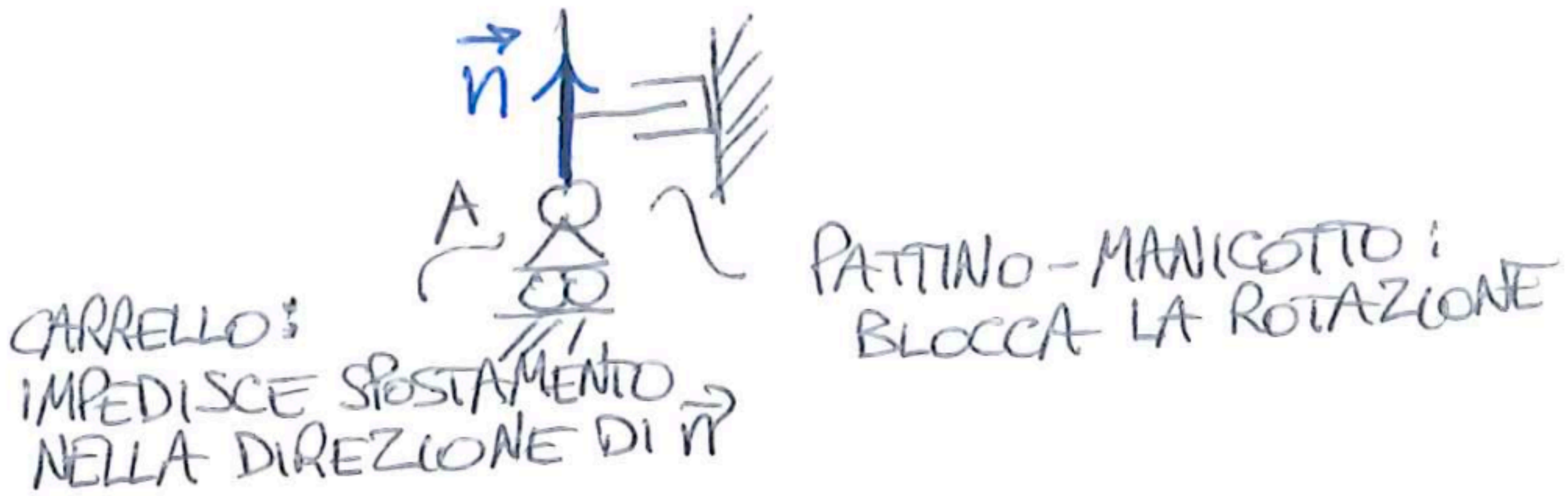
$$\vec{u}_A = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{u_{Ax} = 0} \\ \boxed{u_{Ay} = 0} \end{cases} \quad [I]$$

NEL CASO DEL DOPPIO CARRELLO SI AVREBBE, IN ANALOGIA CON QUANTO APPENA VISTO: $u_{Am} = 0$ E $u_{An} = 0$; MA SE LE DIREZIONI $\vec{m}$ E $\vec{n}$ COINCIDONO CON GLI ASSI X E Y SI RITROVANO LE [I].

ESSE GARANTISCONO CHE IL PUNTO A NON SUBISCA ALCUNO SPOSTAMENTO: NE SEGUE DUNQUE $C \equiv A$.



PATTINO: È EQUIVALENTE ALLA COMBINAZIONE DI 2 VINCOLI SEMPLICI, CARRELLO E PATTINO-MANICOTTO OPPORTUNAMENTE COLLEGATI

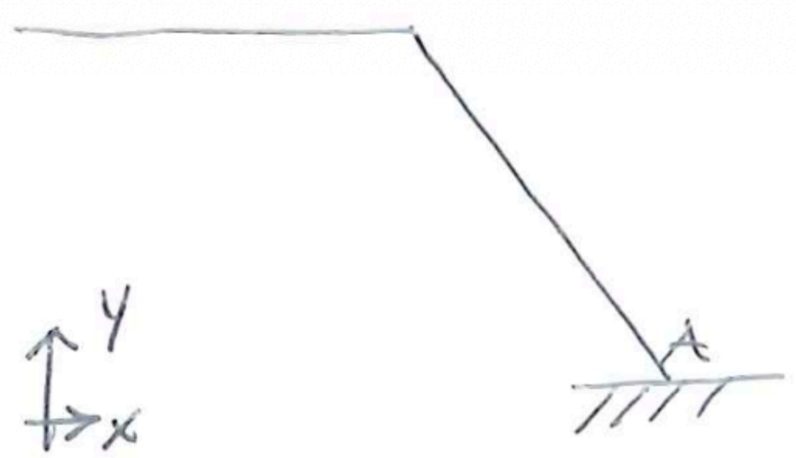


IL PUNTO (A) PUÒ SUBIRE SPOSTAMENTI SOLO PARALLELI AL PIANO DI SCORRIMENTO E LE ROTAZIONI SONO BLOCCATE: CIÒ CORRISPONDE A QUESTE 2 EQ. DI VINCOLO:

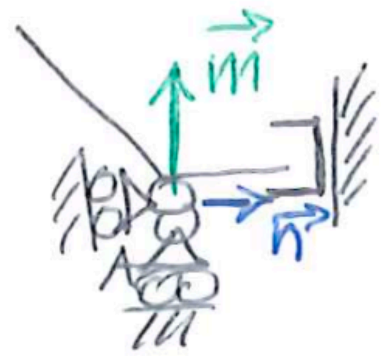
$$\begin{cases} \vec{u}_A \times \vec{n} = \boxed{u_{An} = 0} \\ \boxed{\vartheta = 0} \end{cases}$$

QUALUNQUE ALTRO PUNTO DEL CORPO RIGIDO, PER ESEMPIO P AVRÀ UNO SPOSTAMENTO $\vec{u}_P = \vec{u}_A$. PERTANTO IL VINCOLO CONSENTE AL CORPO RIGIDO UNA SOLA TRASLAZIONE: $\underline{C = C_\infty}$. LA DIREZIONE È QUELLA INDIVIDUATA DA $\vec{n}$, ⊥ ALLA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO CONSENTITO.

VINCOLI TRIPLI (CORRISPONDONO A 3GDV = 3EQUAZIONI DI VINCOLO)



INCASTRO: È EQUIVALENTE A UN DOPPIO CARRELLO CON PIANI DI SCORRIMENTO ORTOGONALI ABBINATO A UN PATTINO MANICOTTO, TUTTI APPLICATI NEL PUNTO (A):



PER IL DOPPIO CARRELLO È:

$u_{An} = 0$

$u_{Am} = 0$

PER IL PATTINO MANICOTTO È

$\vartheta = 0$.

EQUIVALENTI ALLE [2]

IL PUNTO (A) NON PUÒ SUBIRE NÉ SPOSTAMENTI NÉ ROTAZIONI: LE EQUAZIONI DI VINCOLO SONO ALLORA LE SEGUENTI:

$$\begin{cases} \vec{u}_A = \vec{0} \quad \begin{cases} \boxed{u_{Ax} = 0} \\ \boxed{u_{Ay} = 0} \end{cases} \\ \boxed{\vartheta = 0} \end{cases} \qquad [2]$$

POICHÉ $\vec{u}_A = \vec{0}$ E $\vec{\omega} = \vec{0}$ (VISTO CHE $|\vec{\omega}| = \|\varphi\|$) L'UNICO MOTO RIGIDO POSSIBILE È QUELLO NULLO:

$$\vec{u}_P = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{P-A}) = \vec{0}.$$

NE SEGUE CHE NON È POSSIBILE DETERMINARE UN C.I.R.: NON SONO POSSIBILI MOTI.

NOTA 2 NEL CASO DI VINCOLO DOPPIO SI È VISTO CHE IL C.I.R. È COMPIUTAMENTE DETERMINATO.

UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A UN VINCOLO DOPPIO (O A 2 VINCOLI SEMPLICI) POSSIEDE 1 GDL RESIDUO, CORRISPONDENTE IN GENERALE A UNA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA, PER LA QUALE È SEMPRE DEFINITO IL C.I.R.

Π

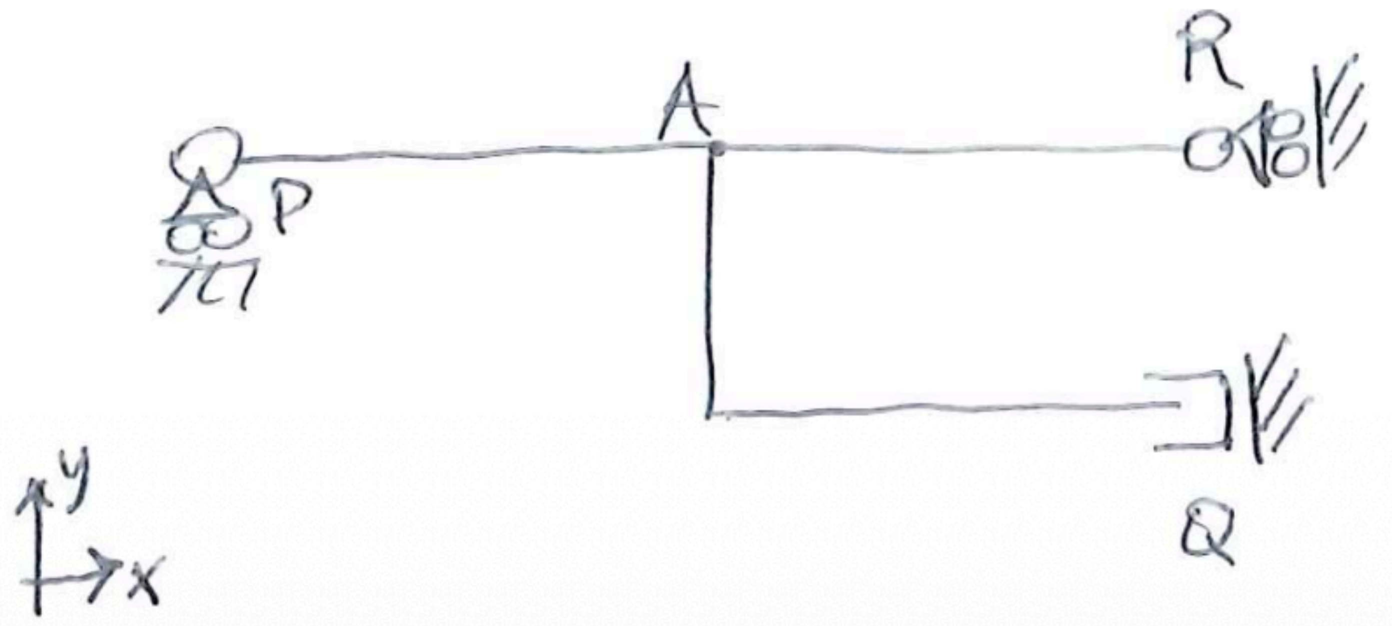
NOTA 3 NEL CASO DI VINCOLO TRIPLO UN CORPO RIGIDO POSSIEDE 0 G.D.L. RESIDUI E QUINDI NON SONO POSSIBILI MOTI.

NEL CASO CHE I VINCOLI PRESENTI DIANO LUOGO A 3 G.D.V. MA SIANO RELATIVI A PUNTI DIVERSI OCCORRE ACCERTARE CHE I VINCOLI COOPERINO EFFICACEMENTE ALLA SOPPRESSIONE DEI MOTI RIGIDI, POICHÉ QUESTO NON È GARANTITO A PRIORI.

OCCORRE EFFETTUARE UNO STUDIO NOTO COME ANALISI CINEMATICA, CONSISTENTE NEL DETERMINARE EVENTUALI SOLUZIONI NON NULLE DEL PROBLEMA CINEMATICO PER IL CORPO RIGIDO VINCOLATO. II.

PROBLEMA CINEMATICO DI UN CORPO RIGIDO VINCOLATO.

SI CONSIDERI UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A N VINCOLI SEMPLICI (NEL CASO DI VINCOLI DOPPI O TRIPLI, SI È VISTO COME TRASFORMARLI IN PIÙ VINCOLI SEMPLICI APPLICATI NELLO STESSO PUNTO.



PRESO UN PUNTO ARBITRARIO (PER ESEMPIO IL PUNTO A) SI ESPRIMONO GLI SPOSTAMENTI DEI PUNTI VINCOLATI (P, Q, R, ECC.) IN FUNZIONE DELLO SPOSTAMENTO DI A, $\vec{u}_A$ E DELLA ROTAZIONE ϑ DEL CORPO MEDIANTE L'ESPRESSIONE DELLA ROTO-TRASLAZIONE INFINITESIMA:

$$\vec{u}_P = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{P-A})$$
$$\vec{u}_Q = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{Q-A})$$
$$\vec{u}_R = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{R-A})$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

DOVE, AL SOLITO, $\vec{\omega} = \vartheta \vec{k}$ E, PER COMPONENTI

$$u_{Px} = u_{Ax} - \vartheta (y_P - y_A)$$
$$u_{Py} = u_{Ay} + \vartheta (x_P - x_A)$$

5

A QUESTO PUNTO SI IMPONGONO LE EQUAZIONI SCALARI DI VINCOLO:

$$\begin{cases} u_{P_y} = 0 \\ \vartheta_Q = 0 \\ u_{R_x} = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{P_y} = u_{Ay} + \vartheta(x_P - x_A) = 0 \\ \vartheta_Q = \vartheta = 0 \\ u_{R_x} = u_{Ax} - \vartheta(y_R - y_A) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

E CIÒ DÀ LUOGO A UN SISTEMA DI N EQUAZIONI LINEARI, OMOGENEO PERCHÉ I VINCOLI SONO PERFETTI (NON DANNO LUOGO A CEDIMENTI) NELLE 3 INCOGNITE $u_{Ax}, u_{Ay}, \vartheta$.
IN TERMINI MATRICIALI SI PUÒ SCRIVERE, INTRODUCENDO LA MATRICE CINEMATICA $[C]_{N\times3}$ DEI COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE E I VETTORI COLONNA $\{\underline{v}\}_{3\times1}$ CHE CONTIENE LE INCOGNITE E $\{\underline{0}\}_{N\times1}$ CHE CONTIENE I TERMINI NOTI, TUTTI NULLI, STANTE LA NATURA OMOGENEA DEL SISTEMA:

$$[C]_{(N,3)}\{\underline{v}\}_{(3,1)} = \{\underline{0}\}_{(N,1)} \qquad [3]$$

IL SISTEMA [3] AMMETTE SEMPRE LA SOLUZIONE (BANALE) NULLA: $\{\underline{v}\}_{3,1} = \{\underline{0}\}_{3,1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
CHE CORRISPONDE A $u_{Ax} = 0$; $u_{Ay} = 0$; $\vartheta = 0$
CIÒ COMPORTA CHE LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO A SIA NULLO $\vec{u}_A = \vec{0}$ E CHE SI ANNULLI ANCHE LA ROTAZIONE $\vartheta = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$.
DI CONSEGUENZA LA SOLUZIONE BANALE CORRISPONDE ALLA IMPOSSIBILITÀ DI MOTO RIGIDO E QUINDI AL FATTO CHE I VINCOLI SIANO DISPOSTI IN MODO TALE DA INIBIRE OGNI SPOSTAMENTO/ROTAZIONE, RENDENDO IMMOBILE IL CORPO RIGIDO.

OCCORRE TUTTAVIA VALUTARE SE ESISTONO ALTRE SOLUZIONI OLTRE A QUELLA BANALE, CARATTERIZZATE DA $\{v\} \neq \{0\}$.

LA TEORIA DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI OMOGENEI GARANTISCE, APPLICANDOLA AL CASO IN ESAME (PER IL QUALE LA MATRICE $[C]$ NON CAMBIA RANGO SE VIENE "ORLATA" DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI) CHE:

- SE $\text{RANGO}([C]) = 3$ (CIOÈ SE DA $[C]$ SI PUÒ ESTRARRE UN MINORE DI ORDINE 3 NON NULLO)
  $\Rightarrow$ ESISTE SOLO LA SOLUZIONE BANALE $\{v\} = \{0\}$
  IL CORPO È GEOMETRICAMENTE DETERMINATO (NON LABILE) E SI MANTIENE IMMOBILE

- SE $\text{RANGO}([C]) < 3$ (CIOÈ SE DA $[C]$ NON SI PUÒ ESTRARRE UN MINORE DI ORDINE 3 NON NULLO)
  $\Rightarrow$ IL SISTEMA AMMETTE (ALMENO) UNA SOLUZIONE NON BANALE, CIOÈ $\{v\} \neq \{0\}$
  IL CORPO È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATO (LABILE) E SUSSISTONO, NONOSTANTE I VINCOLI, POSSIBILITÀ DI MOTO.

SI HANNO I SEGUENTI COROLLARI (PER IL SINGOLO CORPO RIGIDO):

1. <u>CONDIZIONE SUFFICIENTE</u> AFFINCHÉ UN CORPO RIGIDO RISULTI CINEMATICAMENTE INDETERMINATO (LABILE) È CHE IL GRADO DI VINCOLO N (CORRISPONDENTE AL NUMERO DI VINCOLI SEMPLICI EQUIVALENTI) SIA INFERIORE AL NUMERO DI G.D.L.: $N < 3$.
   IN TAL CASO INFATTI RISULTA RANGO $([\mathcal{C}]) < 3 \Rightarrow$ ESISTONO POSSIBILITÀ DI MOTO
   ($[\mathcal{C}]$ HA UN NUMERO N DI RIGHE < 3 E)

2. <u>CONDIZIONE NECESSARIA</u> (MA NON SUFFICIENTE) AFFINCHÉ UN CORPO RIGIDO RISULTI CINEMATICAMENTE DETERMINATO (NON LABILE) È CHE IL NUMERO N DI VINCOLI SEMPLICI EQUIVALENTI (CIOÈ IL GRADO DI VINCOLO) SIA MAGGIORE O EGUALE AL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ: $N \geq 3$.
   IN TAL CASO INFATTI $[\mathcal{C}]$ HA UN NUMERO DI RIGHE ≥ 3, SICCHÉ È POSSIBILE (<u>MA NON È GARANTITO!</u>) CHE ESISTA UN MINORE DI ORDINE 3 NON NULLO:
   IN TAL CASO RANGO $([\mathcal{C}]) = 3 \Rightarrow$ NON ESISTONO POSSIBILITÀ DI MOTO.

SI PUÒ ESTENDERE IL PROBLEMA CINEMATICO A STRUTTURE COSTITUITE DA M CORPI RIGIDI. CIASCUN CORPO RIGIDO HA (NEL CASO PIANO) 3 GDL, CIOÈ 3 COMPONENTI INDIPENDENTI DI MOTO.

SI HA PERTANTO CHE IL PROBLEMA HA 3M GRADI DI LIBERTA' TOTALI, OVVERO 3M INCOGNITE CINEMATICHE, E IL SISTEMA RISOLVENTE DIVIENE, IN FORMA MATRICIALE:

$$[C]_{N\times 3M}\{v\}_{3M\times 1}=\{0\}_{N\times 1} \qquad \text{CON} \quad \{v\}=\begin{Bmatrix} u_{Ax}^{(1)} \\ u_{Ay}^{(1)} \\ \vartheta^{(1)} \\ u_{Bx}^{(2)} \\ u_{By}^{(2)} \\ \vartheta^{(2)} \\ \vdots \\ u_{Zx}^{(M)} \\ u_{Zy}^{(M)} \\ \vartheta^{(M)} \end{Bmatrix}$$

DOVE (A) È UN PUNTO APPARTENENTE AL CORPO (1), (B) UN PUNTO APPARTENENTE AL CORPO (2), ..., (Z) UN PUNTO APPARTENENTE AL CORPO (M).

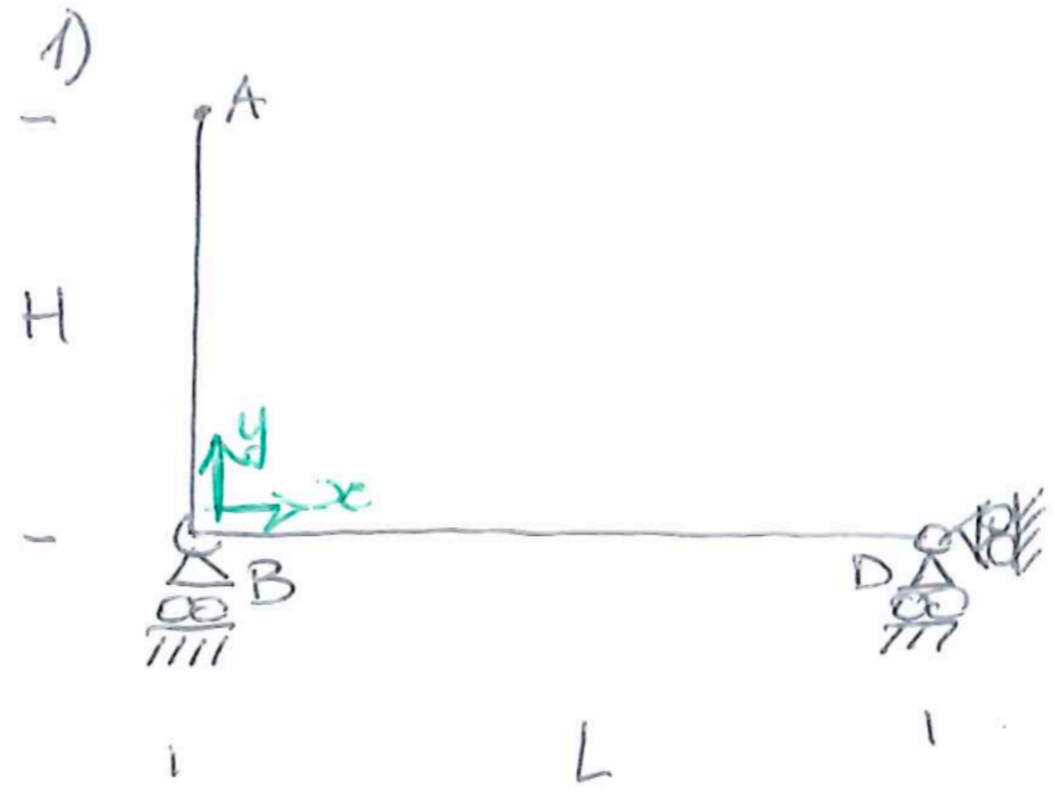
IN QUESTO CASO SI TROVA CHE:

SE $\text{RANGO}([C]) = 3M$ ESISTE SOLO LA SOLUZIONE BANALE: LA STRUTTURA RISULTA GEOMETRICAMENTE DETERMINATA (NON LABILE) E NON SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI.

SE $\text{RANGO}([C]) < 3M$ ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE NON BANALE: LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATA (LABILE) E SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI.

ESEMPI DI RISOLUZIONE DEL PROBLEMA CINEMATICO.

1)



1 CORPO RIGIDO = 3GDL $(M=1)$

3 VINCOLI SEMPLICI = 3GDV $(N=3)$

PRESO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CON ORIGINE NEL PUNTO B, LE COORDINATE DEI PUNTI SIGNIFICATIVI RISULTANO:

$A = (0, H)$; $B = (0,0)$; $D = (L, 0)$

LE CONDIZIONI DI VINCOLO SONO: $u_{By} = 0$; $u_{Dx} = 0$; $u_{Dy} = 0$.

SE SI ASSUMONO COME VARIABILI CINEMATICHE $\vec{u}_A$ e ϑ, SI HA CHE LE INCOGNITE DEL PROBLEMA SONO: u_{Ax}, u_{Ay}, ϑ.

PER IL GENERICO PUNTO P SI HA:

$$\vec{u}_P = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{P-A}) \quad [4]$$

OVVERO, PER COMPONENTI:

$$\begin{cases} u_{Px} = u_{Ax} - \vartheta (y_P - y_A) \\ u_{Py} = u_{Ay} + \vartheta (x_P - x_A) \end{cases}$$

SI TROVA DUNQUE PER u_{By}; u_{Dx}; u_{Dy}:

$$\begin{cases} u_{By} = 0 \Rightarrow u_{By} = u_{Ay} + \vartheta (x_B - x_A) = u_{Ay} + \vartheta \cdot 0 = 0 \\ u_{Dx} = 0 \Rightarrow u_{Dx} = u_{Ax} - \vartheta (y_D - y_A) = u_{Ax} - \vartheta (0 - H) = 0 \\ u_{Dy} = 0 \Rightarrow u_{Dy} = u_{Ay} + \vartheta (x_D - x_A) = u_{Ay} + \vartheta (L - 0) = 0 \end{cases}$$

PERTANTO IL SISTEMA DIVIENE:

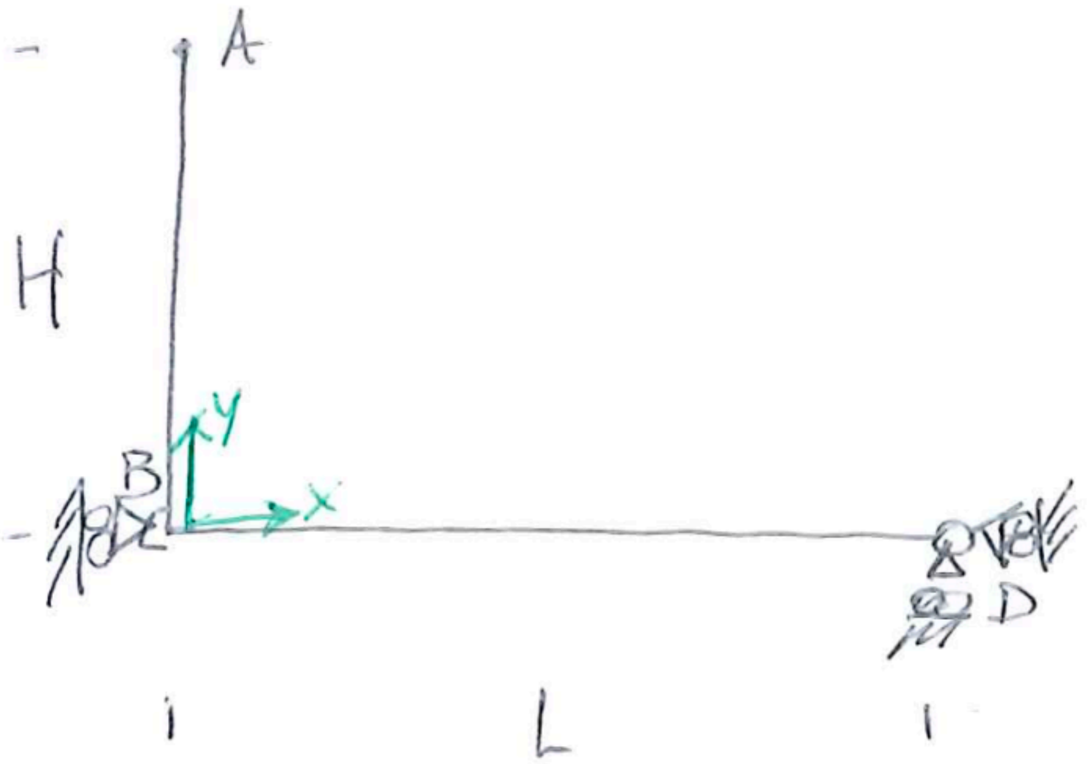
$$\begin{cases} u_{Ay} = 0 \\ u_{Ax} + \vartheta H = 0 \\ u_{Ay} + \vartheta L = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & H \\ 0 & 1 & L \end{bmatrix}_{(3,3)}}_{[\mathcal{C}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ \vartheta \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{\underline{v}\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{\underline{0}\}}$$

SI VEDE CHE $\det([\mathcal{C}]) = (-1) \cdot L = -L \neq 0$ E QUINDI SI CONCLUDE CHE $\text{RANGO}([\mathcal{C}]) = 3$.

NE SEGUE CHE L'UNICA SOLUZIONE POSSIBILE È QUELLA BANALE, $\{\underline{v}\} = \{\underline{0}\}$ CIOÈ $u_{Ax} = 0$, $u_{Ay} = 0$, $\vartheta = 0$ IL CHE COMPORTA $\vec{u}_A = \vec{0}$, $\vec{\omega} = \vartheta \vec{k} = \vec{0}$.

E DUNQUE NE CONSEGUE, PER LA [4] $\vec{u}_P = \vec{0}$ PER OGNI PUNTO P DEL CORPO RIGIDO. NON SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI QUINDI IL CORPO RIGIDO È GEOMETRICAMENTE DETERMINATO (NON LABILE) COME SE FOSSE BLOCCATO DA UN UNICO VINCOLO TRIPLO.

2)



1 CORPO RIGIDO = 3GDL $(M=1)$

3 VINCOLI SEMPLICI = 3GDV $(N=3)$

RISPETTO AL CASO PRECEDENTE È CAMBIATO (DA ORIZZONTALE A VERTICALE) IL PIANO DI SCORRIMENTO DEL VINCOLO IN (B).

LE COORDINATE DEI PUNTI SIGNIFICATIVI SONO ANCORA:

$(A) = (0, H)$; $(B) = (0,0)$; $(D) = (L, 0)$.

LE CONDIZIONI DI VINCOLO SONO QUESTA VOLTA: $u_{Bx} = 0$; $u_{Dx} = 0$; $u_{Dy} = 0$.

SE SI ASSUMONO ANCORA COME VARIABILI CINEMATICHE $\vec{u}_A$ E ϑ, LE INCOGNITE DEL PROBLEMA $u_{Ax}, u_{Ay}, \vartheta$.

IN BASE ALLA [4] SI TROVA, PER u_{Bx}, u_{Dx}, u_{Dy}:

$$\begin{cases} u_{Bx} = 0 & \Rightarrow \quad u_{Bx} = u_{Ax} - \vartheta(y_B - y_A) = u_{Ax} - \vartheta(-H) = 0 \\ u_{Dx} = 0 & \Rightarrow \quad u_{Dx} = u_{Ax} - \vartheta(y_D - y_A) = u_{Ax} - \vartheta(-H) = 0 \\ u_{Dy} = 0 & \Rightarrow \quad u_{Dy} = u_{Ay} + \vartheta(x_D - x_A) = u_{Ay} + \vartheta(L) = 0 \end{cases}$$

E IL SISTEMA DIVIENE:

$$\begin{cases} u_{Ax} + \vartheta H = 0 \\ u_{Ax} + \vartheta H = 0 \\ u_{Ay} + \vartheta L = 0 \end{cases} [5] \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & H \\ 1 & 0 & H \\ 0 & 1 & L \end{bmatrix}_{(3,3)}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ \vartheta \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{\underline{v}\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(3,1)}}_{\{\underline{0}\}}$$

SI VEDE IMMEDIATAMENTE CHE $[C]$ HA 2 RIGHE EGUALI, DUNQUE LINEARMENTE DIPENDENTI: DI CONSEGUENZA $\det[C] = 0$ E QUINDI SI CONCLUDE CHE RANGO$([C]) < 3$.
UN ESAME DI $[C]$ RIVELA CHE È POSSIBILE ESTRARRE DA $[C]$ ALMENO UNA SOTTOMATRICE 2x2 CON DETERMINANTE $\neq 0$, DUNQUE UN MINORE DI ORDINE 2. CIÒ PORTA A CONCLUDERE CHE RANGO$([C]) = 2$.
CIÒ COMPORTA CHE ESISTA UNA SOLUZIONE NON BANALE, $\{\underline{v}\} \neq \{\underline{0}\}$ E DUNQUE IL CORPO È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATO (OVVERO LABILE): SONO DUNQUE POSSIBILI MOTI RIGIDI.
PER INDIVIDUARE COME È FATTO IL MOTO RIGIDO NON IMPEDITO DAI VINCOLI CHE SAREBBERO IN NUMERO SUFFICIENTE A CONTRASTARE OGNI MOTO RIGIDO, SE FOSSERO BEN DISPOSTI, SI PROCEDE A RISOLVERE IL SISTEMA [5] SCARTANDO LA PRIMA EQUAZIONE, CHE È UNA RIPETIZIONE DELLA SECONDA, E PONENDO $\vartheta = k$ (PARAMETRO). SI TROVA ALLORA:

$$\begin{cases} u_{Ax} = -kH \\ u_{Ay} = -kL \\ \vartheta = k \end{cases} \qquad [5']$$

SI VEDE QUINDI CHE LA SOLUZIONE NON BANALE È DATA DA

$$\{\underline{v}\} = \begin{Bmatrix} -kH \\ -kL \\ k \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} -H \\ -L \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad [6]$$

ED È DEFINITA, COME SEMPRE SUCCEDE NEI SISTEMI INDETERMINATI, A MENO DI UNA COSTANTE, CIOÈ A MENO DEL PARAMETRO k.

IL FATTO CHE $\{\bar{U}\} \neq \{0\}$ INDICA CHE IL CORPO RIGIDO PUÒ SUBIRE SPOSTAMENTI DI AMPIEZZA ARBITRARIA (MA PUR SEMPRE INFINITESIMA) INDIVIDUATI DALLA [6]. DA QUESTI OVVIAMENTE PER $K=0$ SI RITROVA LA SOLUZIONE BANALE, MENTRE PER $K\neq 0$ E QUALSIASI SI OTTIENE UN MOTO RIGIDO INFINITESIMO E COMPATIBILE CON I VINCOLI.

A QUESTO PUNTO SI PUÒ TROVARE IL C.I.R, Ⓒ, CIOÈ IL PUNTO ATTORNO AL QUALE IL CORPO RIGIDO RUOTA.

RICORDANDO CHE PER DEFINIZIONE DI C.I.R. È $\vec{u}_c=\vec{0}$, CIOÈ $u_{cx}=0$ E $u_{cy}=0$

DALLA [4] RISCRITTA PER $P\equiv C$:

$$\vec{0}=\vec{u}_C = \vec{u}_A + \vec{\omega}\wedge(\overrightarrow{C-A}) \Rightarrow \begin{cases} u_{cx}=0 = u_{Ax} - \vartheta(y_c-y_A) \\ u_{cy}=0 = u_{Ay}+\vartheta(x_c-x_A) \end{cases} \quad [7]$$

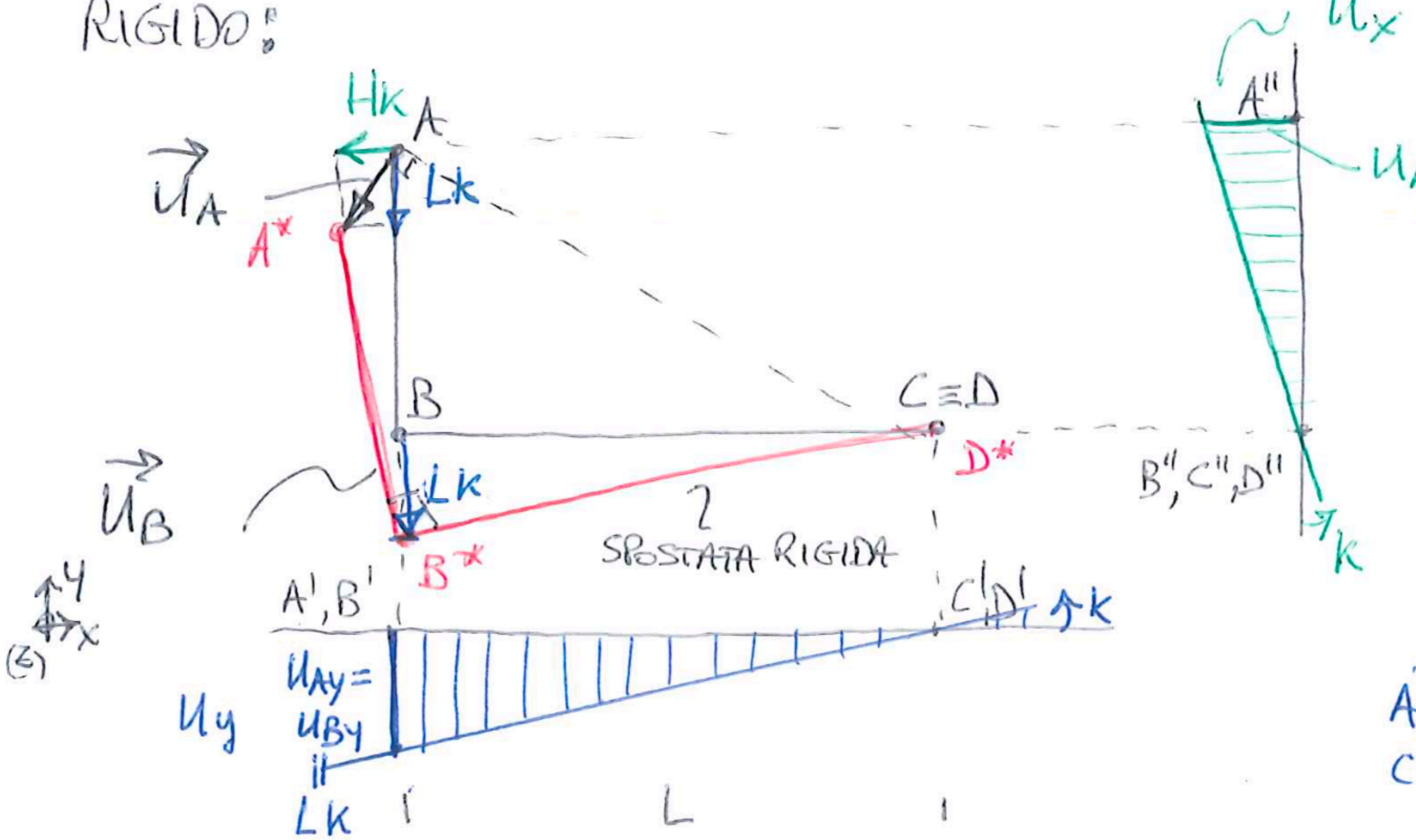
E SOSTITUENDO $u_{Ax}=-K\cdot H$; $u_{Ay}=-KL$; $\vartheta=K$ E RICORDANDO CHE $C=(x_c,y_c)$

SI OTTIENE, DATO CHE $x_A=0$; $y_A=+H$:

$$\begin{cases} -\cancel{K}H-\cancel{K}(y_c-H)=0 \\ -\cancel{K}L+\cancel{K}(x_c-0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{H}+y_c-\cancel{H}=0 \\ -L+x_c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c=+L \\ y_c=0 \end{cases}$$

DUNQUE Ⓒ $=(+L,0)$ E SI TROVA Ⓒ $\equiv$ Ⓓ.

DA QUI MEDIANTE I DIAGRAMMI DEGLI SPOSTAMENTI SI PUÒ DETERMINARE LA "SPOSTATA RIGIDA" DELLA TRAVE, CIOÈ LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL CAMPO DI MOTO RIGIDO:



SI NOTI CHE

$|\vec{u}_B| = Lk$

$|\vec{u}_A| = \sqrt{u_{Ax}^2 + u_{Ay}^2}$

$|\vec{u}_A| = \sqrt{(H^2 + L^2)k^2}$

$|\vec{u}_A| = k\sqrt{H^2 + L^2}$

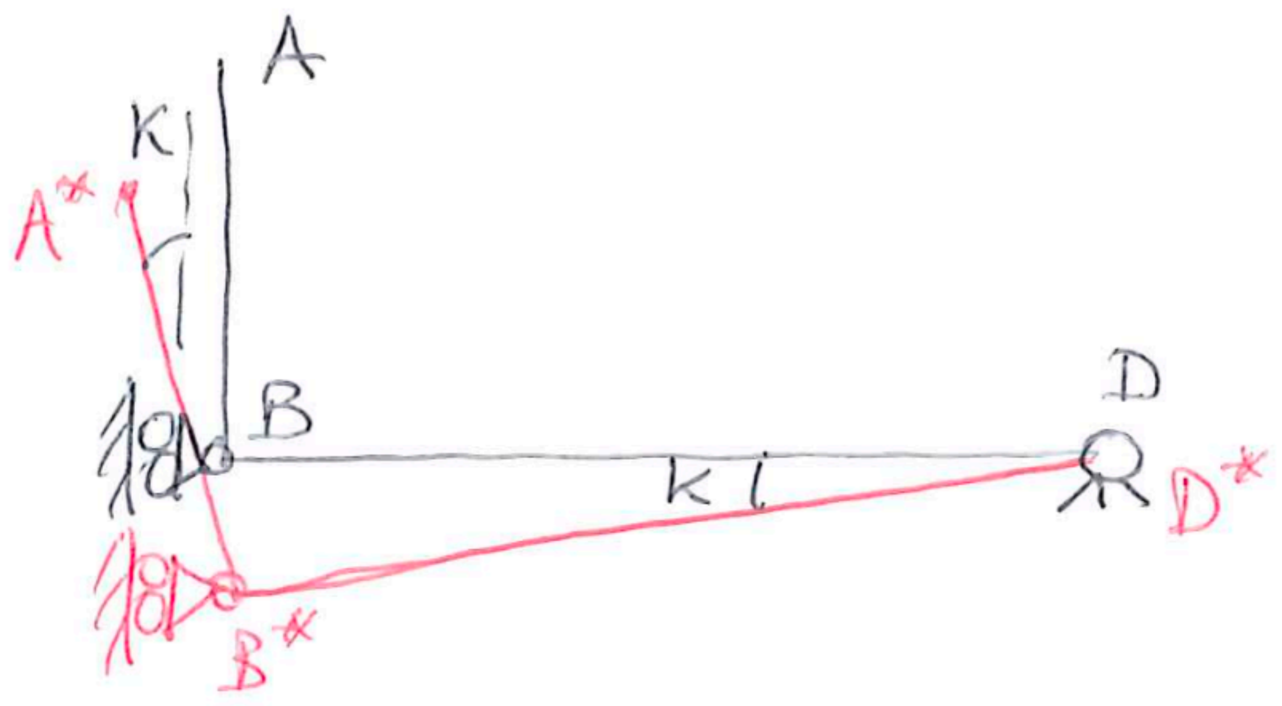
DOVE È ANCHE $|\overrightarrow{A-C}| = \overline{AC}$

$\overline{AC} = \sqrt{L^2 + k^2}$, SICCHÉ SI VERIFICA CHE $|\vec{u}_A| = k\,\overline{AC}$.

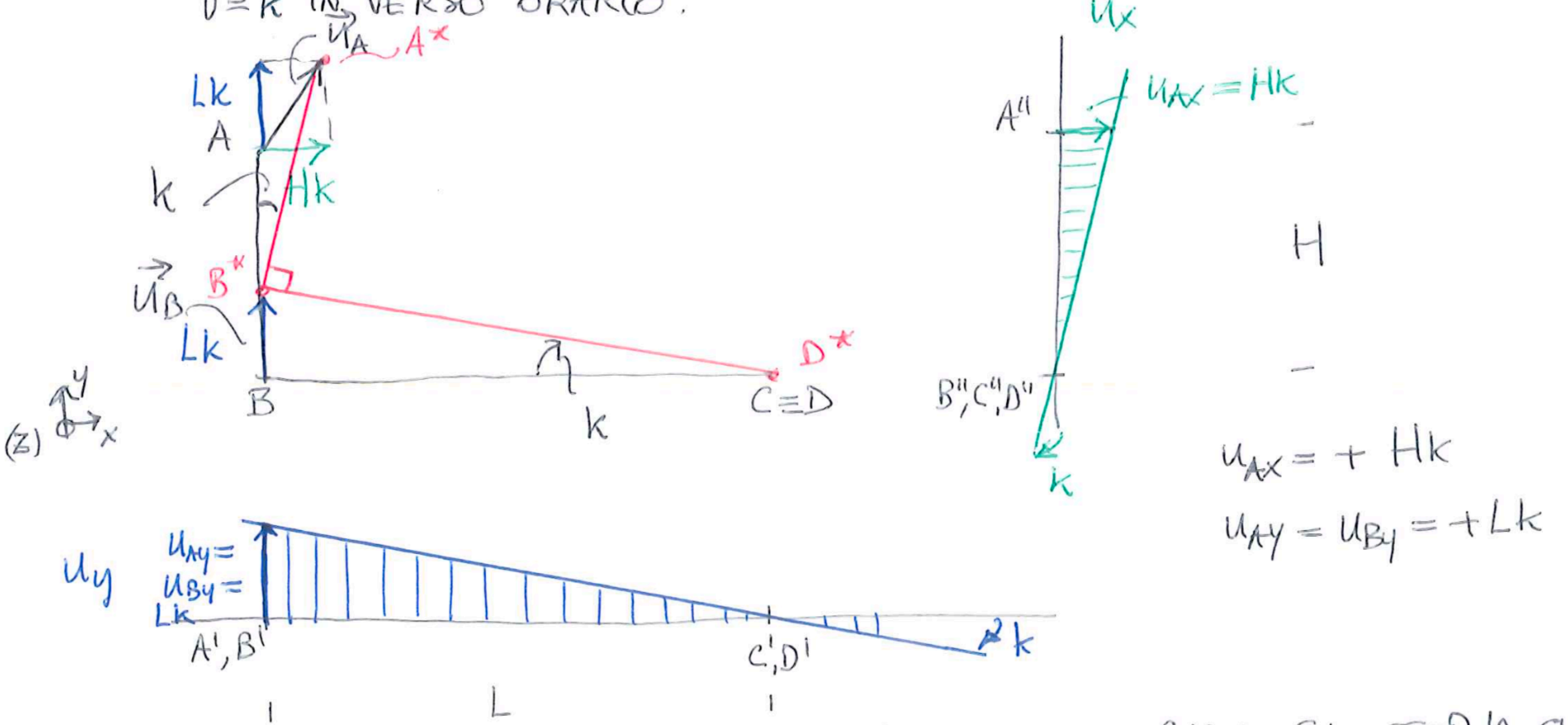
TRACCIANDO A PARTIRE DALLE 2 RETTE FONDAMENTALI 2 RETTE INCLINATE DI UN ANGOLO K (ANTIORARIO, IN QUESTO CASO) A PARTIRE DALLE IMMAGINI DEL PUNTO (C), C' E C'' SI COSTRUISCONO I DIAGRAMMI DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u_y E u_x PER TUTTI I PUNTI DELLA STRUTTURA.

SE SI TIENE CONTO DI COME SONO DISPOSTI I VINCOLI, SI VEDE CHE IL MOTO ORA EVIDENZIATO È PERFETTAMENTE COMPATIBILE CON ESSI, A RIPROVA DEL FATTO CHE QUESTI NON SONO DISPOSTI IN MODO EFFICACE A IMPEDIRE I MOTI RIGIDI DEL CORPO, PUR ESSENDO IN NUMERO SUFFICIENTE (SE FOSSERO DISPOSTI CORRETTAMENTE) A RENDERLO "IMMOBILE".

11



NEL SEGUITO SI ILLUSTRA LA COSTRUZIONE DELLA SPOSTATA RIGIDA PER LA MEDESIMA STRUTTURA DI PAG. 9 ASSUMENDO UNA ROTAZIONE $\vartheta = k$ IN VERSO ORARIO.



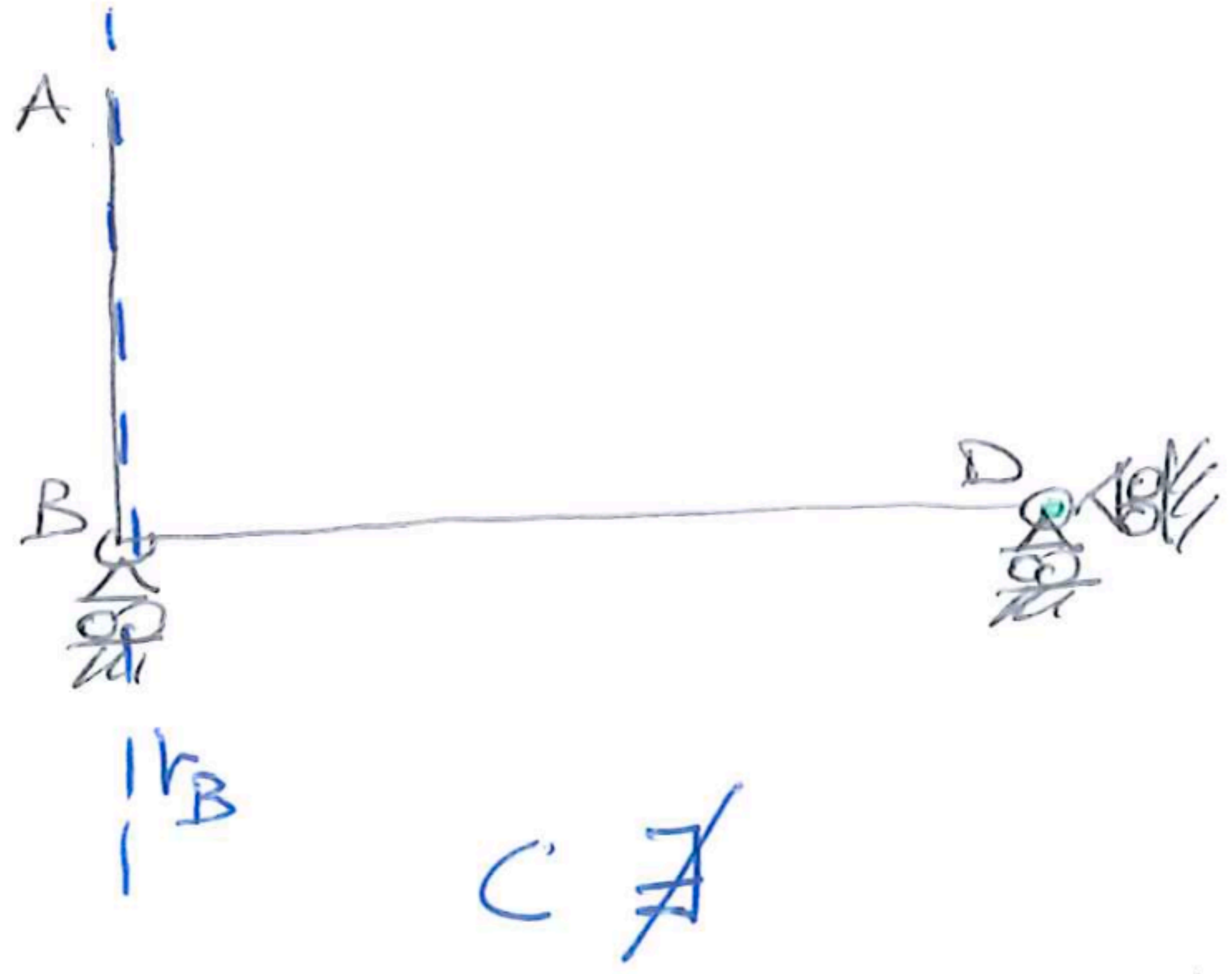
PASSANDO DA ROTAZIONE ANTIORARIA A ROTAZIONE ORARIA SI OSSERVA CHE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO CAMBIANO ORDINATAMENTE DI SEGNO; TUTTAVIA I <u>RAPPORTI</u> FRA LE COMPONENTI RESTANO INVARIATI.

IL PROBLEMA CINEMATICO PER IL CORPO RIGIDO VINCOLATO (O ANALISI CINEMATICA)
PUÒ ESSERE AFFRONTATO OLTRE CHE CON L'APPROCCIO ANALITICO ORA ESAMINATO ANCHE
CON UN METODO GRAFICO, PIÙ RAPIDO.

NELLA LOGICA DEL METODO GRAFICO SI VALUTANO LE CONDIZIONI IMPOSTE DAI
VINCOLI AL C.I.R. C DEL CORPO RIGIDO: SE LE CONDIZIONI COSÌ INDIVIDUATE
PORTANO A RISULTATI CONTRADDITORI, SI GIUNGE ALLA CONCLUSIONE CHE NON È
POSSIBILE DETERMINARE UN C.I.R. CHE SODDISFI TUTTE LE CONDIZIONI CINEMATI-
CHE PRESENTI E DUNQUE IL CORPO RIGIDO DEVE MANTENERSI IMMOBILE:
IN QUESTA SITUAZIONE I VINCOLI SONO BEN DISPOSTI, NON CI SONO LABILITÀ E
IL CORPO RIGIDO È GEOMETRICAMENTE DETERMINATO.

SE INVECE LE CONDIZIONI IMPOSTE DA TUTTI I VINCOLI PRESENTI SONO COMPATIBILI
CON LA PRESENZA DI UN C.I.R. SI È NELLA SITUAZIONE IN CUI IL CORPO
RIGIDO È LABILE (GEOMETRICAMENTE INDETERMINATO) E SONO POSSIBILI MOTI
RIGIDI RICONDUCIBILI AL C.I.R. APPENA INDIVIDUATO.

COSÌ, PER LA STRUTTURA 1) GIÀ STUDIATA CON IL METODO ANALITICO VALGONO QUESTE CONSIDERAZIONI:



(a) IL CARRELLO IN Ⓑ RICHIEDE CHE IL C.I.R. APPARTENGA ALLA RETTA r_B, $\perp$ AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL CARRELLO:

$C \in r_B$ [+]

(b) IL DOPPIO CARRELLO (EQUIVALENTE A UNA CERNIERA) IN Ⓓ RICHIEDE CHE IL C.I.R. SIA COLLOCATO IN Ⓓ : $C \equiv$ Ⓓ [++]

CHIARAMENTE Ⓓ $\notin r_B$ E QUINDI LE 2 CONDIZIONI CINEMATICHE [+], [++] DI ESISTENZA DEL C.I.R. SONO INCONCILIABILI: PERTANTO $\nexists$ C.I.R.

NE SEGUE CHE LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE DETERMINATA (NON LABILE) E NON È SUSCETTIBILE DI SUBIRE SPOSTAMENTI.

INVECE PER LA STRUTTURA 2), GIA' STUDIATA ANCHE ESSA CON IL METODO ANALITICO VALGONO QUESTE CONSIDERAZIONI:

(a) IL CARRELLO IN (B) RICHIEDE CHE IL C.I.R. APPARTENGA ALLA RETTA r'_B $\perp$ AL (DIVERSO) PIANO DI SCORRIMENTO DEL CARRELLO:

$$C \in r'_B \quad [\bullet]$$

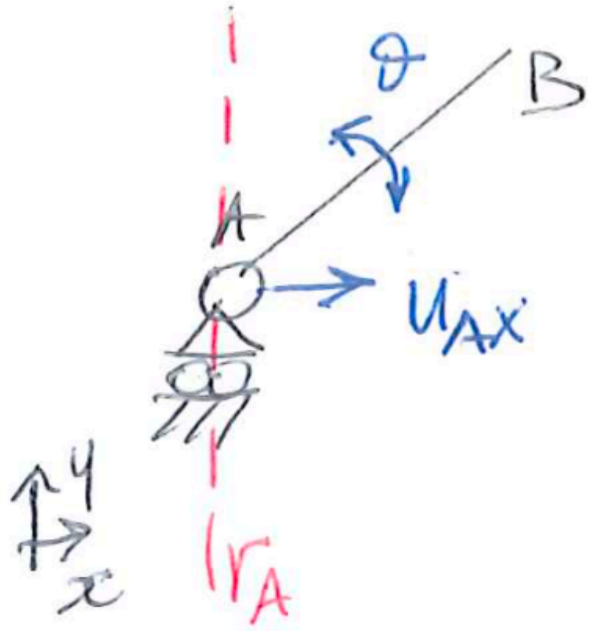
(b) IL DOPPIO CARRELLO (CERNIERA) IN (D) RICHIEDE CHE IL C.I.R. SIA COLLOCATO IN (D):

$$C \equiv D \quad [\bullet\bullet]$$

QUESTA VOLTA, PERÒ, LE DUE CONDIZIONI CINEMATICHE $[\bullet]$, $[\bullet\bullet]$ SONO CONCILIABILI (COMPATIBILI) VISTO CHE $D \in r'_B$: NE SEGUE $C \equiv D$ E LA STRUTTURA, LABILE, È SUSCETTIBILE DI SUBIRE MOTI RIGIDI.

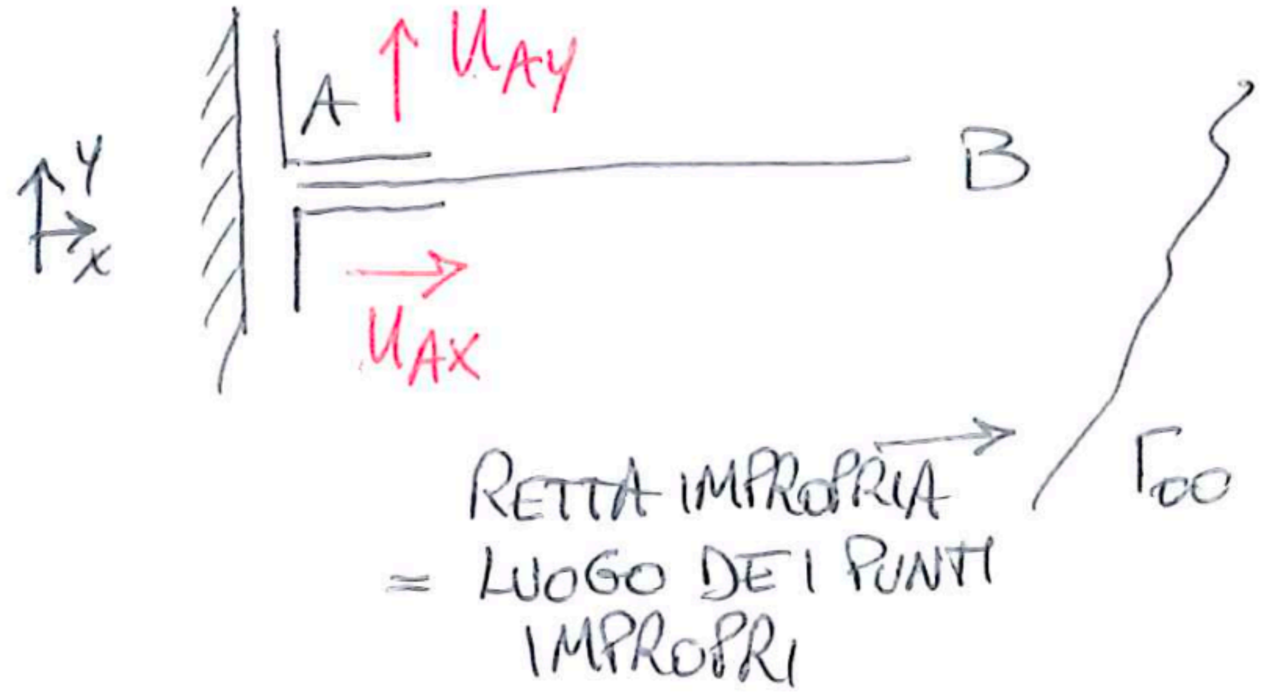
CON LO STESSO APPROCCIO GRAFICO SI CONSIDERANO STRUTTURE CON DIFFERENTE G.D.V.

A) GDV = 1 $\Rightarrow$ STRUTTURE 2 VOLTE IPOSTATICHE:



IL VINCOLO IN (A) RICHIEDE CHE SIA: $C \in r_A$ (RETTA $\perp$ AL PIANO DI SCORRIMENTO)

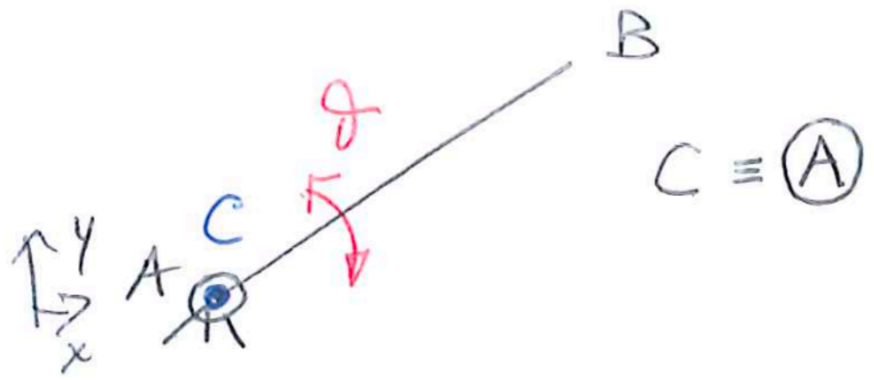
LA CONDIZIONE PUÒ ESSERE SODDISFATTA E QUINDI C.I.R. $\exists$; TUTTAVIA LA POSIZIONE SU r_A NON È DETERMINABILE IN QUANTO IL MOTO RIGIDO HA 2 G.D.L. (u_{Ax} E ϑ), INDIPENDENTI

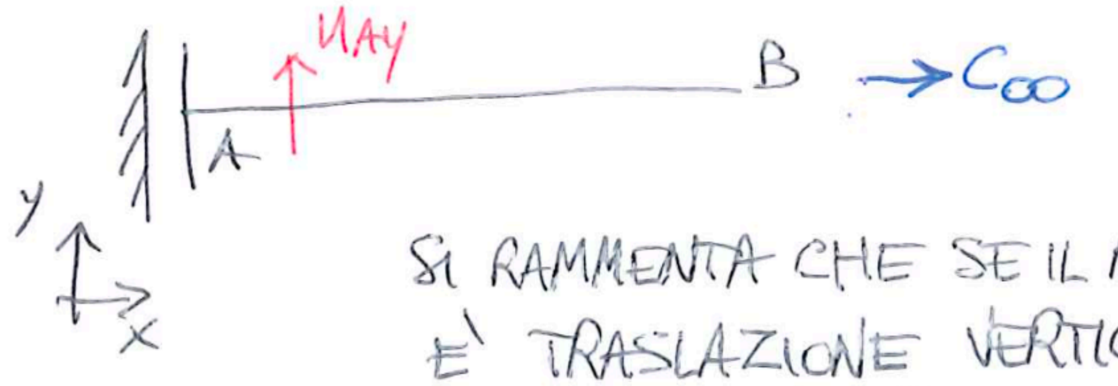


IL VINCOLO IN (A) RICHIEDE CHE C.I.R. SIA C_∞ (PUNTO IMPROPRIO): $C_\infty \in r_\infty$

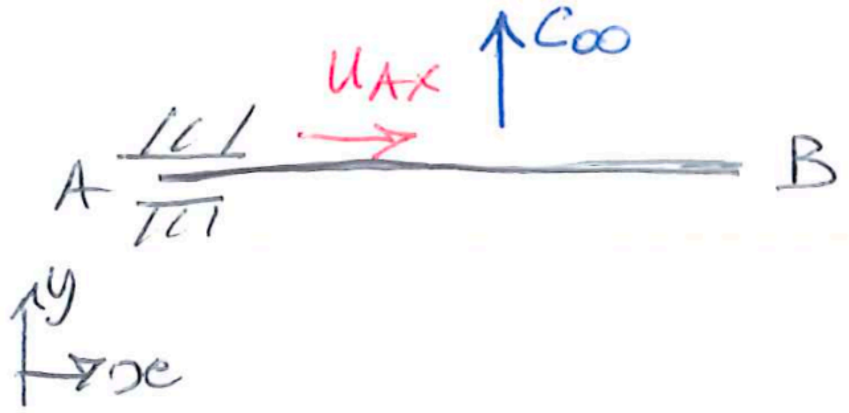
LA CONDIZIONE PUÒ ESSERE SODDISFATTA E QUINDI C.I.R. $\exists$; TUTTAVIA LA POSIZIONE SU r_∞ NON È DETERMINABILE IN QUANTO IL MOTO RIGIDO HA 2 G.D.L. (u_{Ax} E u_{Ay}), INDIPENDENTI.

B) GDV = 2 ⇒ STRUTTURE 1 VOLTA IPOSTATICHE

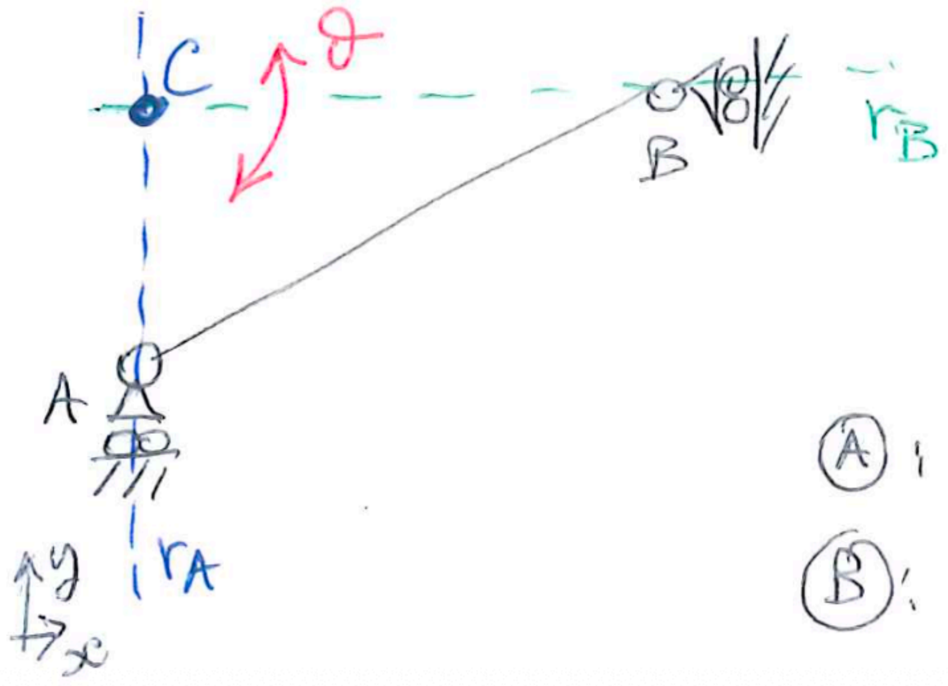




SI RAMMENTA CHE SE IL MOTO CONSENTITO È TRASLAZIONE VERTICALE, IL C.I.R. SI TROVA NEL PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA ORIZZONTALE (CIOÈ IN DIREZIONE ⊥ ALLO SPOSTAMENTO CONSENTITO)



IN QUESTO CASO IL MOTO CONSENTITO È IN DIREZIONE ORIZZONTALE E IL C.I.R. SI TROVA NEL PUNTO IMPROPRIO DI UNA RETTA ⊥, CIOÈ VERTICALE.

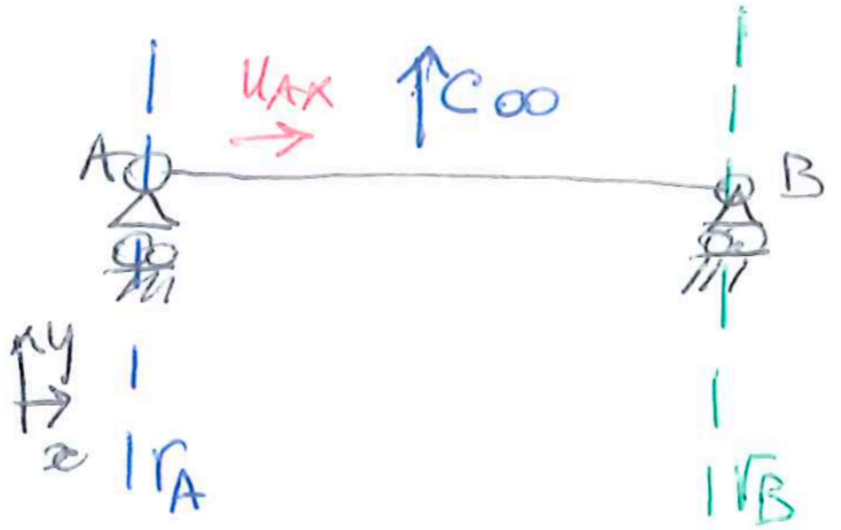


IN QUESTA SITUAZIONE LE 2 CONDIZIONI CINEMATICHE RICHIEDONO CHE CONTEMPORANEAMENTE

(A): $C \in r_A$

(B): $C \in r_B$

} C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DI r_A E r_B (PUNTO PROPRIO)



NELLA SITUAZIONE EVIDENZIATA SI HANNO QUESTE DUE CONDIZIONI CINEMATICHE DA SODDISFARE CONTEMPORANEAMENTE:

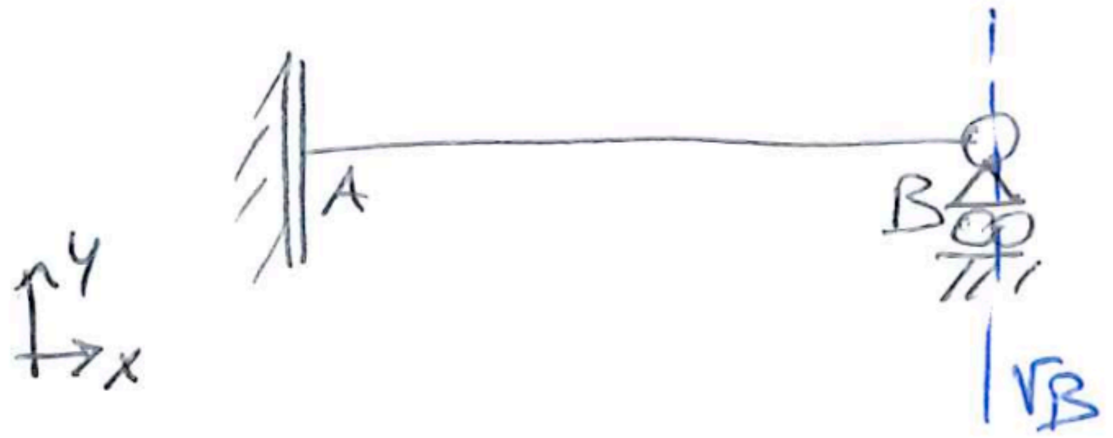
(A) $C \in r_A$

(B) $C \in r_B$

} C SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE RETTE PARALLELE r_A E r_B: È IL PUNTO IMPROPRIO DI TALI RETTE.

c) GDV ≥ 3 STRUTTURE ISOSTATICHE O IPERSTATICHE.

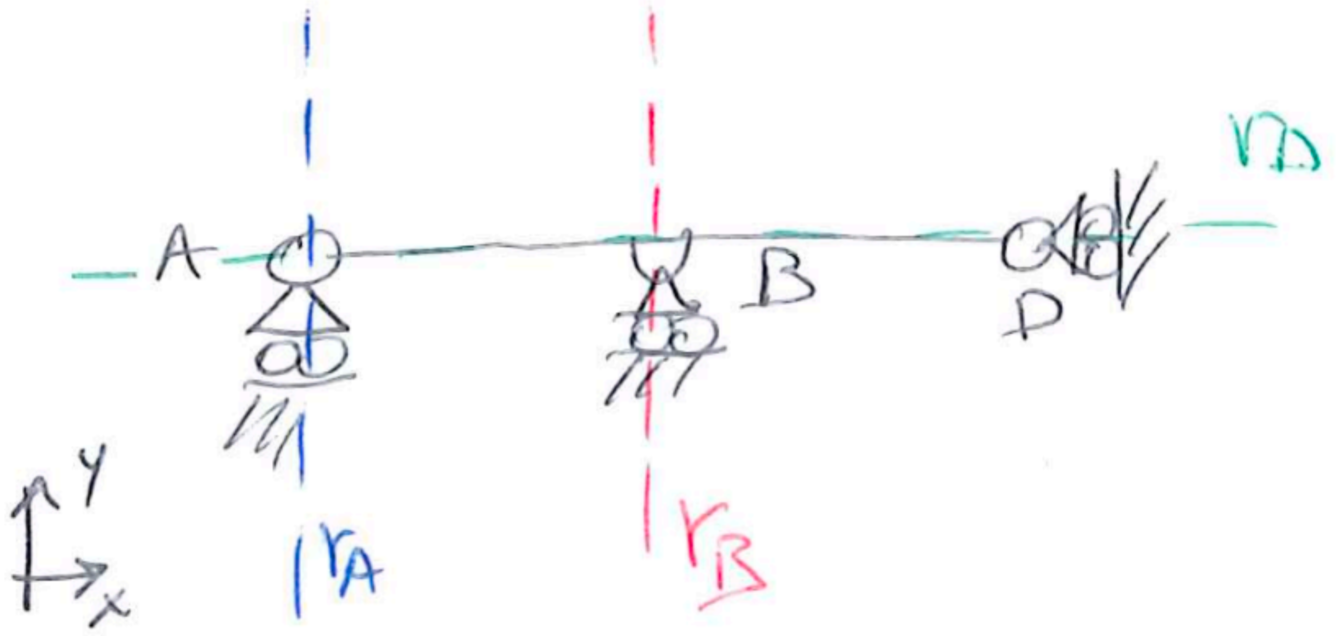
SE I VINCOLI SONO BEN DISPOSTI, IL PROBLEMA DI DETERMINARE IL C.I.R NON AMMETTE SOLUZIONE: LA TRAVE NON SI PUÒ MUOVERE



PER IL VINCOLO IN A $C = C_{\infty} \rightarrow$

PER IL VINCOLO IN B $C \in r_B$

LE 2 CONDIZIONI NON SONO CONCILIABILI (INCOMPATIBILI): $C \nexists$



PER IL VINCOLO IN A $C \in r_A$

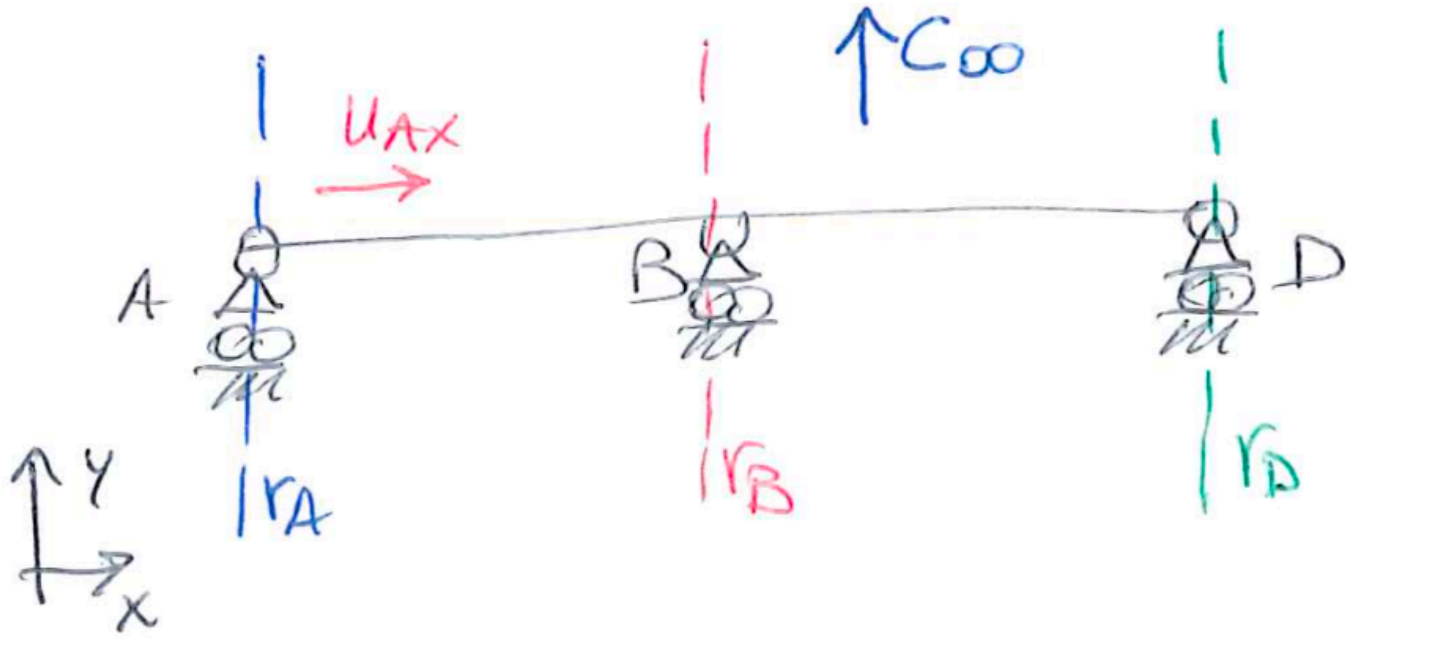
PER IL VINCOLO IN B $C \in r_B$

PER IL VINCOLO IN D $C \in r_D$

LE 3 CONDIZIONI NON SONO CONCILIABILI (LE TRE RETTE SI INTERSECANO A 2 A 2 IN PUNTI DIVERSI): $C \nexists$.

c) GDV ≥ 3 STRUTTURE ISOSTATICHE O IPERSTATICHE.

SE I VINCOLI NON SONO DISPOSTI BENE, IL PROBLEMA DI DETERMINARE IL C.I.R AMMETTE SOLUZIONE : LA TRAVE AMMETTE MOTI RIGIDI



PER IL VINCOLO IN (A) $C \in r_A$

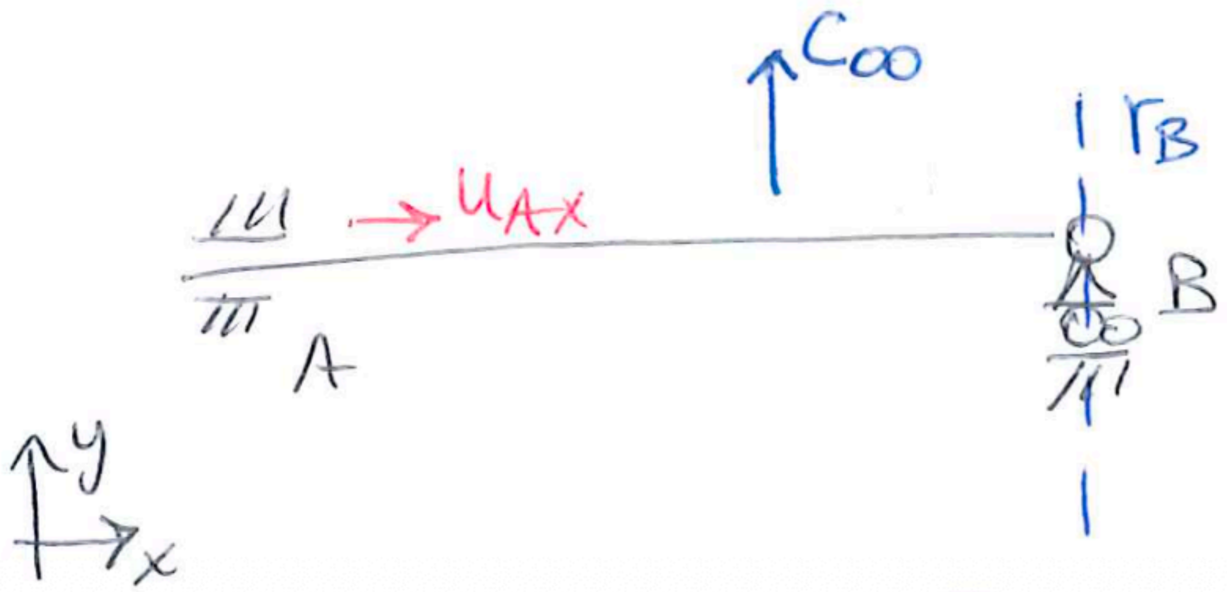
PER IL VINCOLO IN (B) $C \in r_B$

PER IL VINCOLO IN (D) $C \in r_D$

LE 3 CONDIZIONI SONO COMPATIBILI PERCHÉ LE 3 RETTE PARALLELE SI INTERSECANO NEL MEDESIMO P_∞ :

$C \equiv C_\infty = P_\infty$

(IN DIREZIONE ORTOGONALE AI 3 PIANI DI SCORRIMENTO)



PER IL VINCOLO IN (A) $C = C_\infty \uparrow$

PER IL VINCOLO IN (B) $C \in r_B$

LE 2 CONDIZIONI SONO COMPATIBILI POICHÉ $C_\infty \in r_B$ (NE È IL PUNTO IMPROPRIO).

NOTA 5. IN GENERALE SE LA STRUTTURA È 2 VOLTE IPOSTATICA (E ANCHE 2 VOLTE LABILE) IL C.I.R. $\exists$ MA NON PUÒ ESSERE LOCALIZZATO POICHÉ IL MOTO È A 2 G.D.L E QUINDI RISULTA UNA COMBINAZIONE DI 2 ROTO-TRASLAZIONI DIVERSE.

SE LA STRUTTURA È 1 VOLTA IPOSTATICA (1 VOLTA LABILE) IL C.I.R. È COMPIUTAMENTE DETERMINABILE E LA STRUTTURA PUÒ SUBIRE MOTO A 1 G.D.L, RAPPRESENTABILE COME ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R.

SE LA STRUTTURA È ISOSTATICA O IPERSTATICA (NON LABILE) IL PROBLEMA DI DETERMINAZIONE DEL C.I.R. NON AMMETTE SOLUZIONE E LA STRUTTURA SI MANTIENE IMMOBILE.

SE LA STRUTTURA È ISOSTATICA O IPERSTATICA MA LABILE IL C.I.R. È DETERMINABILE E LA STRUTTURA PUÒ SUBIRE MOTO A 1 G.D.L, REALIZZABILE COME ROTAZIONE INFINITESIMA ATTORNO AL C.I.R.

□

CINEMATICA DI SISTEMI COSTITUITI DA 2 CORPI RIGIDI MUTUAMENTE VINCOLATI

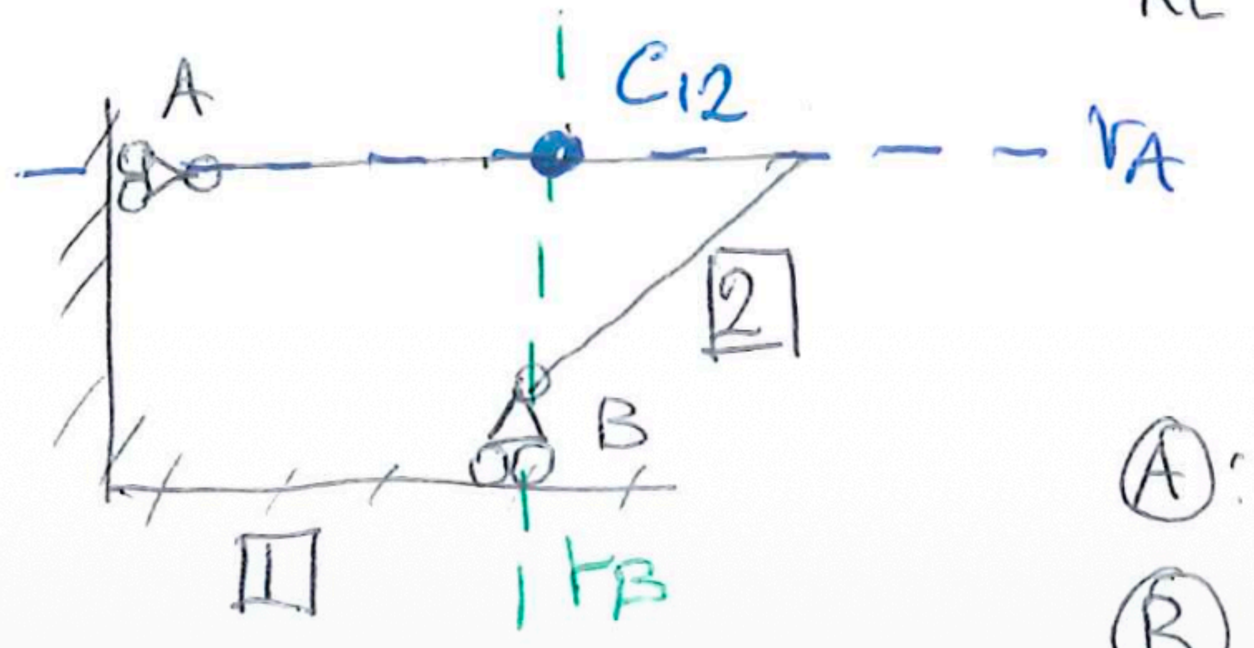
QUANDO SI HANNO 2 CORPI RIGIDI ARTICOLATI SI DEFINISCE IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE RELATIVA (C.I.R.R.) FRA I 2 CORPI.

SI TRATTA DEL C.I.R. DEL MOTO DEL SECONDO CORPO (O DEL PRIMO CORPO) RISPETTO AL PRIMO (O AL SECONDO) QUANDO QUESTO VIENE CONSIDERATO FISSO (BLOCCATO)

CONVENZIONALMENTE SI INDICA CON C_{ij} (DOVE GLI INDICI i E j RAPPRESENTANO I DUE CORPI RIGIDI)

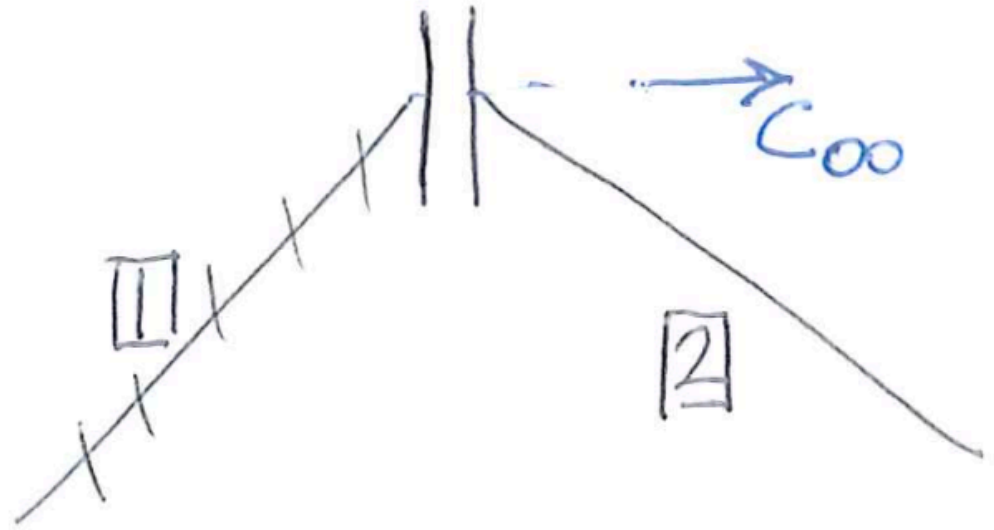
NEL CASO DI ARTICOLAZIONE A CERNIERA IL CENTRO RELATIVO È LA CERNIERA STESSA: $C_{12} \equiv A$

ANALOGAMENTE, SE LA ARTICOLAZIONE FRA I 2 CORPI RIGIDI È REALIZZATA MEDIANTE 2 CARRELLI COLLOCATI NEI PUNTI (A) E (B) IL CENTRO RELATIVO SI TROVA NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE RETTE r_A ED r_B CHE SONO PERPENDICOLARI AI 2 PIANI DI SCORRIMENTO RELATIVO:



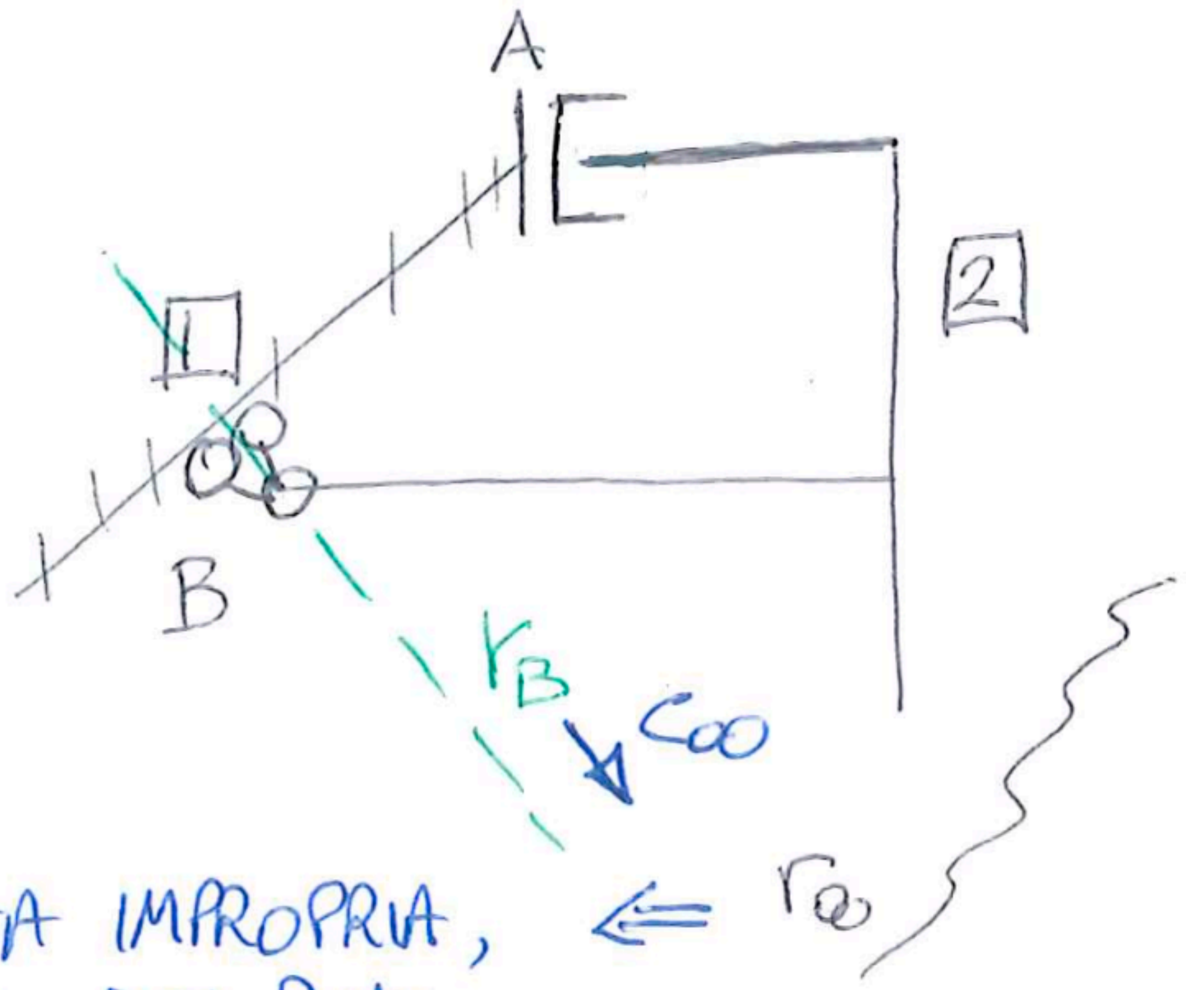
$$\left.\begin{array}{l} (A):\ C_{12} \in r_A \\ (B)\ C_{12} \in r_B \end{array}\right\} C_{12} \text{ È UNIVOCAMENTE DETERMINATO}$$

SE L'ARTICOLAZIONE È REALIZZATA MEDIANTE UN PATTINO:



IL CENTRO RELATIVO SI TROVA NEL PUNTO IMPROPRIO IN DIREZIONE PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL PATTINO.

NEL CASO DI UNA COMBINAZIONE PATTINO-MANICOTTO (INCASTRO SEMPLICE) E CARRELLO SI OSSERVA QUANTO SEGUE:



RETTA IMPROPRIA, LUOGO DEI PUNTI IMPROPRI DEL PIANO

IN (A) PER LA PRESENZA DEL VINCOLO (PATTINO MANICOTTO) IL C.I.R.R. SI DEVE TROVARE SULLA RETTA IMPROPRIA:

$C_{12} \in r_\infty$ [*]

IN (B) PER LA PRESENZA DEL CARRELLO, IL C.I.R.R DEVE APPARTENERE ALLA RETTA r_B:

$C_{12} \in r_B$ [**]

PER SODDISFARE LE 2 CONDIZIONI [*] E [**] C_{12} SI DEVE TROVARE NEL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE 2 RETTE.

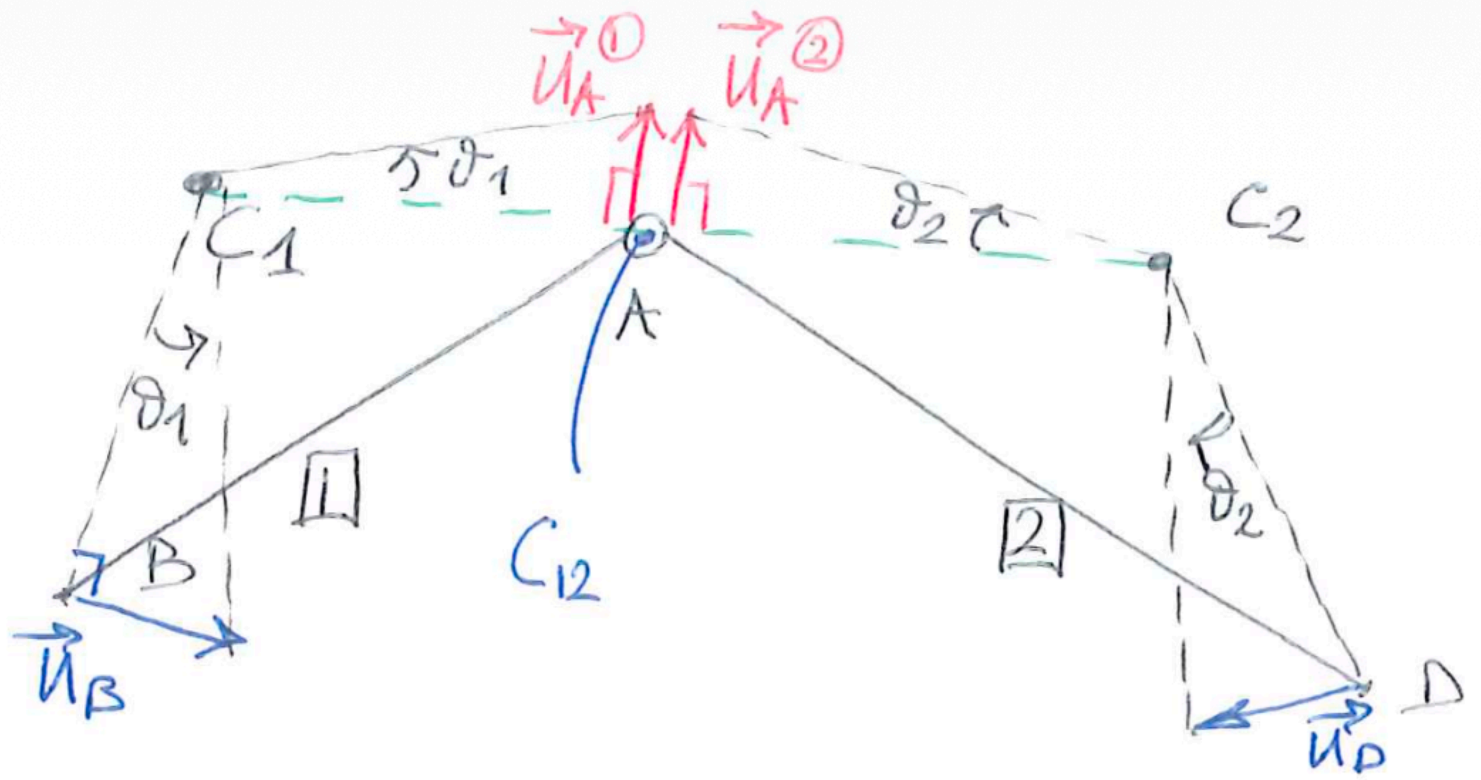
POICHÉ LA RETTA IMPROPRIA È COSTITUITA DI SOLI PUNTI IMPROPRI; MENTRE OGNI ALTRA RETTA È DOTATA DI UN SOLO PUNTO IMPROPRIO (CORRISPONDENTE AL PUNTO IN CUI TUTTE LE RETTE PARALLELE A QUELLA DATA SI INTERSECANO), NE SEGUE CHE $C_{12} \equiv C_\infty$ RELATIVO ALLA RETTA r_B.

LO STUDIO DELLA CINEMATICA DI 2 CORPI RIGIDI MUTUAMENTE VINCOLATI COINVOLGE 3 CENTRI DI ISTANTANEA ROTAZIONE:

- I DUE C.I.R. <u>ASSOLUTI</u> DEI 2 CORPI, C_1 (QUELLO RISPETTO AL QUALE RUOTA IL CORPO ①) E C_2 (QUELLO RISPETTO AL QUALE RUOTA IL CORPO ②)
- IL C.I.R. RELATIVO, C_{12}, APPENA DEFINITO, (QUELLO RISPETTO AL QUALE RUOTA IL CORPO ① [O IL CORPO ②] SE SI MANTIENE FISSO E BLOCCATO IL CORPO ② [O IL CORPO ①].

VALE LA SEGUENTE PROPRIETA' (1° TEOREMA DEI CENTRI DI ROTAZIONE): <u>CONDIZIONE NECESSARIA</u> AFFINCHE' AVVENGA UN MOTO RELATIVO FRA 2 CORPI RIGIDI E' CHE I CENTRI ASSOLUTI E QUELLO

RELATIVO SIANO ALLINEATI: $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$.



SI CONSIDERI LA SITUAZIONE INDICATA IN FIGURA: I 2 CORPI RIGIDI $\boxed{1}$ E $\boxed{2}$ SONO VINCOLATI MEDIANTE LA CERNIERA INTERNA A, $\equiv C_{12}$.

QUESTA IMPONE CHE SIA:

$$\vec{u}_A^{(1)} = \vec{u}_A^{(2)}$$

CIOÈ CHE NEL PUNTO A LO SPOSTAMENTO DEL CORPO $\boxed{1}$ SIA VETTORIALMENTE (OVVERO IN MODULO, DIREZIONE E VERSO) EGUALE A QUELLO DEL CORPO $\boxed{2}$.

AMMESSO DI CONOSCERE IL CENTRO DI ROTAZIONE ASSOLUTO DEL CORPO $\boxed{1}$, C_1, SI HA CHE

$$\vec{u}_A^{(1)} = \vec{\omega}^{(1)} \wedge (\overrightarrow{A-C_1}) \quad [8]$$

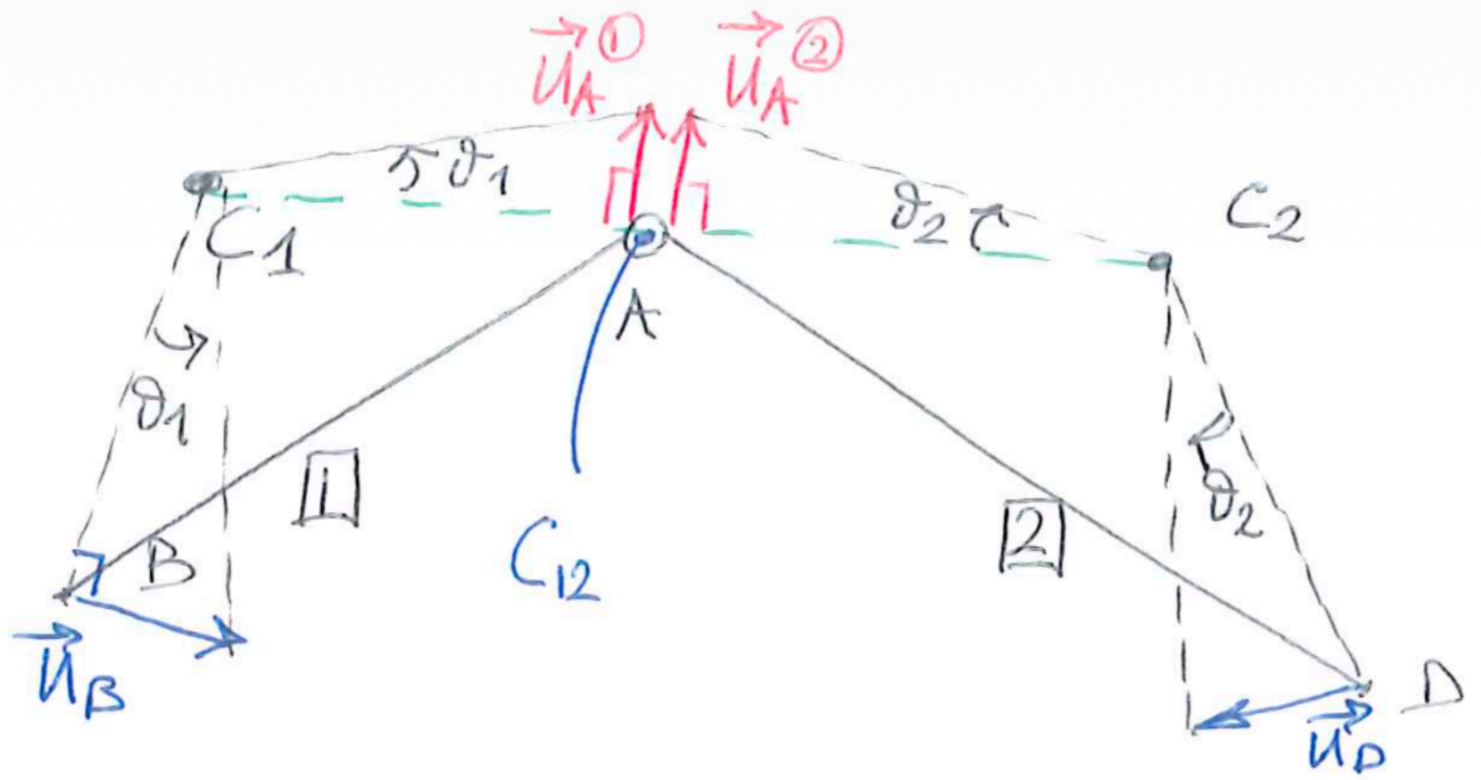
DOVE $\vec{\omega}^{(1)}$ È IL VETTORE ROTAZIONE DEL CORPO 1: $\vec{\omega}^{(1)} = \vartheta_1 \vec{k}$.

DALLA [8] SEGUE ALLORA CHE $\vec{u}_A^{(1)}$ È $\perp$ AL VETTORE $(\overrightarrow{A-C_1})$.

MA POICHÉ $\vec{u}_A^{(2)}$ DEVE ESSERE EGUALE A $\vec{u}_A^{(1)}$ E D'ALTRA PARTE

$$\vec{u}_A^{(2)} = \vec{\omega}^{(2)} \wedge (\overrightarrow{A-C_2}) \quad [8'] \quad , \quad \vec{\omega}^{(2)} = \vartheta_2 \vec{k}.$$

NE SEGUE CHE $\vec{u}_A^{(2)}$ È $\perp$ AL VETTORE $(\overrightarrow{A-C_2})$ E QUINDI QUEST'ULTIMO DEVE ESSERE ALLINEATO CON $(\overrightarrow{A-C_1})$.



$C_1 \leftrightarrow A \equiv C_{12} \leftrightarrow C_2$.

SI CONSIDERI LA SITUAZIONE INDICATA IN FIGURA: I 2 CORPI RIGIDI [1] E [2] SONO VINCOLATI MEDIANTE LA CERNIERA INTERNA A, $\equiv C_{12}$.

QUESTA IMPONE CHE SIA:

$$\vec{u}_A^{(1)} = \vec{u}_A^{(2)}$$

CIOÈ CHE NEL PUNTO A LO SPOSTAMENTO DEL CORPO [1] SIA VETTORIALMENTE (OVVERO IN MODULO, DIREZIONE E VERSO) EGUALE A QUELLO DEL CORPO [2].

AMMESSO DI CONOSCERE IL CENTRO DI ROTAZIONE ASSOLUTO DEL CORPO [1], C_1, SI HA CHE

$$\vec{u}_A^{(1)} = \vec{\omega}^{(1)} \wedge (\overrightarrow{A-C_1}) \quad [8]$$

DOVE $\vec{\omega}^{(1)}$ È IL VETTORE ROTAZIONE DEL CORPO 1: $\vec{\omega}^{(1)} = \theta_1 \vec{k}$.

DALLA [8] SEGUE ALLORA CHE $\vec{u}_A^{(1)}$ È $\perp$ AL VETTORE $(\overrightarrow{A-C_1})$.

MA POICHÉ $\vec{u}_A^{(2)}$ DEVE ESSERE EGUALE A $\vec{u}_A^{(1)}$ E D'ALTRA PARTE

$$\vec{u}_A^{(2)} = \vec{\omega}^{(2)} \wedge (\overrightarrow{A-C_2}) \quad [8'] \quad , \quad \vec{\omega}^{(2)} = \theta_2 \vec{k}.$$

NE SEGUE CHE $\vec{u}_A^{(2)}$ È $\perp$ AL VETTORE $(\overrightarrow{A-C_2})$ E QUINDI QUEST'ULTIMO DEVE ESSERE ALLINEATO CON $(\overrightarrow{A-C_1})$.

SI SUPPONGA ORA DI CONOSCERE LA POSIZIONE DI C_1 E DI C_2 E LA ROTAZIONE ϑ_1 CHE IL CORPO $\boxed{1}$ SUBISCE ATTORNO A C_1. SI VUOLE DETERMINARE LA ROTAZIONE CHE IL CORPO $\boxed{2}$ SUBISCE ATTORNO A C_2, ϑ_2.

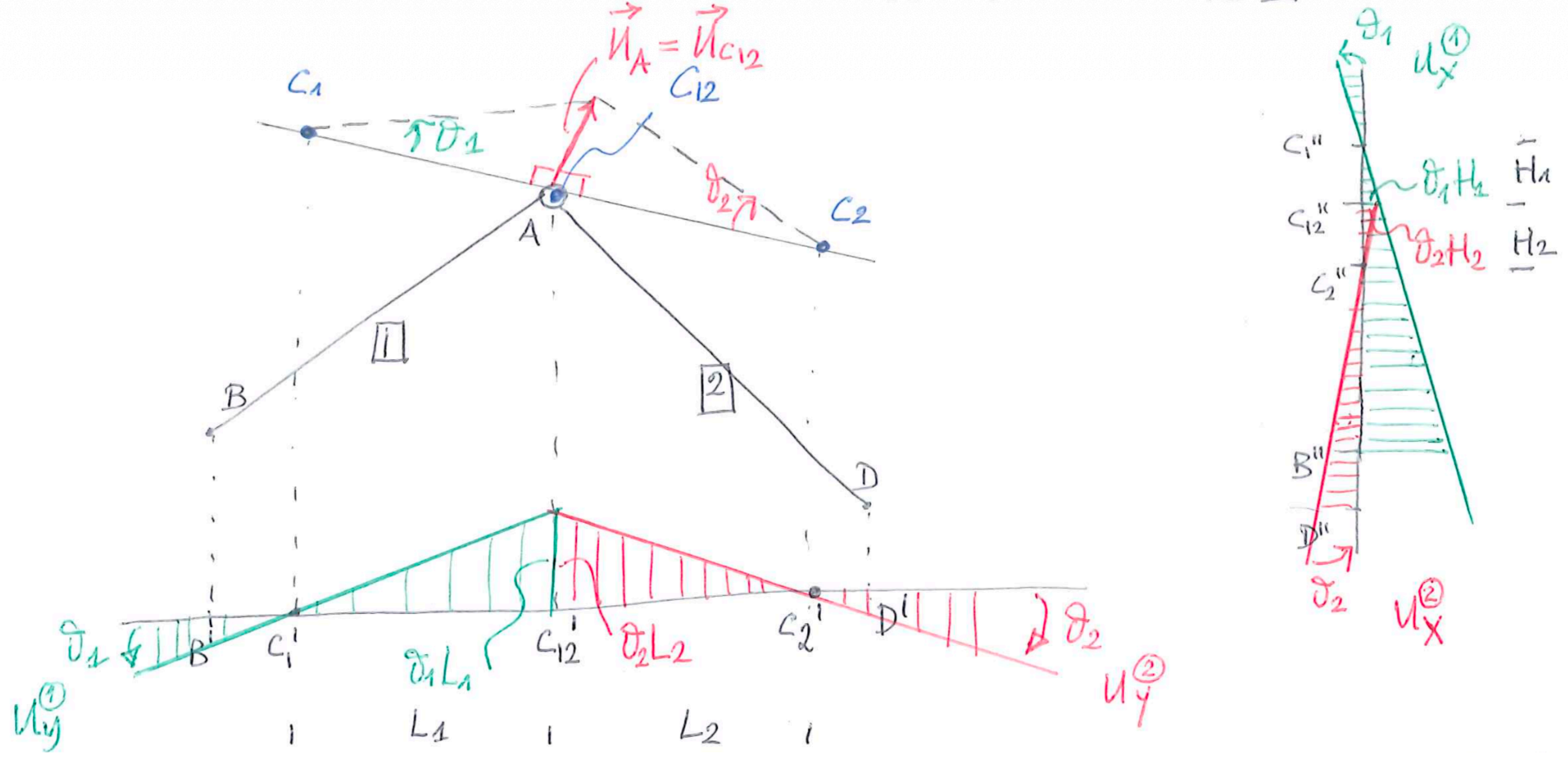
LA DETERMINAZIONE DI C_{12} PERMETTE DI RISOLVERE IL PROBLEMA; OCCORRE PERÒ DISTINGUERE I DUE CASI SEGUENTI:

I) IL PUNTO C_{12} È UN PUNTO PROPRIO

II) IL PUNTO C_{12} È UN PUNTO IMPROPRIO.

SI PROCEDE ALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA PER CIASCUNO DEI 2 CASI.

I) C_{12} È UN PUNTO PROPRIO: LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO C_{12} DEVE ALLORA ESSERE COMUNE AL CAMPO DI SPOSTAMENTO DEL CORPO $\boxed{1}$ E DEL CORPO $\boxed{2}$.

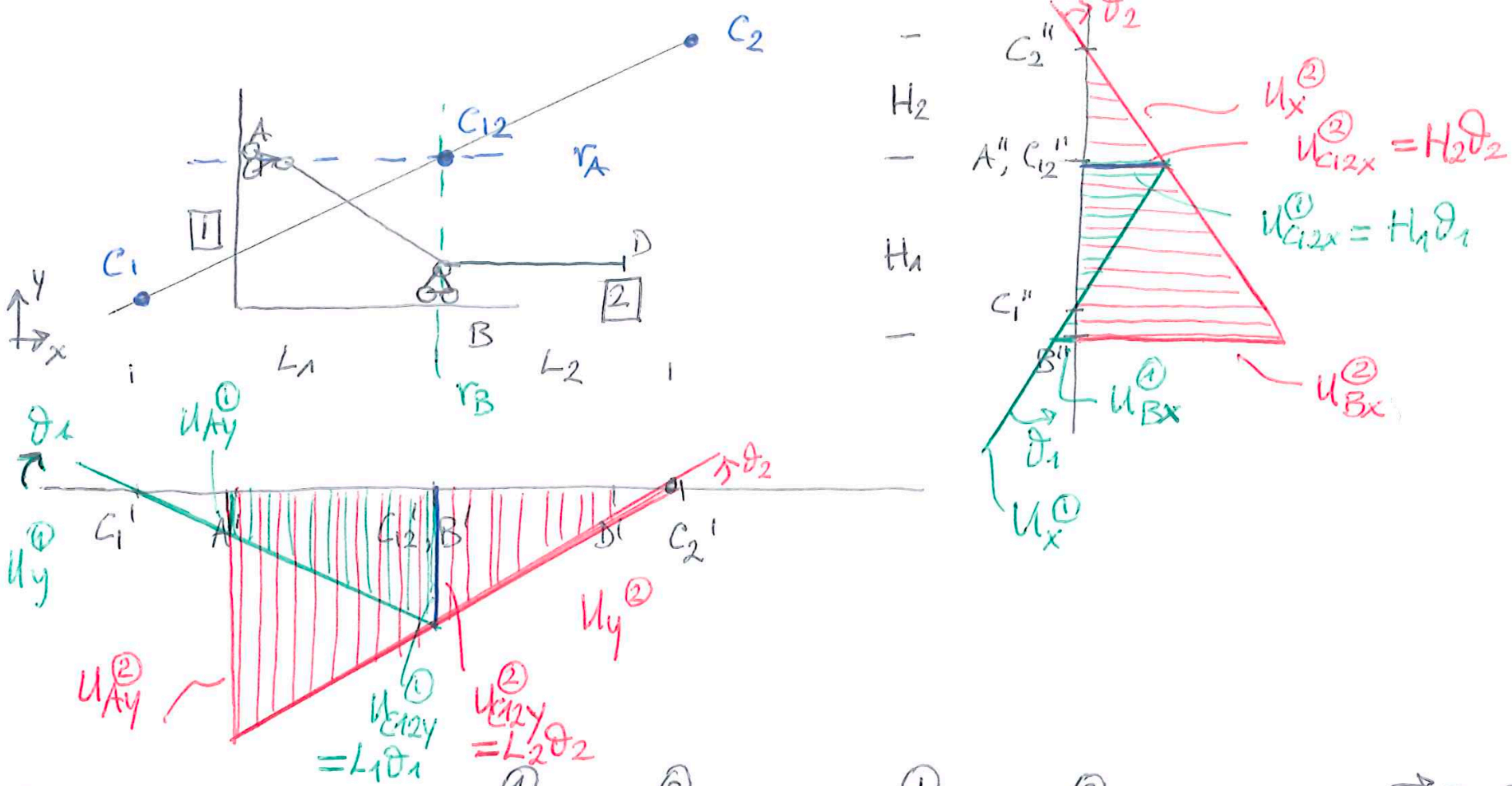


$u^{(1)}_{C_{12}y} = \vartheta_1 \cdot L_1$ [o]

$u^{(2)}_{C_{12}y} = \vartheta_2 \cdot L_2$ [oo]

$\vartheta_1 \cdot L_1 = \vartheta_2 \cdot L_2 \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 \dfrac{L_1}{L_2}$ [x]

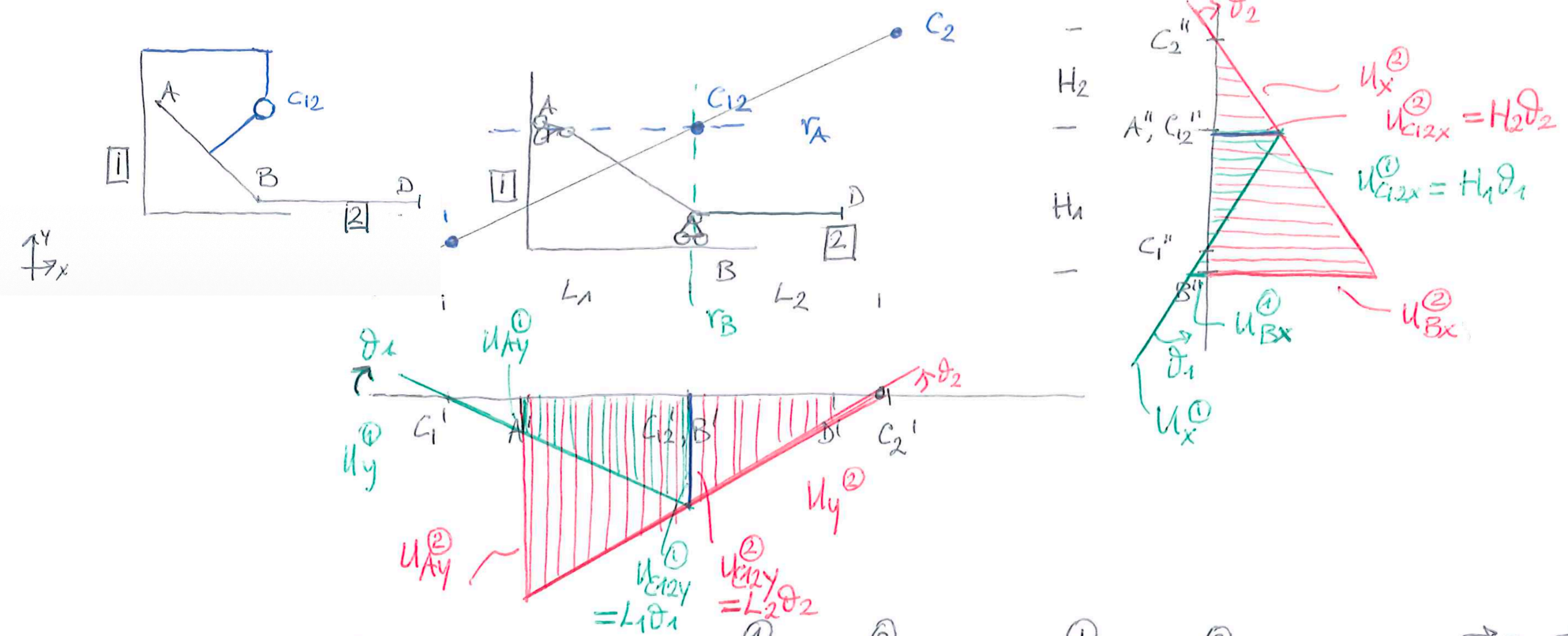
NOTA 6 — SI OSSERVI CHE IL CENTRO RELATIVO C_{12} POTREBBE ESSERE UN PUNTO ESTERNO AI DUE CORPI RIGIDI, COME È EVIDENTE NELL'ESEMPIO SEGUENTE:



SI NOTI CHE RISULTA $u^{(1)}_{C_{12y}} = u^{(2)}_{C_{12y}}$ E $u^{(1)}_{C_{12x}} = u^{(2)}_{C_{12x}}$ E DUNQUE $\vec{u}^{(1)}_{C_{12}} = \vec{u}^{(2)}_{C_{12}}$

ANCHE SE IL PUNTO C_{12} NON APPARTIENE FISICAMENTE A NESSUNO DEI 2 CORPI.

NOTA 6 SI OSSERVI CHE IL CENTRO RELATIVO C_{12} POTREBBE ESSERE UN PUNTO ESTERNO AI DUE CORPI RIGIDI, COME È EVIDENTE NELL'ESEMPIO SEGUENTE:

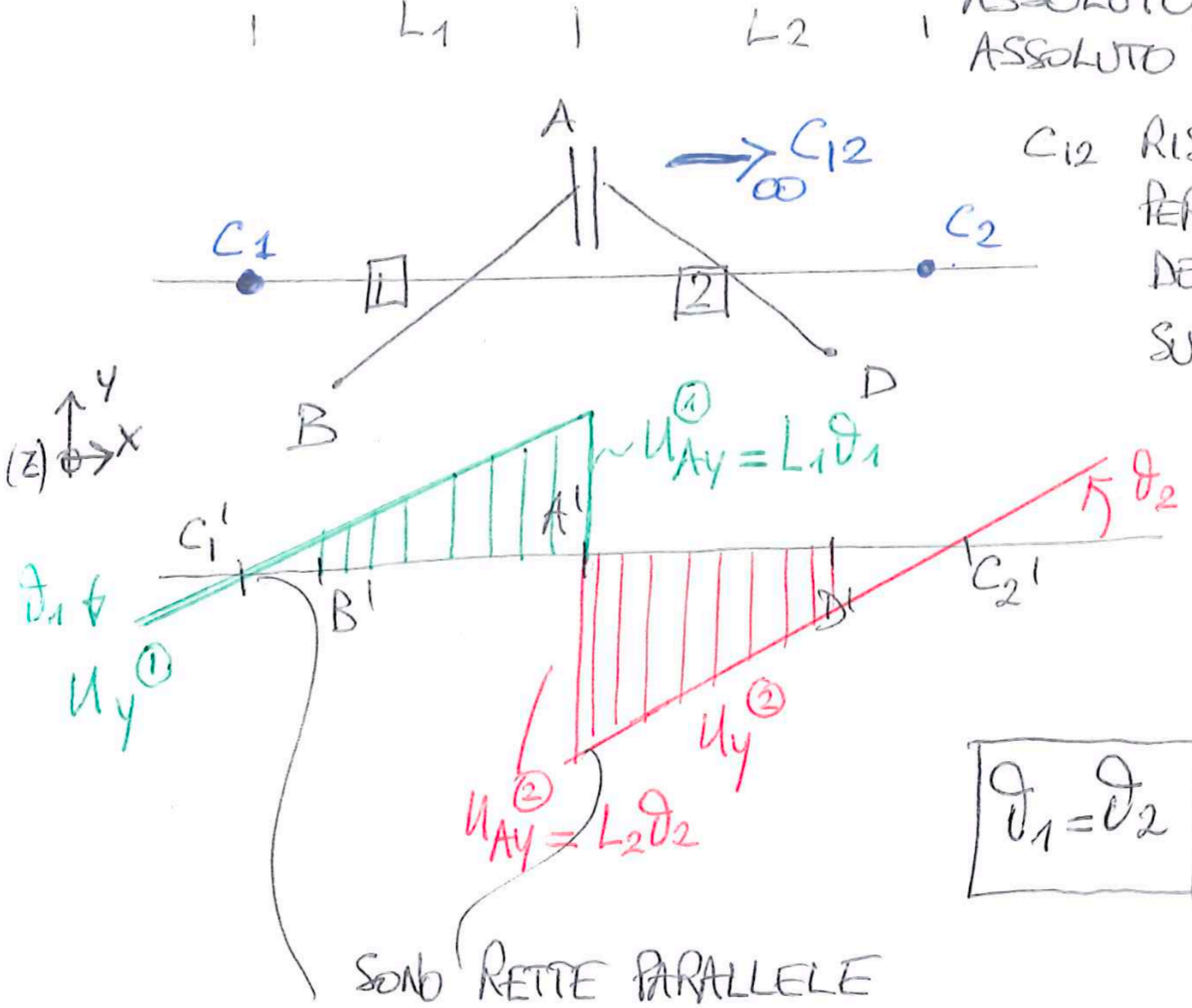


SI NOTI CHE RISULTA $u_{C_{12}y}^{(1)} = u_{C_{12}y}^{(2)}$ E $u_{C_{12}x}^{(1)} = u_{C_{12}x}^{(2)}$ E DUNQUE $\vec{u}_{C_{12}}^{(1)} = \vec{u}_{C_{12}}^{(2)}$

ANCHE SE IL PUNTO C_{12} NON APPARTIENE FISICAMENTE A NESSUNO DEI 2 CORPI.

II) C_{12} È UN PUNTO IMPROPRIO:

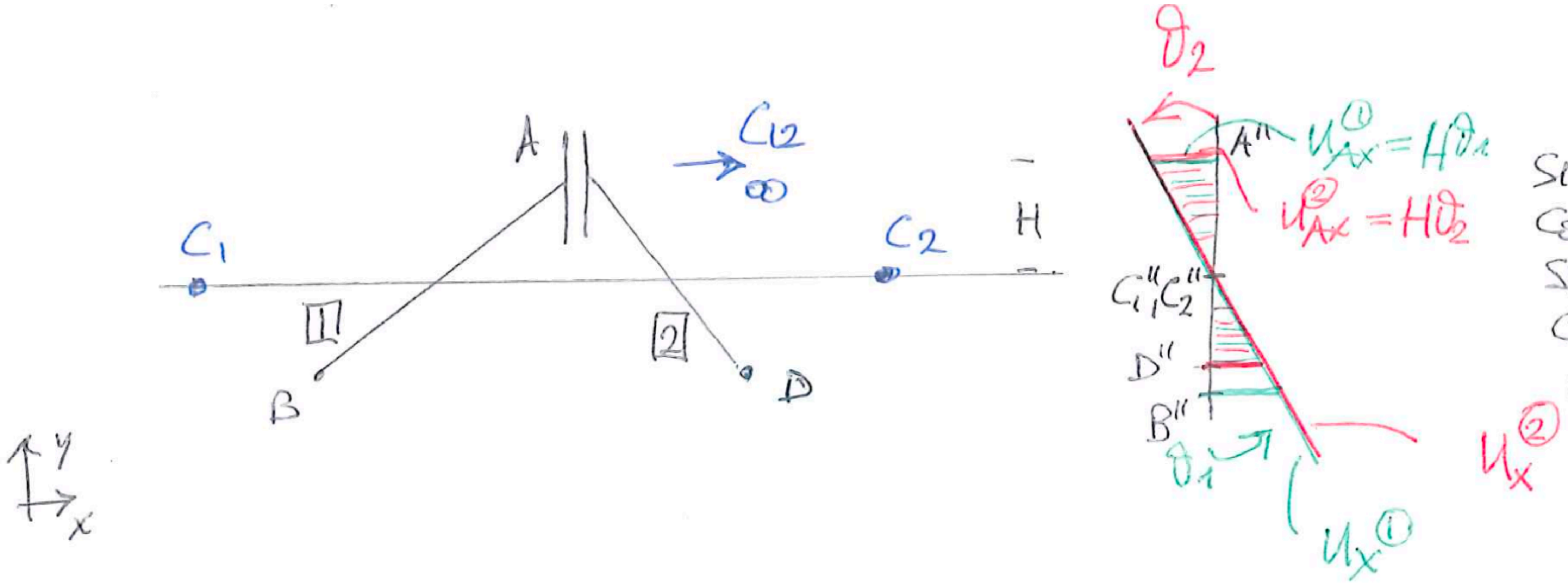
IN QUESTO CASO I DUE CORPI RIGIDI DEBBONO RUOTARE, CIASCUNO ATTORNO AL PROPRIO CENTRO ASSOLUTO, DI ANGOLI EGUALI: $\vartheta_1 = \vartheta_2$ (IN VALORE ASSOLUTO E IN SEGNO, CIOÈ IN VERSO DI ROTAZIONE) 20



C_{12} RISULTA IL PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA PERPENDICOLARE AL PIANO DI SCORRIMENTO DEL PATTINO; C_1 E C_2 SONO ALLINEATI SU UNA RETTA PARALLELA A QUESTA.

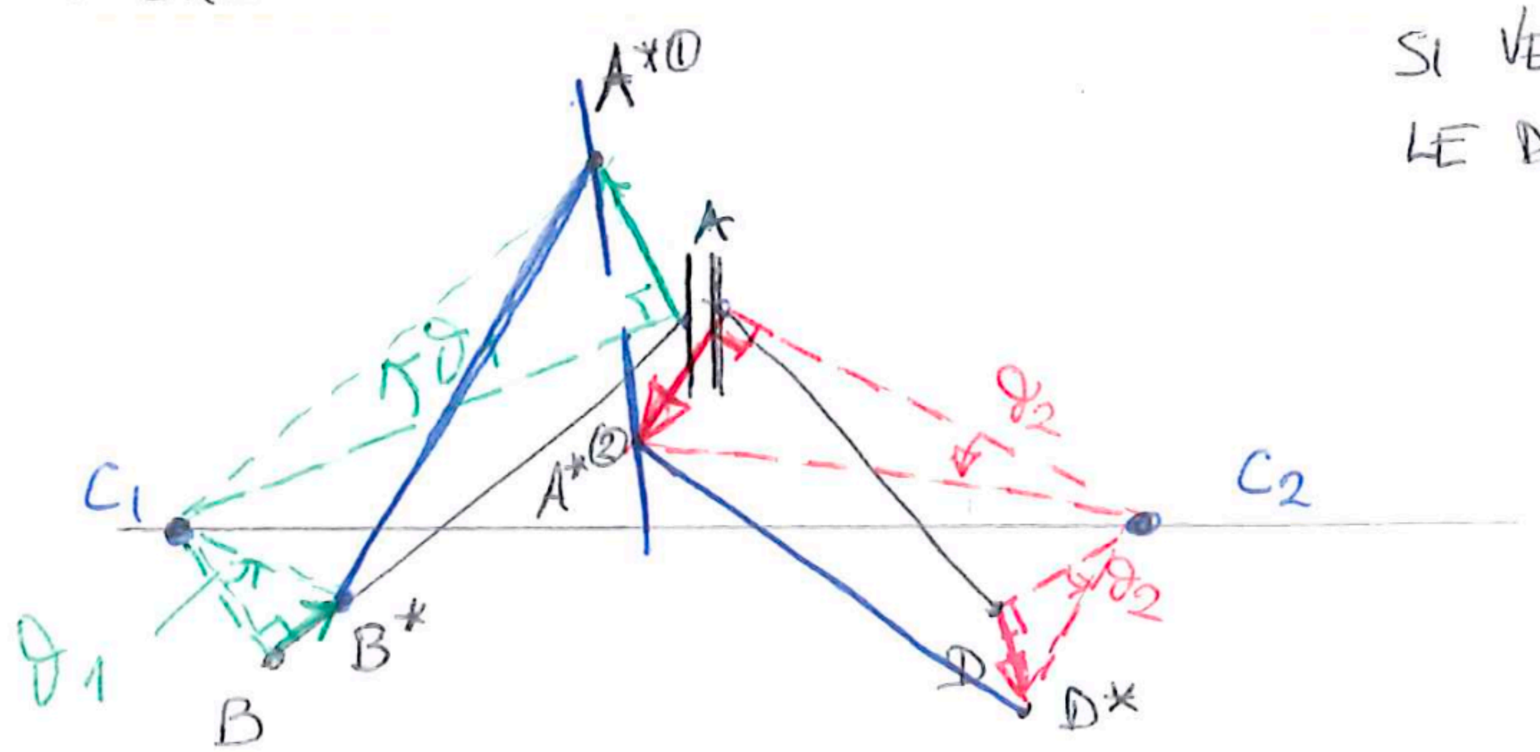
$$\boxed{\vartheta_1 = \vartheta_2}$$

SI OSSERVI CHE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u_y SONO RAPPRESENTATE PER LE 2 TRAVI DA 2 RETTE PARALLELE (DI EGUALE PENDENZA);
È ANCHE EVIDENTE CHE LE DUE "FACCE" DEL PATTINO SCORRONO UNA RISPETTO ALL'ALTRA, MA IN MODO TALE DA CONSERVARSI PARALLELE.



SI NOTI CHE LE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO u_x COINCIDONO PER LE DUE TRAVI, A DIFFERENZA DELLE COMPONENTI u_y.

LA CORRISPONDENTE SPOSTATA RIGIDA PUÒ ESSERE RICOSTRUITA CON LE CONSUETE TECNICHE:



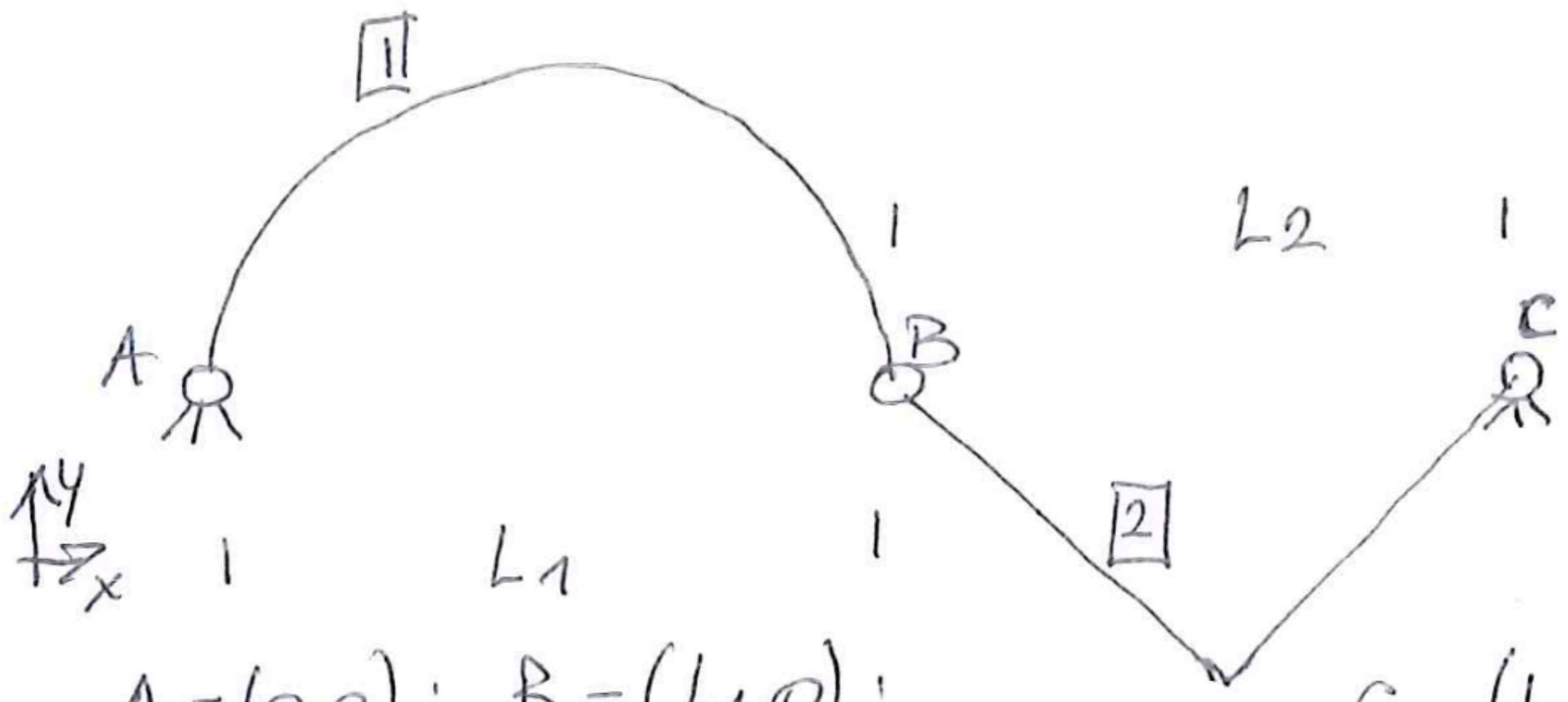
SI VERIFICA CHE IL PATTINO "SCORRE", MA LE DUE "FACCE" SI MANTENGONO PARALLELE.

IN SINTESI SI È VISTO QUANTO SEGUE:

- I VINCOLI <u>INTERNI</u> INDIVIDUANO, SE ESISTE IL CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE <u>RELATIVA</u> FRA DUE CORPI
- I VINCOLI <u>ESTERNI</u> PERMETTONO DI DETERMINARE, SE ESISTE IL C.I.R ASSOLUTO DEL CORPO AL QUALE SONO APPLICATI.

PROBLEMA CINEMATICO PER UNA STRUTTURA COMPOSTA DA 2 CORPI RIGIDI ARTICOLATI.

SI CONSIDERA DAPPRIMA LA FORMULAZIONE ANALITICA.



$A = (0,0)$; $B = (L_1, 0)$; $C = (L_1 + L_2, 0)$

SI ASSUMONO COME VARIABILI CINEMATICHE

- PER IL CORPO ①: $u_{Ax}, u_{Ay}, \vartheta_1$
- PER IL CORPO ②: $u_{Cx}, u_{Cy}, \vartheta_2$

QUESTE SONO LE INCOGNITE DEL PROBLEMA CINEMATICO: $M = 2$, SICCHÉ $3M = 6$.

SI OSSERVI CHE $\vec{\omega}^{(1)} = \vartheta_1 \vec{k}$

$\vec{\omega}^{(2)} = \vartheta_2 \vec{k}$

LE CONDIZIONI DI VINCOLO IMPOSTE DAI VINCOLI ESTERNI FORNISCONO:

PUNTO Ⓐ (CORPO $\boxed{1}$): $\begin{cases} u_{Ax} = 0 \\ u_{Ay} = 0 \end{cases}$

PUNTO Ⓒ (CORPO $\boxed{2}$): $\begin{cases} u_{Cx} = 0 \\ u_{Cy} = 0 \end{cases}$

LE CONDIZIONI DI VINCOLO IMPOSTE DAL VINCOLO INTERNO FORNISCONO:

PUNTO Ⓑ (COMUNE A CORPO $\boxed{1}$ E CORPO $\boxed{2}$): $\begin{cases} u_{Bx}^{(1)} = u_{Bx}^{(2)} \\ u_{By}^{(1)} = u_{By}^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{Bx}^{(1)} - u_{Bx}^{(2)} = 0 \\ u_{By}^{(1)} - u_{By}^{(2)} = 0 \end{cases}$

DALL'EQUAZIONE DELLA ROTO-TRASLAZIONE SI OTTIENE:

$$\vec{u}_B^{(1)} = \vec{u}_A^{(1)} + \vec{\omega}^{(1)} \wedge (\vec{B-A}) \Rightarrow \begin{cases} u_{Bx}^{(1)} = u_{Ax} - \vartheta_1 (y_B - y_A) \Rightarrow u_{Bx}^{(1)} = u_{Ax} \\ u_{By}^{(1)} = u_{Ay} + \vartheta_1 (x_B - x_A) \Rightarrow u_{By}^{(1)} = u_{Ay} + \vartheta L_1 \end{cases}$$

$$\vec{u}_B^{(2)} = \vec{u}_C^{(2)} + \vec{\omega}^{(2)} \wedge (\vec{B-C}) \Rightarrow \begin{cases} u_{Bx}^{(2)} = u_{Cx} - \vartheta_2 (y_B - y_C) \Rightarrow u_{Bx}^{(2)} = u_{Cx} \\ u_{By}^{(2)} = u_{Cy} + \vartheta_2 (x_B - x_C) \Rightarrow u_{By}^{(2)} = u_{Cy} - \vartheta_2 L_2 \end{cases}$$

SI OTTIENE COSÌ IL SISTEMA DI EQUAZIONI:

$$\begin{cases} u_{Ax} = 0 \\ u_{Ay} = 0 \\ u_{Ax} - u_{Cx} = 0 \\ u_{Ay} - u_{Cy} + \vartheta_1 L_1 + \vartheta_2 L_2 = 0 \\ u_{Cx} = 0 \\ u_{Cy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ \\ (III) \\ \\ (V) \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_1 & 0 & -1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[C]_{6,6}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{Ax} \\ u_{Ay} \\ \vartheta_1 \\ u_{Cx} \\ u_{Cy} \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}}_{\{\underline{v}\}_{6,1}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\{\underline{0}\}_{6,1}}$$

NB: $(III) = (I) - (V)$!

PER QUANTO GIÀ VISTO IN PRECEDENZA SI POSSONO TRARRE LE SEGUENTI CONCLUSIONI:

SE RANGO$([C]) = 6$ LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE DETERMINATA (NON LABILE)

SE RANGO$([C]) < 6$ LA STRUTTURA È GEOMETRICAMENTE INDETERMINATA (LABILE)

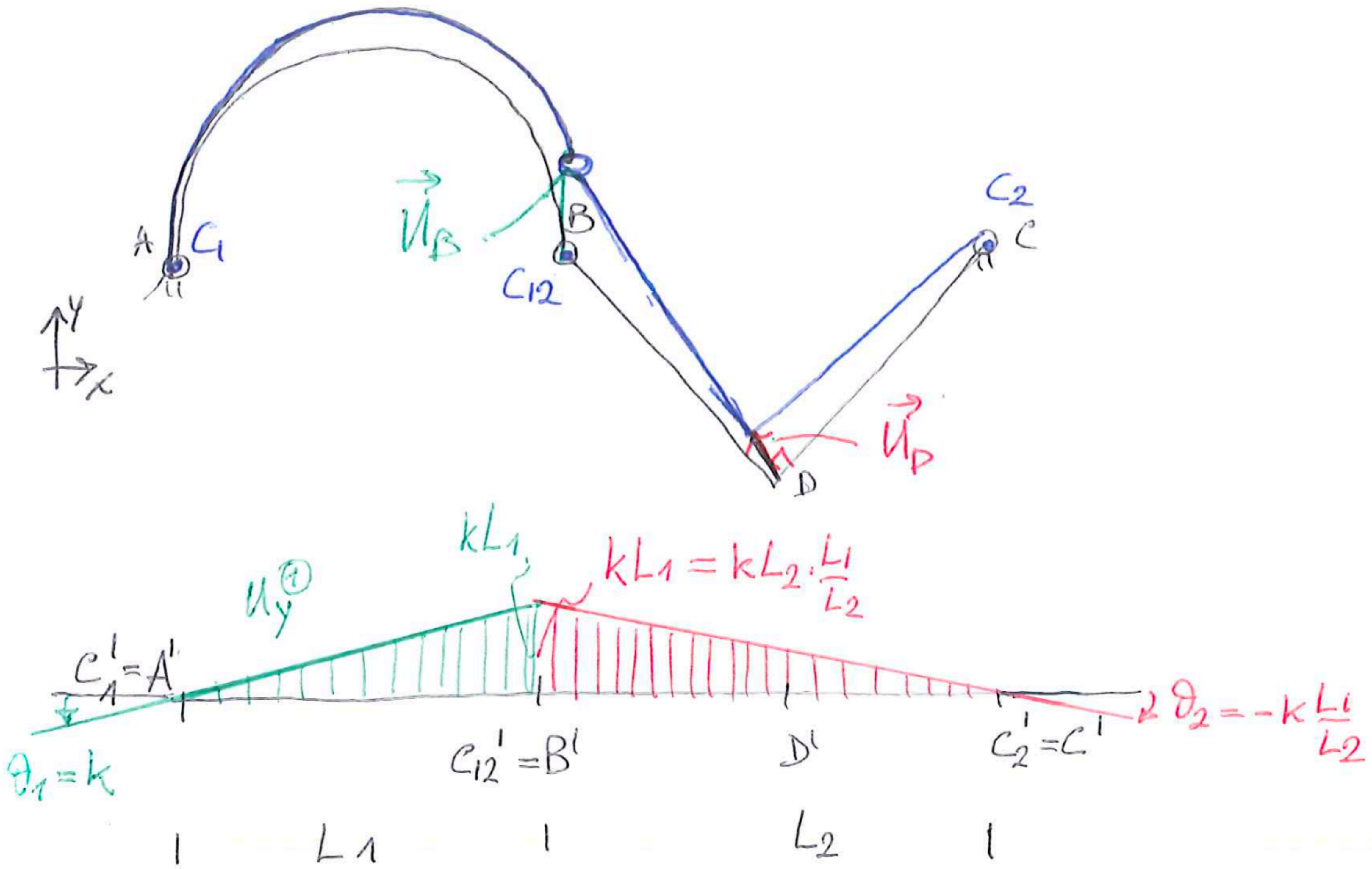
LA SOLUZIONE NON BANALE $\{v\} \neq \{0\}$ SI PUÒ OTTENERE SCARTANDO LA TERZA EQUAZIONE, OTTENIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE DELLA PRIMA E DELLA QUINTA.

NE SEGUE: $u_{Ax}=0$; $u_{Ay}=0$; $u_{Cx}=0$; $u_{Cy}=0$; $\vartheta_1 L_1 + \vartheta_2 L_2 = 0$

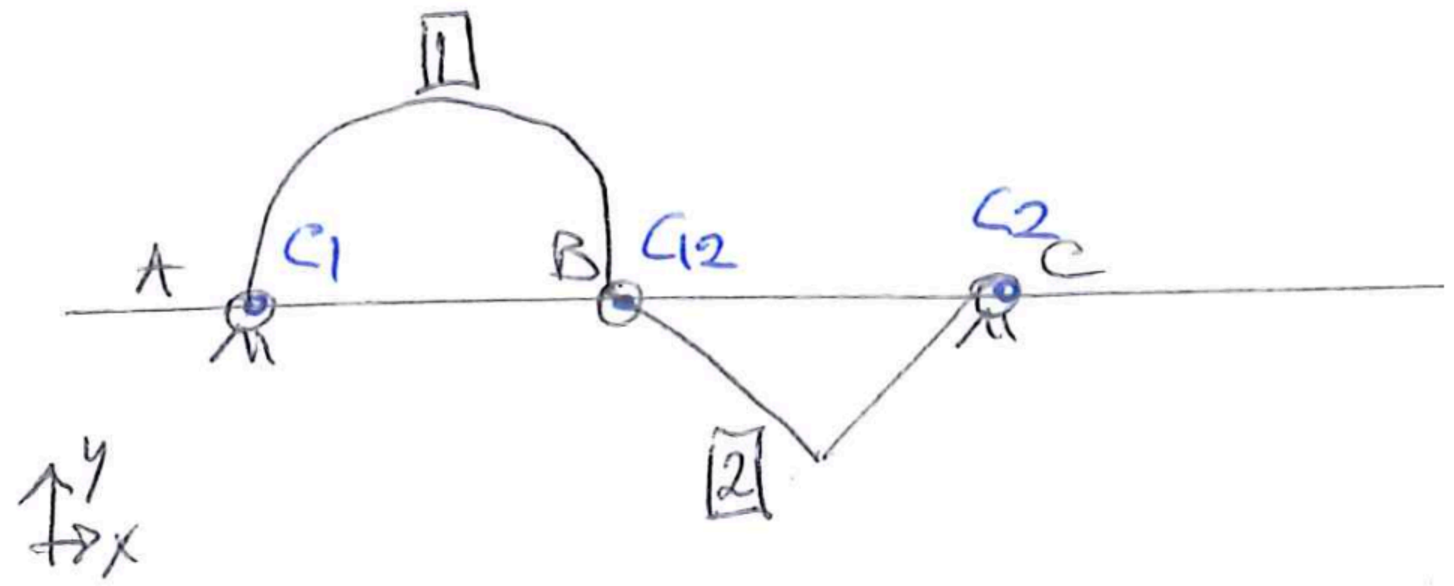
DA CUI SI OTTIENE, PONENDO $\vartheta_1 = k$ $\quad \vartheta_2 = -k\frac{L_1}{L_2}$.

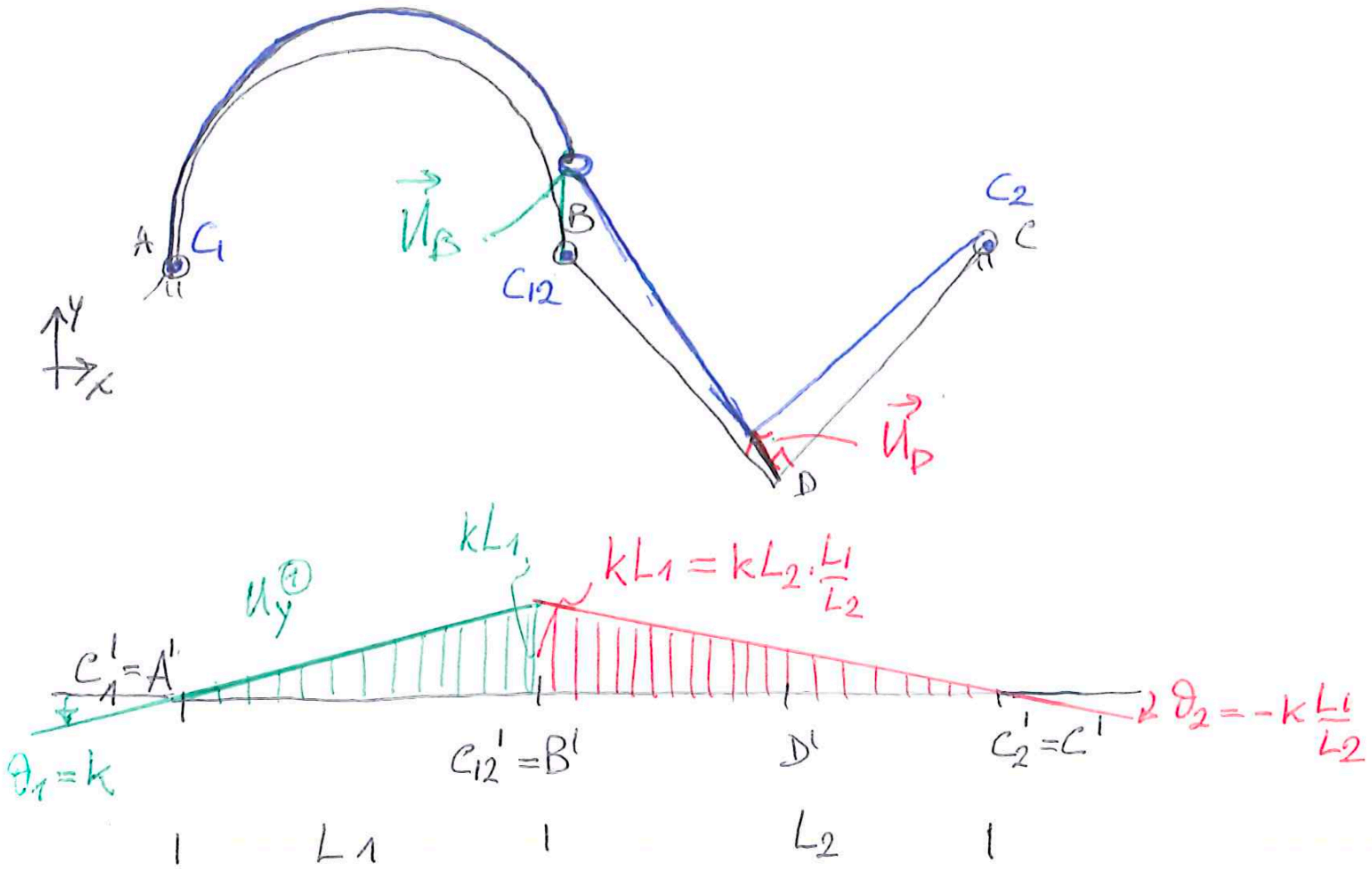
· LA SPOSTATA RIGIDA È DI IMMEDIATO TRACCIAMENTO, SE SI RICONOSCE CHE, ESSENDO $C_{12} \equiv$ B LA CONDIZIONE $\vec{u}_{C_{12}}^{(1)} = \vec{u}_{C_{12}}^{(2)}$, OVVERO:

$u_{Bx}^{(1)} = u_{Bx}^{(2)} = 0$; $\quad u_{By}^{(1)} = \vartheta_1 L_1 = kL_1$; $\quad u_{By}^{(2)} = -\vartheta_2 L_2 = -\left(-k\frac{L_1}{L_2}\right)L_2 = +kL_1$.

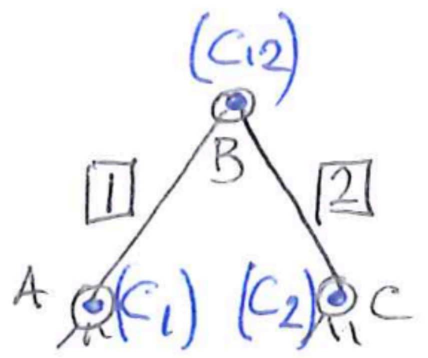


PER LA STRUTTURA IN ESAME SI POTEVA PERVENIRE AD ACCERTARE LA LABILITÀ ANCHE CON IL METODO GRAFICO: STANTE IL FATTO CHE I 3 CENTRI C_1, C_{12}, C_2 RISULTANO ALLINEATI, $C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2$, SI CONCLUDE, PER IL I TEOREMA DEI CENTRI RELATIVI CHE ESISTE UN MOTO RIGIDO CHE COINVOLGE I CORPI $\boxed{1}$ E $\boxed{2}$: CONSEGUENTEMENTE LA STRUTTURA È LABILE.

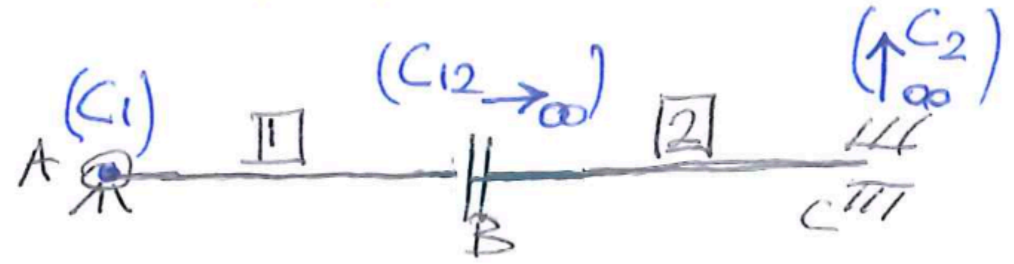




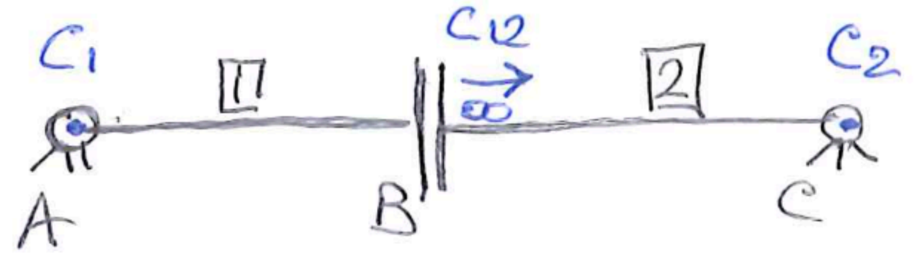
STRUTTURE ISOSTATICHE COSTITUITE DA 2 CORPI RIGIDI



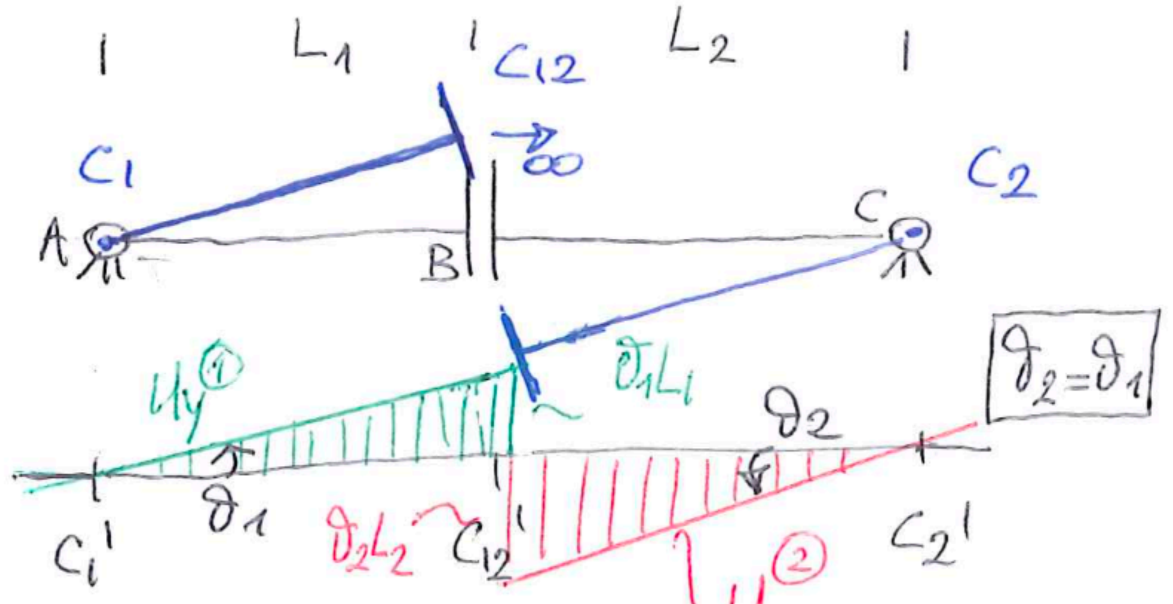
I TRE CENTRI C_1, C_{12}, C_2 NON SONO ALLINEATI: NON SONO POSSIBILI MOTI RIGIDI → LA STRUTTURA È NON LABILE



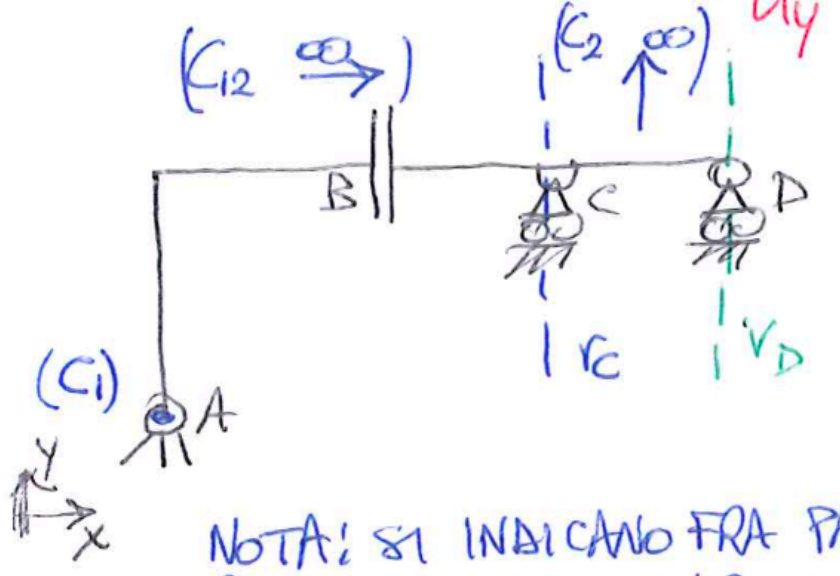
DI NUOVO I 3 CENTRI (2 DEI QUALI IMPROPRI) NON SONO ALLINEATI: LA STRUTTURA È NON LABILE.



IN QUESTO CASO C_1, C_{12} E C_2 SONO ALLINEATI (C_{12} È IL PUNTO IMPROPRIO DELLA RETTA ORIZZONTALE CHE UNISCE C_1 E C_2): LA STRUTTURA È LABILE.



IN BASE A QUANTO VISTO QUANDO C_{12} È PUNTO IMPROPRIO SI VERIFICA CHE LA "SPOSTATA RIGIDA" È QUELLA RIPORTATA A FIANCO.
LE DUE FACCE DEL PATTINO SCORRONO UNA RISPETTO ALL'ALTRA MA SI MANTENGONO SEMPRE PARALLELE



IN QUESTO ULTIMO CASO, PER IL VINCOLO IN (A) SI TROVA IMMEDIATAMENTE $C_1 \equiv A$; PER IL VINCOLO INTERNO IN (B) $C_{12} \to \infty$ (IN DIREZIONE ORIZZONTALE, CIOÈ $\perp$ AL PIANO DI SCORRIMENTO); I DUE VINCOLI SEMPLICI IN (C) E (D) RICHIEDONO CHE $C_2 \in r_C$ E $C_2 \in r_D$: NE SEGUE, ESSENDO r_C E r_D RETTE PARALLELE VERTICALI CHE $C_2 \uparrow \infty$.

NOTA: SI INDICANO FRA PARENTESI LE POSIZIONI DEI CENTRI QUANDO QUESTI NON DANNO LUOGO A MOTO RIGIDO.

POICHÉ I TRE CENTRI C_1, C_{12} E C_2 NON SONO ALLINEATI LA STRUTTURA È NON LABILE E NESSUN MOTO RIGIDO È POSSIBILE.

> Indicazioni bibliografiche

A | Per i **contenuti del corso**:

A-1. M. Capurso, Lezioni di scienza delle costruzioni, Pitagora: Bologna, 1971. (Argomenti 1,4-10)

A-2. D. Bigoni, et al. , Geometria delle masse, Progetto Leonardo: Bologna, 1995. (Argomento 3)

A-3. E. Guagenti et al., Statica – Fondamenti di meccanica strutturale, McGraw-Hill: Milano, 2005. (Argomenti 0-2)

> altre Informazioni

Appunti per alcuni approfondimenti, esercizi di autovalutazione e l'intera collezione dei temi d'esame risolti sono resi disponibili (in formato PDF) sul sito web dei docenti:

> Pagina docente prof. Reccia
> Pagina docente prof. Cazzani