

Analisi Matematica

Monica Marras - Università di Cagliari

mmarras@unica.it

1 Successioni numeriche

- limite di successione
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1, \quad b \in \mathbb{R}$
- Definizione del numero di Nepero e
- Progressione geometrica
- Successioni definite per ricorrenza
- Successioni estratte
- Teorema di Bolzano Weierstrass
- Successione di Cauchy (fondamentale)
- Criterio di convergenza di Cauchy.
- Limite inferiore e limite superiore di una successione.

2 Serie numeriche

- Serie geometrica
- Serie telescopica
- Criterio di Cauchy
- Serie armonica
- Condizione necessaria di convergenza
- Serie numeriche a termini non negativi, criteri sufficienti di convergenza: criterio del confronto
- Criterio del confronto asintotico
- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Criterio di condensazione
- Serie a termini di segno variabile
- Criterio di Leibniz

Successioni numeriche

Definizione Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una funzione che ad ogni numero naturale n associa un numero reale a_n

$$\{a_n\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$0 \rightarrow a_0$$

$$1 \rightarrow a_1$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$n \rightarrow a_n$$

Esempi

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{n-1}{n} \right\} : 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots;$$

$$\{a_n\} = \{(-1)^n\} : 1, -1, 1, \dots$$

Per quanto riguarda l'operazione di limite, essendo $+\infty$ l'unico punto di accumulazione di \mathbb{N} , si hanno solo i seguenti casi:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, (allora si dice che a_n **convergente** o converge ad a)
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$, (allora si dice che a_n è **divergente**)
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \#$, (allora si dice che a_n è **irregolare o indeterminata**)

Definizione (successione convergente)

Un numero reale a è il limite della successione $\{a_n\}$ (si dice anche che a_n converge ad a) e si indica con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{oppure} \quad a_n \rightarrow a$$

se, per qualunque $\epsilon > 0$, $\exists \nu_\epsilon : |a_n - a| < \epsilon, \forall n > \nu_\epsilon$

Esempio. Utilizzando la definizione, dimostriamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ Infatti } \forall \epsilon > 0 \text{ risulta } \frac{1}{n} < \epsilon \text{ per } n > \frac{1}{\epsilon}$$

In modo analogo si definisce la successione divergente

Definizione (successione divergente)

La successione $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ se per qualunque $k > 0$, $\exists \nu_k : a_n > k, \forall n > \nu_k$

e

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ se per qualunque $k > 0$, $\exists \nu_k : a_n < -k, \forall n > \nu_k$

Teorema dell'unicità del limite. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ allora a è unico.

Teorema della permanenza del segno. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$, (o $a < 0$) allora $a_n > 0$ definitivamente (o $a_n < 0$).

"definitivamente" significa "per n abbastanza grande".

Esempio: la successione $n - 10\sqrt{n}$ è definitivamente positiva. Infatti è positiva per $n > 100$.

Teorema. Se $\{a_n\}$ è convergente, allora è limitata. Non è vero il viceversa.

Una successione $\{a_n\}$ si dice **limitata** se $\exists M : |a_n| \leq M$.

La successione $a_n = \sin n$ è limitata ma non ammette limite: $|\sin n| \leq 1$ ma $\lim_{n \rightarrow \infty} = \nexists$

Teorema del confronto (o dei due carabinieri). Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ tre successioni tali che definitivamente

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$

allora anche la successione b_n è convergente e si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$.

Se definitivamente $a_n \leq b_n$ e se $a_n \rightarrow +\infty$ allora anche $b_n \rightarrow +\infty$.

Se in modo analogo, definitivamente $b_n \leq c_n$ e $c_n \rightarrow -\infty$ allora anche $b_n \rightarrow -\infty$.

Successione monotona

La successione $\{a_n\}$ si definisce

- monotona **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- monotona **strettamente crescente** se $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- monotona **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- monotona **strettamente decrescente** se $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

Teorema (limite di successione monotona). *Una successione (definitivamente) crescente, ammette sempre il limite $a = \sup\{a_n\}$, tale limite è finito se a_n è limitata superiormente altrimenti $a = +\infty$.*

Analogamente, se la successione $\{b_n\}$ è (definitivamente) decrescente ammette il limite $b = \inf\{a_n\}$, se b_n è limitata inferiormente allora tale limite è finito altrimenti è $b = -\infty$.

Dimostrazione...

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$$

Esempi di limiti di successione.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$$

Infatti, se $a > 1$ possiamo scrivere $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, ($h_n > 0$). Elevando a n e utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli si ha $a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$ e quindi $0 < h_n \leq \frac{(a-1)}{n} \rightarrow 0$.

Se $a < 1$, si può scrivere $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ (con $b > 1$). Per il risultato precedente $\sqrt[n]{b} \rightarrow 1$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1, \quad b \in \mathbb{R}$$

Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1, \quad b \in \mathbb{R}.$

Consideriamo il caso $b = \frac{1}{2}$. Essendo $\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} > 1$ allora possiamo scrivere $\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} = 1 + b_n$ con $b_n > 0$.

Utilizzando la diseguaglianza di Bernoulli, si ha $\sqrt{n} = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$.
Ricavando b_n si ottiene $0 < b_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Abbiamo allora $1 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + nb_n = 1$ quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

Continua la dimostrazione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1, \quad b \in \mathbb{R}$

Sia ora $b \in \mathbb{Z}$, Utilizzando il risultato precedente si ha

$$\sqrt[n]{n^b} = \sqrt[n]{n^{\frac{2b}{2}}} = \left(\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}\right)^{2b} \rightarrow 1^{2b} = 1.$$

Infine, consideriamo $b \in \mathbb{R}$ e sia $[b]$ la parte intera di b . Si ha $[b] \leq b < [b] + 1$ e quindi $\sqrt[n]{n^{[b]}} \leq \sqrt[n]{n^b} < \sqrt[n]{n^{[b]+1}}$. Per il risultato precedente abbiamo che $\sqrt[n]{n^{[b]}} \rightarrow 1$ e $\sqrt[n]{n^{[b]+1}} \rightarrow 1$ quindi per il teorema dei due carabinieri si ha anche $\sqrt[n]{n^b} \rightarrow 1, \forall b \in \mathbb{R}$. CVD

Esercizio

Calcolare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt[n]{3n}$.

$$\text{Si ha } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt[n]{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1} = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Utilizziamo il teorema delle successioni monotone per definire il **numero di Nepero** e come limite di una particolare successione:

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \text{dove } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dobbiamo far vedere che:

- i)* a_n è crescente;
- ii)* a_n è limitata.

Dimostriamo *i)*: si tratta di scrivere la relazione $a_{n-1} \leq a_n$ e verificarla utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli.

Se a_n è crescente si deve avere

$$(*) \quad a_{n-1} \leq a_n \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

continua la dimostrazione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Essendo $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}$,
la diseuguaglianza (*) diventa :

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Portando a secondo membro il fattore $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$, si arriva a

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

cioè

$$(**) \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

equivalente alla diseuguaglianza () da dimostrare*

continua la dimostrazione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Per dimostrare la disuguaglianza (**) applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli al termine $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ e si ottiene

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{-1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

che è proprio la disuguaglianza (**).

Quindi $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è crescente. Tenendo conto del fatto che $a_1 = 2$ e a_n è crescente, allora possiamo dire che $a_n \geq 2$.

continua la dimostrazione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

ii) Dimostriamo che a_n è limitata (e quindi per il teorema delle successioni monotone è convergente).

Per fare questo, consideriamo la successione $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Osserviamo che

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{=a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Da quest'ultima relazione e utilizzando il precedente passo i) possiamo dire $2 \leq a_n < b_n$.

Dimostriamo che b_n è (strettamente) decrescente. In questo modo, tenendo conto del fatto che $b_1 = 4$ possiamo scrivere

$$2 \leq a_n < b_n < 4$$

cioè a_n è limitata, inoltre si può avere una stima di a_n : per esempio

$$2 \leq a_n < b_{20} \Rightarrow 2 \leq a_n < b_{20} = 2,79$$

continua la dimostrazione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Dimostriamo che b_n è decrescente: $b_n \leq b_{n-1}$ cioè

$$(***) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \quad \text{da dimostrare.}$$

Seguendo la dimostrazione nel passo i), scriviamo la diseuguaglianza $(***)$ in una equivalente. Per fare ciò, osserviamo che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n.$$

Sostituendo nella $(***)$ si ha:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n.$$

continua la dimostrazione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Dalla disuguaglianza $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ si ottiene

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

e quindi $\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ equivalente a } (***) \text{ da dimostrare.}$$

Dimostriamo che quest'ultima disuguaglianza è vera utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + n \frac{1}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n - \frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n}. \quad \text{CVD}$$

Quindi b_n è strettamente decrescente e vale $2 \leq a_n \leq b_n < 3$. Passando al limite (che esiste) si ha $2 < \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < 3$ e tale limite è il numero e .

Progressione geometrica $a_n = q^n$

Progressione geometrica $a_n = q^n$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q$ ragione della successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ +\infty & \text{se } q > 1, \\ \nexists \text{ (oscillante limitata)} & \text{se } q = -1, \\ \nexists \text{ (oscillante illimitata)} & \text{se } q < -1. \end{cases}$$

Infatti, se $q < 1$ allora posto $q = \frac{1}{1+p}$ ($p > 0$), si ha (diseg. di Bernoulli)
 $0 < q^n = \frac{1}{(1+p)^n} < \frac{1}{1+np} < \frac{1}{np} \rightarrow 0$.

Se $q > 1$ allora si pone $q = 1 + p$, ($p > 0$) e si ha
 $q^n = (1 + p)^n \geq 1 + np \rightarrow +\infty$.

Vediamo il teorema che mette in relazione limiti di funzioni e limiti di successioni

Teorema (ponte) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A . Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se e solo se, **per ogni** successione $\{x_n\}$ a valori in A e convergente in x_0 si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

Teorema Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$.

Esempio:

$a_n = \sin n$, $b_n = \frac{1}{n}$, $\sin n$ è limitata e $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, allora $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

Successioni infinitesime (cioè convergenti a zero) o infinite (cioè divergenti) possono essere confrontabili come si è fatto per le funzioni. Le definizioni sono analoghe.

Anche per le successioni valgono le operazioni con i limiti e le convenzioni con $l' \infty$, visti per le funzioni.

Anche i limiti notevoli visti per le funzioni, si adattano alle successioni.

Esempi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \sin \frac{1}{n} \text{ è asintotica a } \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (1 - \cos \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \cos \frac{1}{n} \approx \frac{1}{2n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{n}) \approx \frac{1}{n}$$

Ricordando il confronto tra infiniti visto per le funzioni, anche per le successioni a_n e b_n (infinite) possiamo dire che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ allora a_n tende all'infinito con un ordine inferiore rispetto a b_n e si scrive $a_n \ll b_n$.

Per quanto visto precedentemente, si ha quindi

$$(\log_{\beta} n)^{\alpha} \ll n^b \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad \text{con } b > 0, a > 1, \beta > 1, \alpha > 0$$

Dimostriamo che $(\log_{\beta} n)^{\alpha} \ll n^b$

Infatti, se $\alpha = 1$, e $b = 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{\beta} n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_{\beta} \sqrt[n]{n} = \log_{\beta} 1 = 0$$

Sfruttando questo risultato, se $\alpha = 1$ e $b > 0$, possiamo scrivere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{\beta} n}{n^b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{\beta} [n^b]^{\frac{1}{b}}}{n^b} = \frac{1}{b} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{\beta} n^b}{n^b} = 0$$

Criterion of the ratio for the successions.

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$ allora la successione $a_n \rightarrow 0$.

Le successioni n^b (con $b > 0$), a^n (con $a > 1$), e $n!$ sono tutte successioni infinite. Utilizzando il criterio del rapporto, dimostriamo che:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0, \quad b > 0, \quad a > 1;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a > 1;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$1) \text{ si ha } \frac{(n+1)^b}{\frac{a^{n+1}}{\frac{n^b}{a^n}}} = \frac{(n+1)^b}{n^b} \frac{a^n}{a^n a} = \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow 1) \text{ vera}$$

$$2) \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a^n a}{(n+1)n!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow 2) \text{ vera}$$

$$3) \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e} < 1, \Rightarrow 3) \text{ vera.}$$

Dimostriamo (senza utilizzare il criterio del rapporto per successioni) che $\{a^n\}$ (con $a > 1$) è un infinito di ordine superiore a quello di $\{n^b\}$ (con $b > 0$), cioè $\frac{n^b}{a^n} \rightarrow 0$

Prima dimostriamo che \sqrt{n} è un infinito di ordine inferiore a a^n . Essendo $a > 1$, possiamo scrivere $a = 1 + p$. Utilizzando la diseg. di Bernoulli si ha

$$\frac{\sqrt{n}}{a^n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+p)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1+np} \leq \frac{\sqrt{n}}{np} = \frac{1}{p\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Sia ora $\frac{n^b}{a^n}$. Si riduce al caso precedente ponendo $\frac{n^b}{a^n} = \left[\frac{\sqrt{n}}{c}\right]^{2b}$ con $c = a^{\frac{1}{2b}} > 1$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

Successioni definite per ricorrenza

Definizione. Si dice che una successione è definita per *ricorrenza* o per *induzione* se è definita nel seguente modo:

$$a_1 = \text{assegnato}$$

$$a_{n+1} = f(a_n),$$

dove la funzione $f(x)$ in generale è supposta continua in \mathbb{R} .

Esempio

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}, \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$$

La successione è a termini positivi, se $a_n \rightarrow a$ passando al limite nella relazione $a_{n+1} = a_n^2$ si ha $a^2 = a$ e i possibili limiti sono $0, 1, +\infty$.

Se la successione è decrescente, essendo $a_1 = \frac{1}{2}$ il limite sarà 0 . Per induzione vediamo che a_n è decrescente cioè $a_{n+1} \leq a_n$. Infatti per $n = 1$

è vera: $a_2 = \frac{1}{4} < a_1 = \frac{1}{2}$, supponiamo $a_n \leq a_{n-1}$. Si ha:

$$a_{n+1} = a_n^2 \leq a_{n-1}^2 = a_n.$$

Successioni estratte e Teorema di Bolzano Weierstrass

Definizione Data la successione di numeri reali $\{a_n\}$, sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. Si definisce **successione estratta da a_n di indici n_k** , la successione $\{a_{n_k}\}$ così definita:

$$k \in \mathbb{N} \rightarrow a_{n_k}$$

Esempio

Se $a_n = \frac{1}{n}$, una estratta potrebbe essere $a_{n_k} = a_{2n} = \frac{1}{2n}$ cioè successione con indici tutti numeri pari.

Si dimostra che

Proposizione. Se $a_n \rightarrow a$, allora ogni estratta $a_{n_k} \rightarrow a$.

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$, $\exists k_0 : |a_n - a| < \epsilon, \forall n > k_0$. Se $k > k_0$ si dimostra che $n_k \geq k > k_0$ e quindi $|a_{n_k} - a| < \epsilon$.

La disuguaglianza $n_k \geq k$ si dimostra per induzione: per $k = 1$ è vera $n_1 \geq 1$, si suppone vera per k : $n_k \geq k$. Per $k + 1$, essendo n_k strettamente crescente abbiamo $n_{k+1} > n_k \geq k$ cioè $n_{k+1} > k$ e quindi $n_{k+1} \geq k + 1$. Perciò $n_k \geq k$ è vera per ogni k .

Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.

Esempio

$a_n = (-1)^n \frac{3n+1}{n}$, una sua sottosuccessione convergente è per esempio

$a_{2k} = \frac{6k+1}{2k}$ che ha come limite 3

$a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$, una sua sottosuccessione convergente è $a_{4k} = \sin k\pi \rightarrow 0$

Successione di Cauchy (fondamentale)

Definizione Si dice che la successione a_n è *di Cauchy* o *fondamentale* se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice ν tale che per $m, n > \nu$ si ha $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Proposizione Ogni successione fondamentale è limitata

Dimostrazione. Sia $\epsilon = 1$, per ipotesi esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < \epsilon = 1$, $\forall m, n > \nu$. Fissiamo un indice $m_0 > \nu$. Allora per definizione di successione fondamentale si ha $|a_n - a_{m_0}| < 1$ cioè $a_{m_0} - 1 < a_n < a_{m_0} + 1$.

Poniamo $A = \min\{a_1, \dots, a_n, a_{m_0} - 1\}$, e $B = \max\{a_1, \dots, a_n, a_{m_0} + 1\}$, risulta $A \leq a_n \leq B$ cioè a_n è limitata.

Criterio di convergenza di Cauchy.

Criterio di convergenza di Cauchy

Una successione $\{a_n\}$ è convergente se e solo se è fondamentale (cioè di Cauchy).

i) Dimostriamo che a_n convergente $\Rightarrow a_n$ fondamentale. Sia $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ allora per definizione di limite $\forall \epsilon > 0 \exists \nu = \nu(\epsilon)$ tale che $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ se $n \geq \nu$. Se $m \geq \nu$ si ha anche $|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e quindi

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon, \quad \forall n, m > \nu.$$

ii) Dimostriamo ora che a_n *fondamentale* $\Rightarrow a_n$ *convergente*. Se a_n è fondamentale allora è limitata e possiamo estrarre una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ convergente e sia a il limite di a_{n_k} . Fissato $\epsilon > 0$ esistono due indici ν_1 e ν_2 tali che

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se } n \geq \nu_1,$$
$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{se } n \geq \nu_2.$$

In particolare per $m = n_k$ si ha $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$, per $n \geq \nu_2$.

Sia $n \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$ si ottiene:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon$$

$\Rightarrow a_n$ è convergente.

Limite inferiore e limite superiore di una successione.

Definizione Data la successione $\{a_n\}$ si definisce **valore limite** di a_n l'elemento $a \in \mathbb{R}^*$ se:

- 1) esiste una sottosuccessione di a_n che ammette limite a ;
- 2) a è un punto di accumulazione per l'insieme $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, oppure esistono infiniti indici n_k per cui $a_{n_k} = a$.

L'insieme dei valori limite di a_n si chiama **classe limite** di $\{a_n\}$.

Esempi.

La classe limite della successione $a_n = (-1)^n$ è $(-1, 1)$

La classe limite della successione $a_n = (-2)^n$ è $-\infty, +\infty$

Definizione Si definisce *limite inferiore* o *minimo limite* di una successione a_n il minimo dei valori limite e si indica con

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \min \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

In modo analogo si definisce *limite superiore* o *massimo limite* di a_n e si indica con $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$, il massimo dei valori limite e si indica con

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \max \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Dalle definizioni si ha che

- 1) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$,
- 2) a_n ha limite se e solo se $\liminf a_n = \limsup a_n$,
- 3) da ogni successione limitata superiormente (inferiormente) si può estrarre una sottosuccessione che converge al massimo limite (minimo limite).

Esempi.

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{n\pi}{4} = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} = 1, \quad \text{la classe limite e'}$$

$$\left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\};$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tan \frac{n\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tan \frac{n\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \text{la classe limite e'}$$

$$\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

Dai teoremi sulle medie aritmetiche e medie geometriche di una successione, si dimostra:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Esercizio.

Calcolare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$

Calcolare i seguenti limiti

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 + e^{-n}}{5 \ln n + n^3}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2 + 5n}{5 + 3n}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n + 5n^3}{n^3 + 3\sqrt{n}}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln n - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} + 6}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(3 + \sin(3n))^n}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha [\ln(n-3) - \ln n]$, *al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$*

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, una successione a valori reali.

Si dice **serie di termine generale** a_n : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, la successione delle somme parziali (o ridotte)

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k,$$

$$S_0 = a_0,$$

$$S_1 = a_0 + a_1,$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2,$$

\vdots

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Definizione

La serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é **convergente** con somma S se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S, \quad \text{finito};$$

la serie si dice **divergente** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$;

la serie si dice **indeterminata** (o irregolare) se $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad \text{Serie geometrica di ragione } q$$

- converge se $|q| < 1$ e ha per somma $S = \frac{1}{1-q}$,
- diverge se $q \geq 1$,
- indeterminata se $q \leq -1$.

Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n$ e $|q| < 1$ allora $S = q^{n_0} \frac{1}{1-q}$,

q^{n_0} = primo termine della serie geometrica.

Serie geometrica

Infatti se $q \neq 1$, si ha $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

(se $q = 1$ allora $S_n = n + 1 \rightarrow +\infty$ e la serie diverge)

moltiplicando membro a membro per $1 - q$ ($\neq 0$) si ottiene

$$S_n(1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$\text{da cui } S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

e passando al limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{irregolare se } q \leq -1 & \begin{cases} \text{limitata se } q = -1 \\ \text{illimitata se } q < -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) \quad \text{Serie telescopica}$$

Si ha $S_n = b_0 - b_{n+1}$

- **converge** con somma $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = b_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$ é finito,

- **diverge** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \pm\infty$

- **irregolare** se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$ non esiste

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{Serie di Mengoli (particolare serie telescopica)}$$

Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

La serie di Mengoli converge con somma $S = 1$.

Criterio di Cauchy

Teorema (Criterio di Cauchy) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie $\sum a_n$ sia convergente è che, fissato $\epsilon > 0$ esiste un indice ν tale che per ogni $n > \nu$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ si abbia*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Dimostrazione.

i) $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon.$

Sia S_n la successione delle somme parziali della serie $\sum a_n$.

Se la serie $\sum a_n$ converge allora per definizione converge la successione delle somme parziali S_n e quindi S_n è fondamentale (per il criterio di Cauchy per le successioni: una successione è convergente se e solo se è di Cauchy o fondamentale). Questo significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che per $m > \nu$ e per $n > \nu$ si ha

$$|S_m - S_n| < \epsilon.$$

Continua dimostrazione del Criterio di Cauchy

Per $m > n$ e $m = n + p$, $p \in \mathbb{N}$ si ha

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon, \text{ cioè la tesi.}$$

$$\text{ii) } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon, \Rightarrow \sum a_n \text{ convergente.}$$

$\forall n > \nu$, $p \in \mathbb{N}$ sia $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$, ma questo significa

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |S_{n+p} - S_n| < \epsilon,$$

per $m = n + p$, si ha $|S_m - S_n| < \epsilon$, $\forall m, n > \nu$ cioè S_n è di Cauchy e quindi convergente.

Essendo convergente S_n (cioè la successione delle somme parziali) allora la serie $\sum a_n$ converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad \text{Serie armonica generalizzata}$$

$$\left(\text{Se } \alpha = 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ Serie armonica} \right)$$

- converge se $\alpha > 1$,

- diverge se $\alpha \leq 1$

Utilizziamo il Criterio di Cauchy per dimostrare che $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Consideriamo le somme parziali S_{2n} e S_n :

$$S_{2n} - S_n = \overbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ addendi}} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Il Criterio di Cauchy non è soddisfatto e quindi la serie armonica non converge ma diverge.

Esercizio

Dire se convergono e, se possibile, determinare la somma delle seguenti serie

$$1) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$q = \frac{1}{3} < 1 \rightarrow S = \frac{q^{n_0}}{1-q} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

$$2) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}} \right)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{e^{k+1}} \right) = 1 - \frac{1}{e^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^{n+1}} = 1$$

Esercizio

Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$1) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^n;$$

E' una serie geometrica con ragione $q = \frac{x+1}{x}$ e converge se $|q| < 1$, cioè $-1 < \frac{x+1}{x} < 1$ che ha le soluzioni: $x < -\frac{1}{2}$.

Si ha

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^n \begin{cases} \text{converge con somma } S = \frac{q^2}{1-q} = -\frac{(x+1)^2}{x}, \text{ se } x < -\frac{1}{2}; \\ \text{diverge, se } x > 0; \\ \text{irregolare, se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

Studiare il carattere delle seguenti serie

$$1) \sum_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right);$$

E' una serie telescopica: $\sum_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} \ln n - \ln(n+1)$.

$$S_n = \ln 3 - \ln(n+1) \rightarrow -\infty.$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right]$$

Si ha

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \text{ e quindi } \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right] =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right] = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Serie numeriche, condizione necessaria di convergenza

Teorema

Condizione necessaria affinché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga é che il limite del termine generale tenda a zero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

(la serie può convergere o divergere, non é indeterminata)

Nota Le serie $\sum a_n$, a termini non negativi ($a_n \geq 0$) può solo convergere o divergere (non può essere indeterminata).

Infatti la successione delle somme parziali essendo costruita con termini non negativi, é una successione crescente:

$$S_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Dal teorema del limite di una successione monotona si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n\} \text{ che puo' essere finito o } \infty$$

Serie numeriche a termini non negativi, criteri sufficienti di convergenza

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi e tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \textit{definitivamente}$$

allora

- se $\sum b_n$ converge, converge anche la serie $\sum a_n$,
- se $\sum a_n$ diverge, diverge anche la serie $\sum b_n$.

La serie $\sum b_n$ é detta **maggiorante**, la serie $\sum a_n$ é detta **minorante**.

Dimostrazione Siano

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad e \quad S_n^* = \sum_{k=0}^n b_k,$$

per ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n$

e passando alle somme parziali si ha: $0 \leq S_n \leq S_n^*$.

Le serie date sono a termini non negativi e perciò non possono essere indeterminate.

Si ottiene così la tesi.

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

$$1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{2}{n^4}$$

$$2 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n^3}{n^3}$$

$$3 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 10n}{n^4 + 1}.$$

Confronto asintotico

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni asintotiche $a_n \sim b_n$ cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento (entrambe convergenti oppure entrambe divergenti).

Dimostrazione

Supponiamo che $a_n \sim b_n$, allora per definizione di limite di successione:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon : 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon \text{ cioè}$$

$$(1 - \varepsilon)b_n < a_n < (1 + \varepsilon)b_n.$$

Applicando il teorema del confronto si ha la tesi.

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

$$1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sin n}{1 + n^3}$$

$$2 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right)$$

$$3 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + \ln n + 1}{n^4 + n - 1}$$

criterio della radice Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

allora:

- se $l < 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ converge,
- se $l > 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ diverge,
- se $l = 1$, \Rightarrow il criterio é inefficace.

Dimostrazione

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} = l < 1$.

e sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1$.

Per definizione di limite di successione si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon : \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon,$$

$$\text{cioé } a_n < (l + \varepsilon)^n, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Per il criterio del confronto, la serie $\sum a_n$ converge in quanto converge la serie geometrica $\sum (l + \varepsilon)^n$.

Se invece $l > 1$ allora $\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1$ e perciò non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum a_n$ diverge (essendo a termini non negativi)

Osservazione.

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1^+$ allora la serie $\sum a_n$ diverge (si ripete il ragionamento della dimostrazione fatta precedentemente).

Se invece $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1^-$ il criterio non ci da informazioni sul carattere della serie e bisogna studiarla utilizzando un diverso criterio.

Se il limite non esiste allora si può considerare il $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \bar{l}$ e seguendo la stessa dimostrazione fatta per l si dimostra che

se $\bar{l} < 1$ allora la serie data converge,

se $\bar{l} > 1$ allora la serie data diverge.

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

$$1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{2^n}$$

$$2 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$3 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1} \right)^n$$

$$4 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!3^n} \text{ al variare di } x > 0.$$

criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

allora

- se $l < 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ converge,
- se $l > 1$, $\Rightarrow \sum a_n$ diverge,
- se $l = 1$, \Rightarrow il criterio é inefficace.

condizioni sufficienti, criterio del rapporto

Dimostrazione Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1$

Per definizione di limite di successione si ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon : \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon = x.$$

Allora si ha (possiamo supporre $\nu_\varepsilon = 1$)

$$a_2 < a_1 x, \quad a_3 < a_1 x^2, \quad \dots, \quad a_n < a_1 x^{n-1}.$$

Per il criterio del confronto la serie $\sum a_n$ converge in quanto converge la serie geometrica di termine generale $x = l + \varepsilon < 1$.

Se $l > 1$, allora dalla definizione di limite di successione si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ da un certo indice ν in poi.

Allora la successione a_n è strettamente crescente e non può convergere a zero (la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta).

Osservazione.

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1^+$ allora la serie $\sum a_n$ diverge (si ripete il ragionamento della dimostrazione fatta precedentemente).

Se invece $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1^-$ il criterio non ci da informazioni sul carattere della serie e bisogna studiarla utilizzando un diverso criterio.

Se il limite non esiste allora si può considerare il $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \bar{l}$ e seguendo la stessa dimostrazione fatta per l si dimostra che

se $\bar{l} < 1$ allora la serie data converge,

se $\bar{l} \geq 1$ niente si può concludere sulla divergenza della serie.

Esempio

Sia

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ e' pari;} \\ \frac{1}{n^3} & \text{se } n \text{ e' dispari;} \end{cases}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \#$ (se n è pari allora $n+1$ è dispari e si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ mentre se n è dispari $n+1$ è pari e si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n \rightarrow +\infty$).

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ ma $\sum a_n$ converge in quanto minorante della serie $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

Criterio di condensazione

Sia $\{a_n\}$ una successione a termini non negativi e decrescente :

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0.$$

Allora la serie $\sum a_n$ converge se e solo se $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

Applicazioni. Studiare il carattere della serie armonica generalizzata

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} : \begin{cases} \text{convergente per } \alpha > 1 \\ \text{divergente per } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Infatti, se $\alpha > 0$ la successione $\frac{1}{n^\alpha}$ è decrescente e per il criterio di condensazione si ha

$$2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = 2^{n(1-\alpha)}$$

Il termine $2^{n(1-\alpha)}$ è il termine generale di una serie geometrica che converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$. La serie armonica generalizzata avrà lo stesso comportamento.

Serie a termini di segno variabile

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione di segno variabile, la serie $\sum a_n$ si dice **assolutamente convergente** se converge la serie (a termini non negativi) $\sum |a_n|$.

Teorema (Convergenza assoluta)

Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente allora converge.

CONVERGENZA ASSOLUTA \Rightarrow CONVERGENZA ORDINARIA (o CONVERGENZA SEMPLICE).

non è vero il viceversa

Esempio

La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ non converge assolutamente.

Si dimostra che però converge semplicemente (col Criterio di Leibniz).

Dimostrazione Teorema sulla convergenza assoluta di una serie

Per ipotesi la serie $\sum |a_n|$ è convergente allora per il Criterio di Cauchy:

$$|S_{n+p} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon$$

Consideriamo ora la successione delle somme parziali della serie $\sum a_n$ cioè

$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n a_k$, si ottiene (utilizzando la diseguaglianza triangolare)

$$|\tilde{S}_{n+p} - \tilde{S}_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leq$$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$$

Quindi per il criterio di Cauchy converge anche la serie $\sum a_n$.

Criterio di Leibniz

Data la serie di segno alterno $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0, \forall n$,

Se:

i) la successione $\{a_n\}$ è decrescente;

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

allora la serie è convergente.

Inoltre, le somme parziali di indice pari approssimano la somma per eccesso, quelle di indice dispari per difetto. Il resto della serie è maggiorato, in valore assoluto, dal primo termine trascurato.

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \downarrow S; \quad S = \text{somma della serie}$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \uparrow S;$$

$$|R_n| = |S_n - S| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}, \quad S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}.$$

Esercizio

Utilizzando il criterio di Leibniz, dire se le serie convergono.

$$1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

$$2 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n},$$

$$3 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - n},$$

$$4 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$