

Controlli automatici

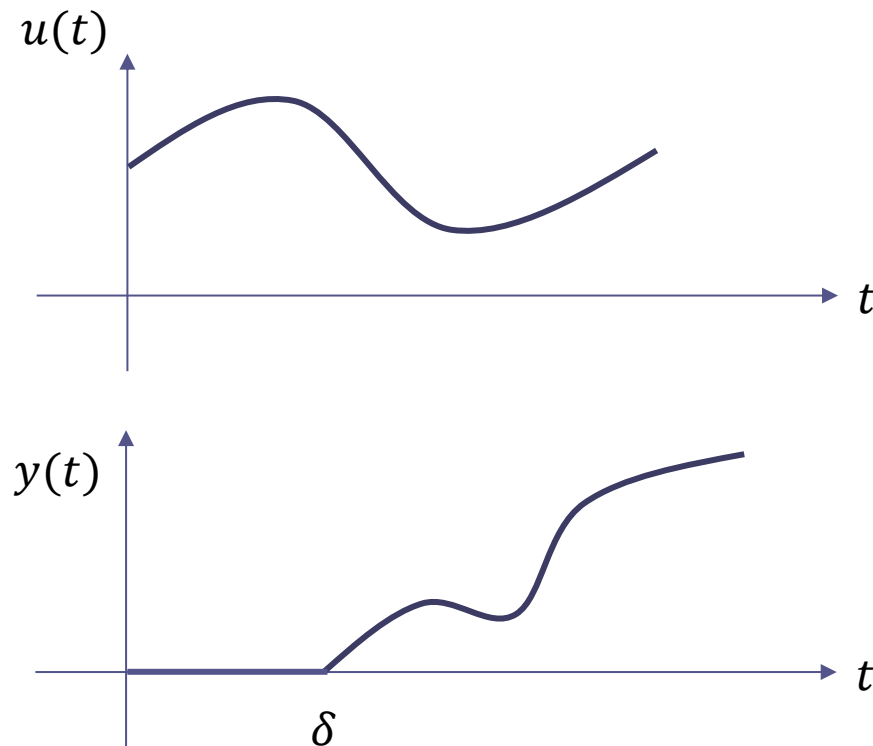
Sistemi con ritardo

Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

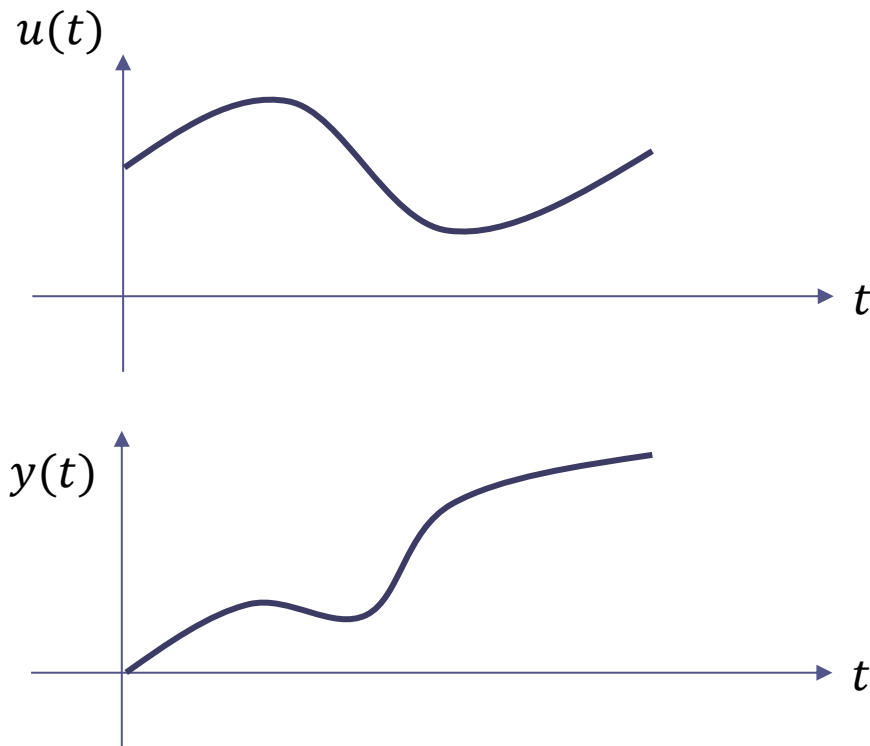
Sistemi con ritardo

Una vasta gamma di processi industriali sono descritti da equazioni differenziali in cui compaiono esplicitamente dei **ritardi temporali**.

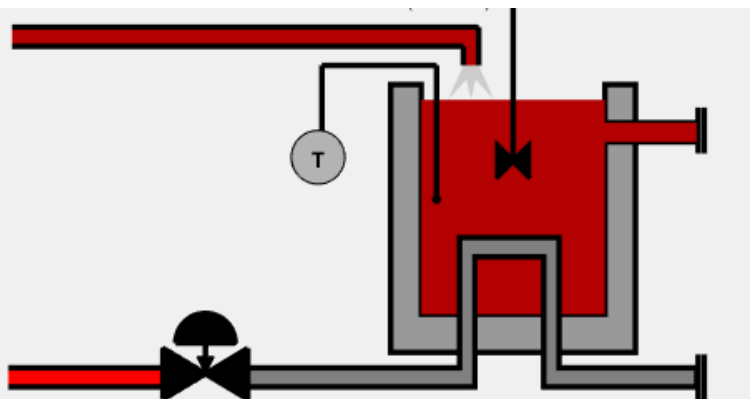
In generale un sistema dinamico è descritto da un modello con ritardo se a fronte della applicazione di una certa sollecitazione $u(t)$ in ingresso l'uscita $y(t)$ «risponde» solo dopo che sia trascorso un intervallo finito δ detto «**tempo morto**» (dead time)



Abbiamo finora implicitamente assunto che i processi fossero caratterizzati da una risposta «istantanea», e si è ottenuta una loro rappresentazione attraverso una FdT avente la forma di un rapporto di polinomi.

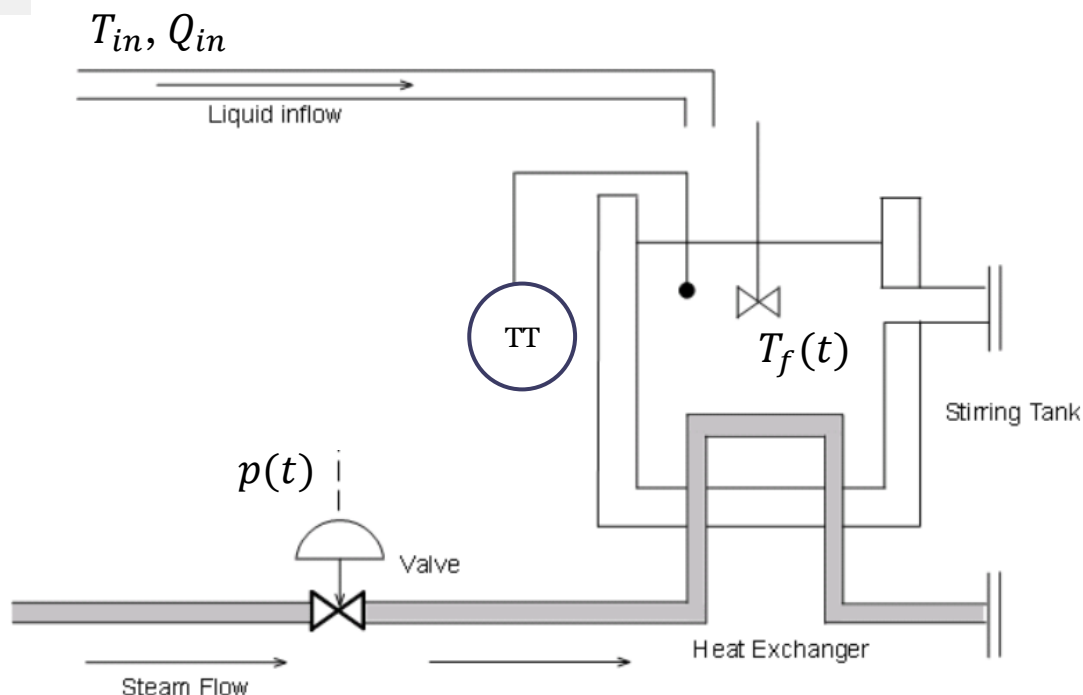


Scambiatore di calore (sistema discusso durante la presentazione del corso).

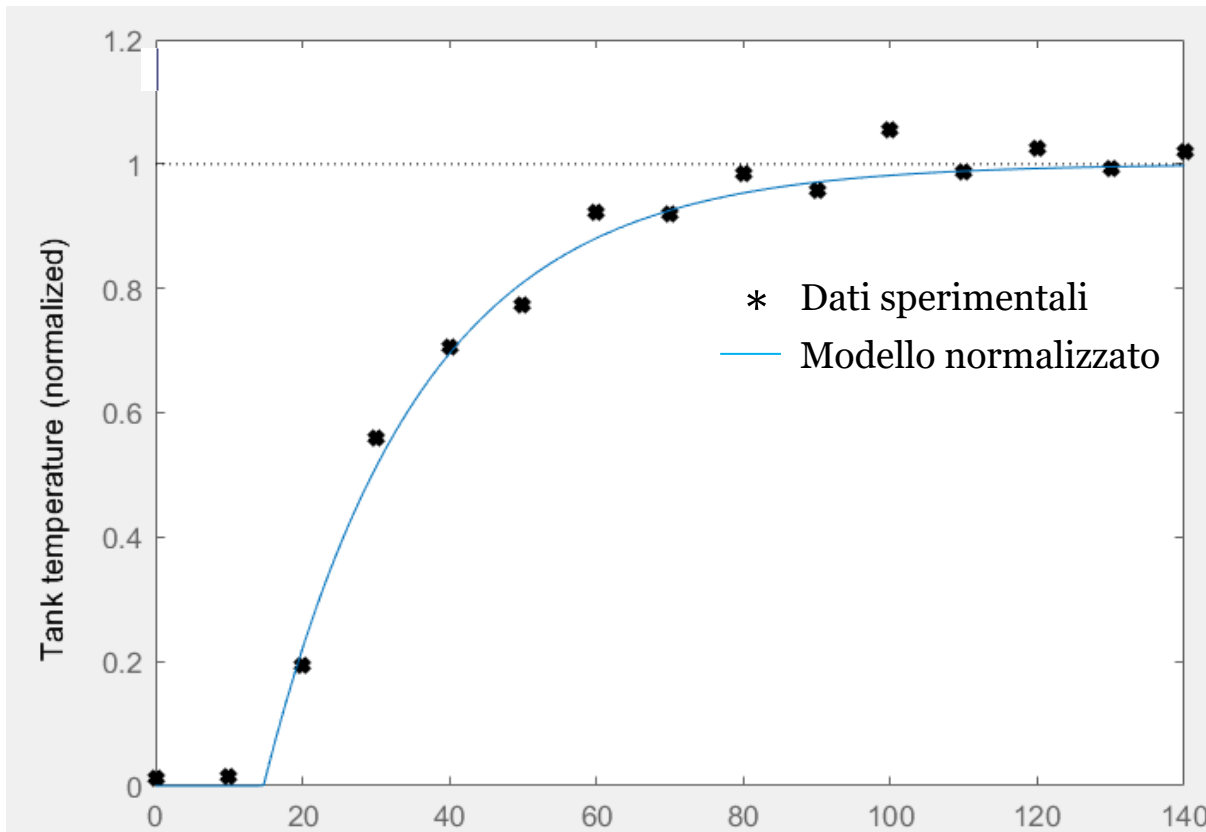


Un liquido a temperatura T_{in} viene immesso con portata Q_{in} in un serbatoio all'interno del quale deve essere riscaldato ad una temperatura T_{des} . Nel serbatoio transita una linea percorsa da vapore ad alta temperatura.

Il processo è attuato per mezzo di una servovalvola attraverso la quale è possibile modulare la portata del vapore. Il segnale di comando $p(t)$ (che varia da 0% a 100%) viene detto «apertura» (opening) della servovalvola



Il seguente grafico mostra dati sperimentali (normalizzati in ampiezza) acquisiti in uno scambiatore reale a fronte di una variazione a gradino del segnale di comando della valvola

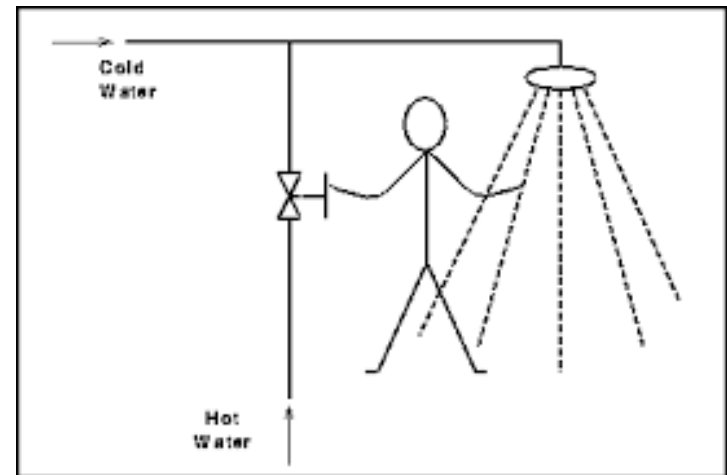


Una variazione a gradino della portata o della temperatura del fluido in ingresso si tradurrebbe in una risposta simile.

La presenza di **ritardi finiti** complica enormemente il compito di controllare il processo ...



Con che «prestazioni» riusciamo a regolare la temperatura dell'acqua quando ci facciamo la doccia?



Funzione di trasferimento di sistemi con ritardo

Analizziamo un esempio molto semplice, e vediamo se anche in presenza di ritardi nei legami ingresso-uscita che descrivono il comportamento di sistemi dinamici lineari è possibile determinare una funzione di trasferimento, e in caso affermativo che forma assume.

Si consideri un tratto di una pipeline di lunghezza L . In corrispondenza della sezione S_{IN} posta sul lato sinistro viene immessa una portata $q(t)$ di un certo fluido, che si propaga verso destra nella tubazione con velocità costante V



Se si considerano come variabile di ingresso $u(t)$ la portata $q(t)$ che transita alla sezione di ingresso S_{IN} e come variabile di uscita $y(t)$ la portata misurata all'istante t nella sezione di uscita S_{OUT} , si ricava facilmente come l'uscita dipenda dalla portata in ingresso attraverso un legame (**statico**) che coinvolge un **ritardo temporale** δ

$$u(t) = q(t) \qquad y(t) = q(t - \delta) \qquad \delta = \frac{L}{V}$$

$$y(t) = q(t - \delta) \quad \delta = \frac{L}{V}$$

Applicando l'operatore della TdL alla relazione ingresso-uscita, e utilizzando le proprietà della TdL («Teorema della traslazione nel tempo») si ottiene

$$Y(s) = \mathcal{L}\{q(t - \delta)\} = Q(s)e^{-\delta s}$$

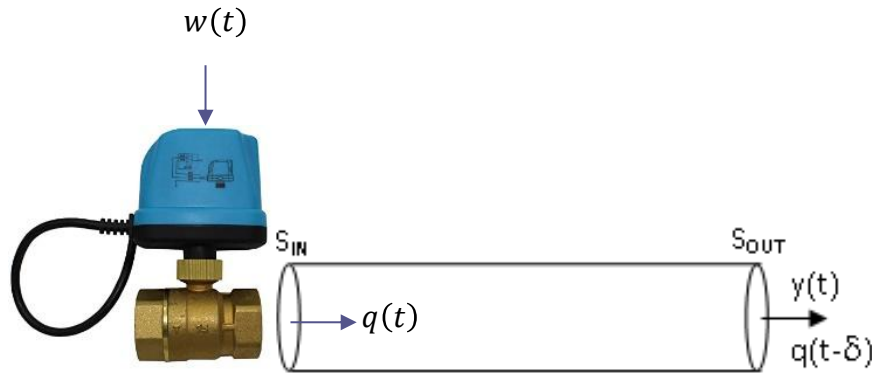
Il sistema ha pertanto FdT

$$H(s) = \frac{Y(s)}{Q(s)} = e^{-\delta s} \quad \text{FdT irrazionale contenente un fattore esponenziale}$$

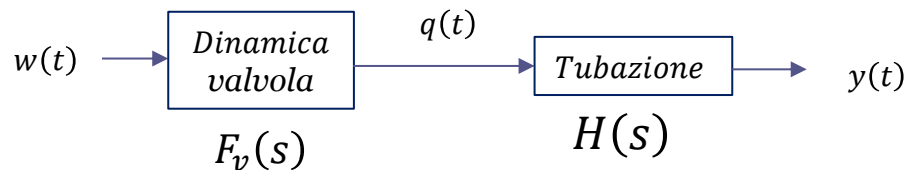
Più in generale, processi con ritardo sono descritti da un modello della forma

$$G(s) = F(s)e^{-\delta s} \quad F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad F(s) \text{ è un rapporto di polinomi}$$

Inserendo ad esempio una servovalvola nel circuito precedente



in cui $w(t)$ è il segnale di comando della valvola si realizza il seguente schema a blocchi



La FdT fra il segnale di comando $w(t)$ della valvola e l'uscita $y(t)$ sarà il prodotto fra la FdT associata alla dinamica della valvola e la FdT della tubazione

$$G_w^y(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = F_v(s)H(s) = F_v(s)e^{-\delta s}$$

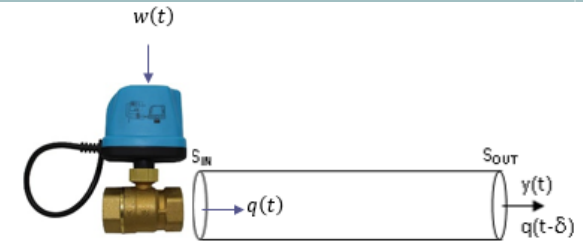
La valvola può essere rappresentata da una FdT del primo ordine

$$F_v(s) = \frac{k}{1 + \tau s}$$

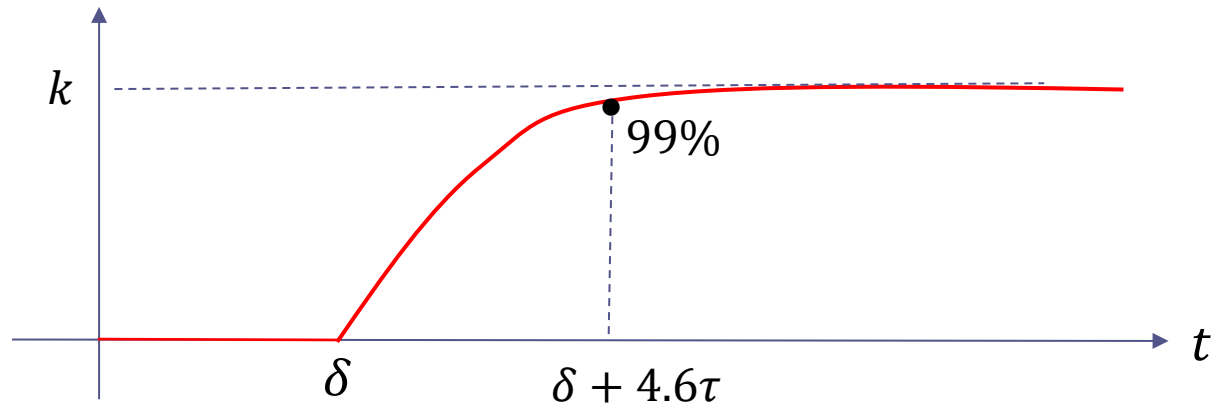
Si ottiene quindi

$$G_w^y(s) = \frac{k}{1 + \tau s} e^{-\delta s}$$

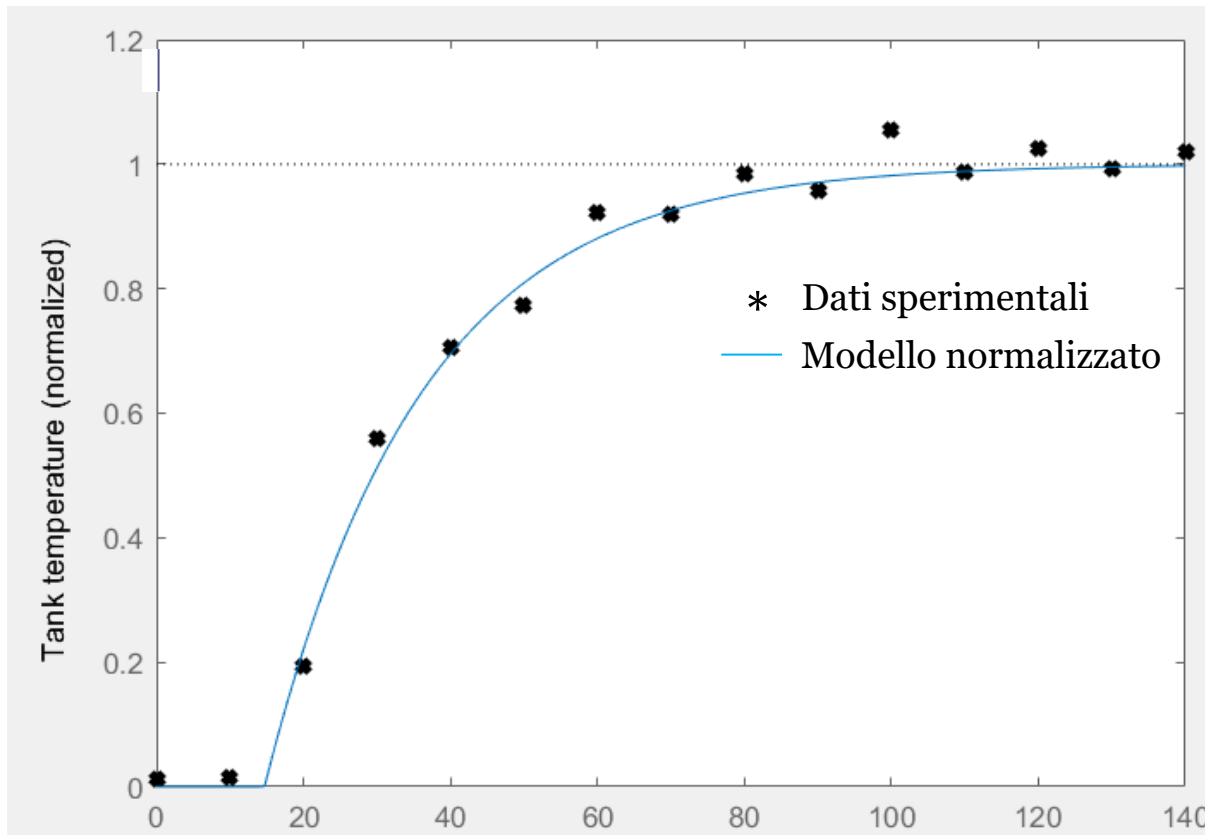
Processo **FOPDT** (First Order Plus Dead Time)



Risposta al gradino unitario di un processo FOPDT



I dati sperimentali precedentemente presentati sono in buona corrispondenza con la risposta al gradino del modello FOPDT normalizzato $G(s) = \frac{1}{1+21.3s} e^{-14.7s}$

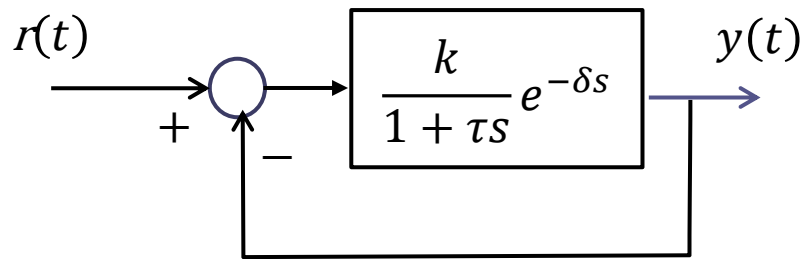


Il comportamento dello scambiatore (il legame fra il segnale di comando della servovalvola e la temperatura di uscita) è ben approssimato dalla FdT

$$G(s) = \frac{1}{1+21.3s} e^{-14.7s}$$

Stabilità a ciclo chiuso di sistemi con ritardo

Consideriamo un sistema a retroazione in cui la FdT a ciclo aperto è di tipo FOPDT



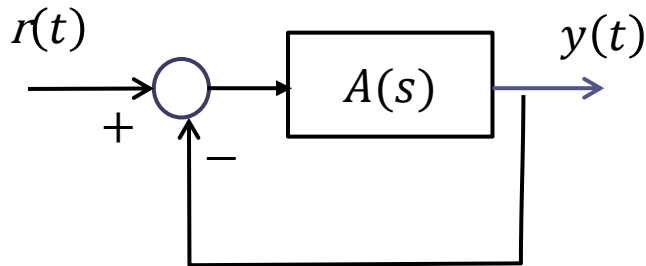
La FdT a ciclo chiuso ha un denominatore irrazionale

$$W_r^y = \frac{\frac{k}{1 + \tau s} e^{-\delta s}}{1 + \frac{k}{1 + \tau s} e^{-\delta s}} = \frac{k e^{-\delta s}}{1 + \tau s + k e^{-\delta s}}$$

La stabilità a ciclo chiuso **non può più essere analizzata con le tecniche viste finora.**

Criterio di Bode

Presentiamo un criterio di stabilità che mette in relazione la stabilità del sistema a ciclo chiuso con determinate proprietà «frequenziali» della funzione di risposta armonica $A(j\omega)$ associata alla FdT $A(s)$ a ciclo aperto.

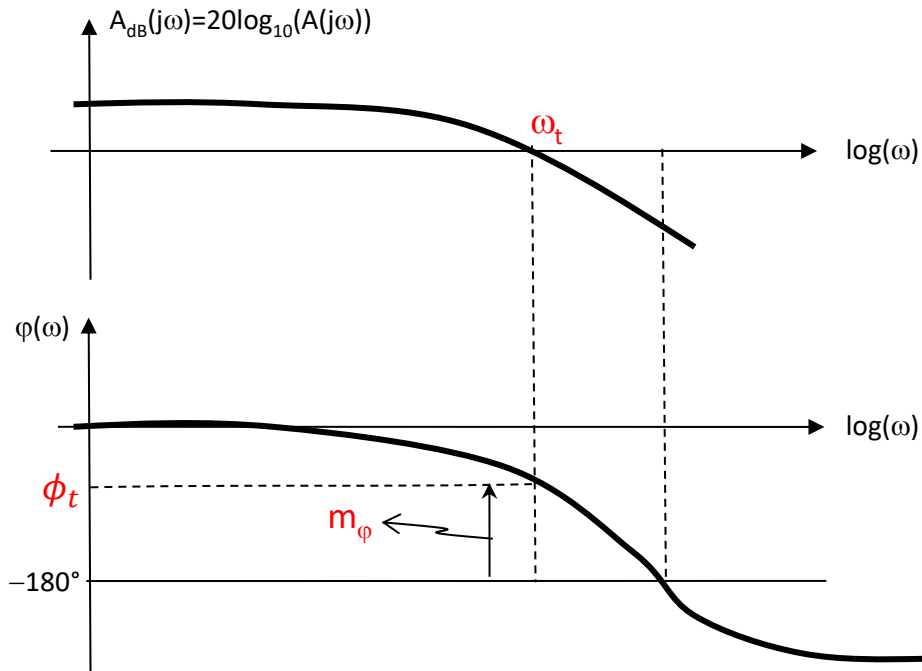


$$A(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$

Ipotesi di applicabilità

- 1 $A(s)$ non ha poli a parte reale positiva (il polinomio $D(s)$ non ha radici a parte reale positiva)
- 2 Il diagramma di Bode del modulo di $A(j\omega)$ interseca l'asse a 0 dB una sola volta

Definizioni



Pulsazione di attraversamento ω_t

Pulsazione alla quale il diagramma del modulo di $A(j\omega)$ interseca l'asse a 0 dB

$$|A(j\omega_t)|_{dB} = 0$$

cioè

$$|A(j\omega_t)| = 1$$

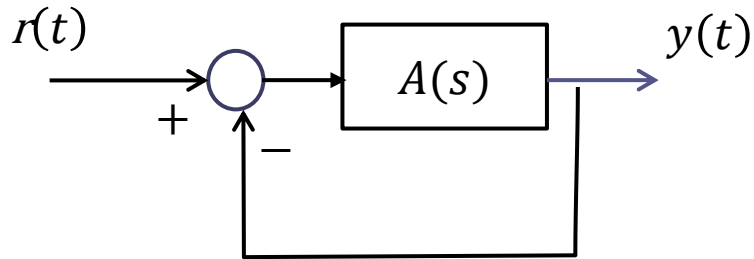
Margine di fase m_ϕ

$$m_\phi = 180 - |\phi_t|$$

$$\phi_t = \arg A(j\omega_t)$$

ϕ_t è il valore della fase di $A(j\omega)$ alla pulsazione di attraversamento ω_t

Il margine di fase è positivo quando $\phi_t > -180^\circ$ e negativo quando $\phi_t < -180^\circ$



$$A(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$

Criterio di Bode

Sotto le ipotesi di applicabilità, il sistema a ciclo chiuso rappresentato in figura è asintoticamente stabile a ciclo chiuso **se e solo se** il **guadagno statico** (eventualmente generalizzato) **di $A(s)$** ed il **margine di fase** sono **entrambi positivi**:

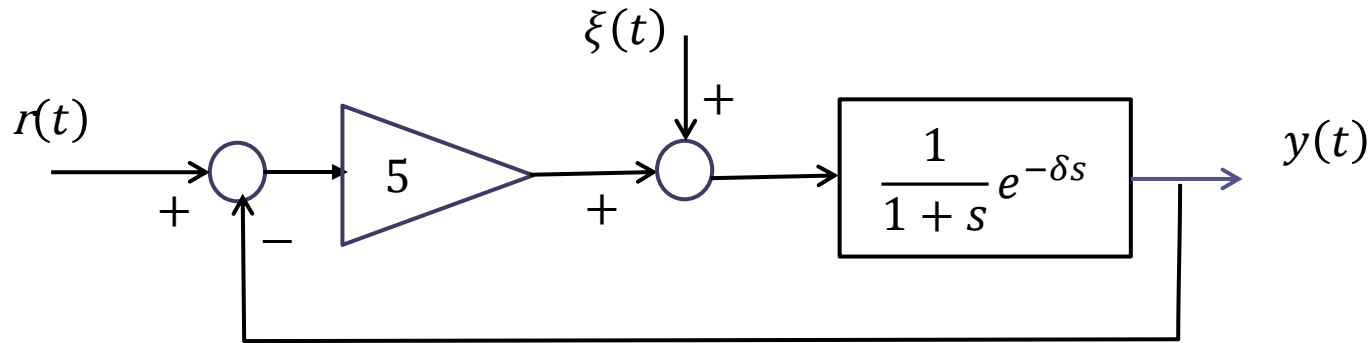
$$\mu_A > 0 \quad \text{Guadagno statico (eventualmente generalizzato) della FdT } A(s)$$

$$m_\varphi > 0$$

COROLLARIO Se il diagramma di Bode del modulo di $\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ si trova sempre sotto l'asse a 0 dB (cioè se $\left| \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \right|_{dB} < 0 \quad \forall \omega$) il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile

Esercizio RIT-01

Si consideri il seguente sistema in retroazione



Valutare la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo nel caso in cui $\delta = 0.1$ e $\delta = 0.5$

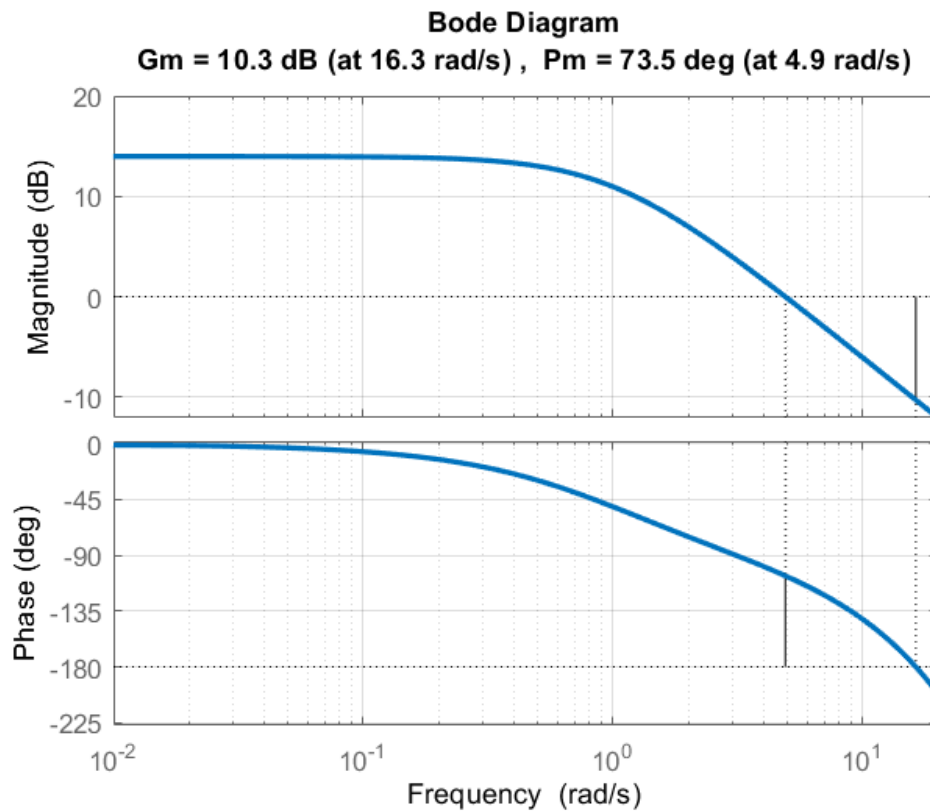
Determinare l'evoluzione di regime dell'uscita per $r(t) = 10$ e $\xi(t) = 1$

Applichiamo il Criterio di Bode

$$\delta = 0.1$$

Diagrammi di Bode della FdT a ciclo aperto $A(s) = \frac{5}{1+s} e^{-0.1s}$

Ipotesi di applicabilità soddisfatte



Pulsazione di attraversamento ω_t

$$\omega_t = 4.9 \text{ rad/s}$$

Margine di fase m_ϕ

$$m_\phi = 73.5^\circ$$

Guadagno statico di $A(s)$

$$\mu_A = A(0) = 5$$

Sistema a ciclo chiuso asintoticamente stabile.



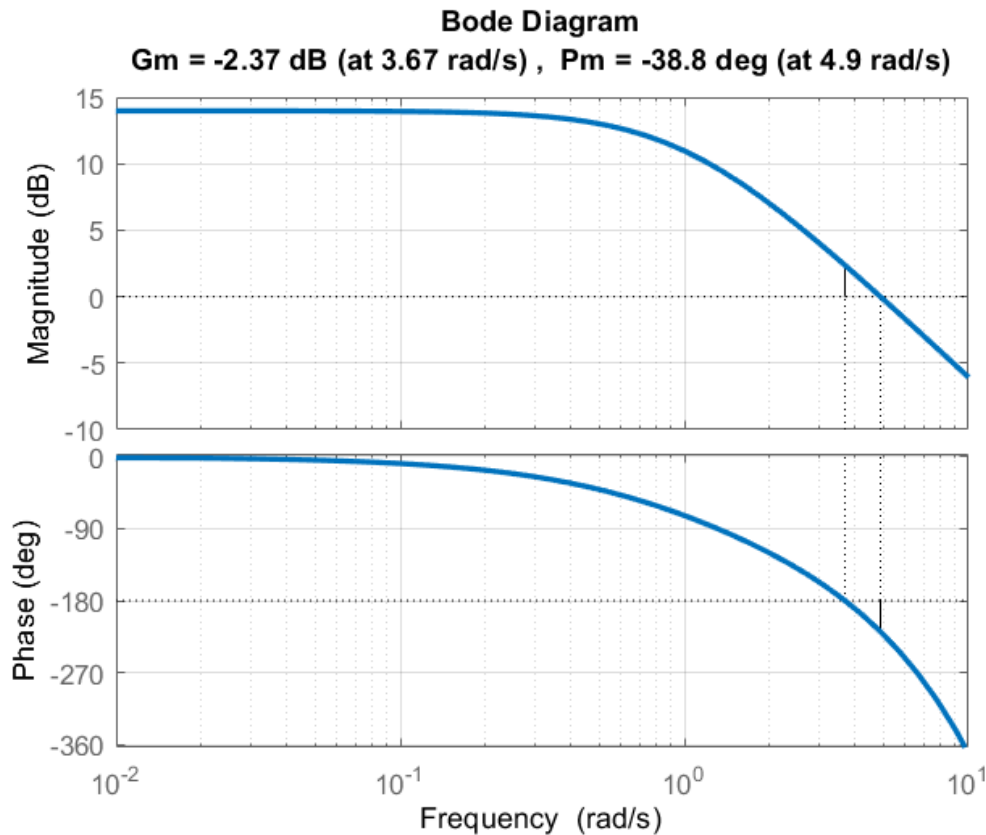
```
delta=0.1;
s = tf('s');
A = 5*exp(-delta*s)/(s+1);
margin(A),grid
xlim([0.01 20])
```

Applichiamo il Criterio di Bode

$$\delta = 0.5$$

Diagrammi di Bode della FdT a ciclo aperto $A(s) = \frac{5}{1+s} e^{-0.5s}$

Ipotesi di applicabilità soddisfatte



Pulsazione di attraversamento ω_t

$$\omega_t = 4.9 \text{ rad/s}$$

Margine di fase m_φ

$$m_\varphi = -38.8^\circ$$

Guadagno statico di $A(s)$

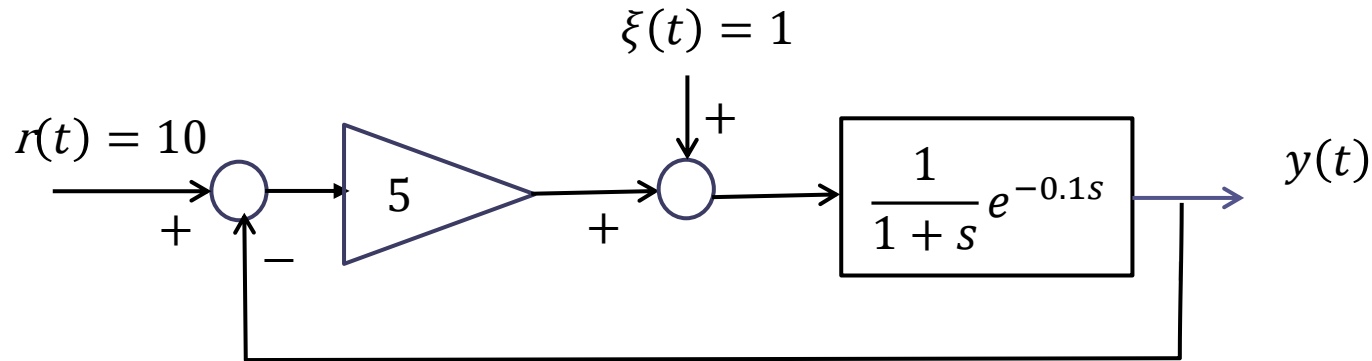
$$\mu_A = A(0) = 5$$

```
delta=0.5;
s = tf('s');
A = 5*exp(-delta*s)/(s+1);
margin(A),grid
xlim([0.01 10])
```

Sistema a ciclo chiuso instabile.



Comportamento di regime dell'uscita quando $\delta = 0.1$



FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{5}{1+s} e^{-0.1s}}{1 + \frac{5}{1+s} e^{-0.1s}} = \frac{5e^{-0.1s}}{1 + s + 5e^{-0.1s}}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{1}{1+s} e^{-0.1s}}{1 + \frac{5}{1+s} e^{-0.1s}} = \frac{e^{-0.1s}}{1 + s + 5e^{-0.1s}}$$

Sono FdT asintoticamente stabili (sulla base del Criterio di Bode). Possiamo pertanto determinare il valore di regime della relativa risposta al gradino sulla base del corrispondente guadagno statico e del T.F.R.G.

Comportamento di regime dell'uscita quando $\delta = 0.1$

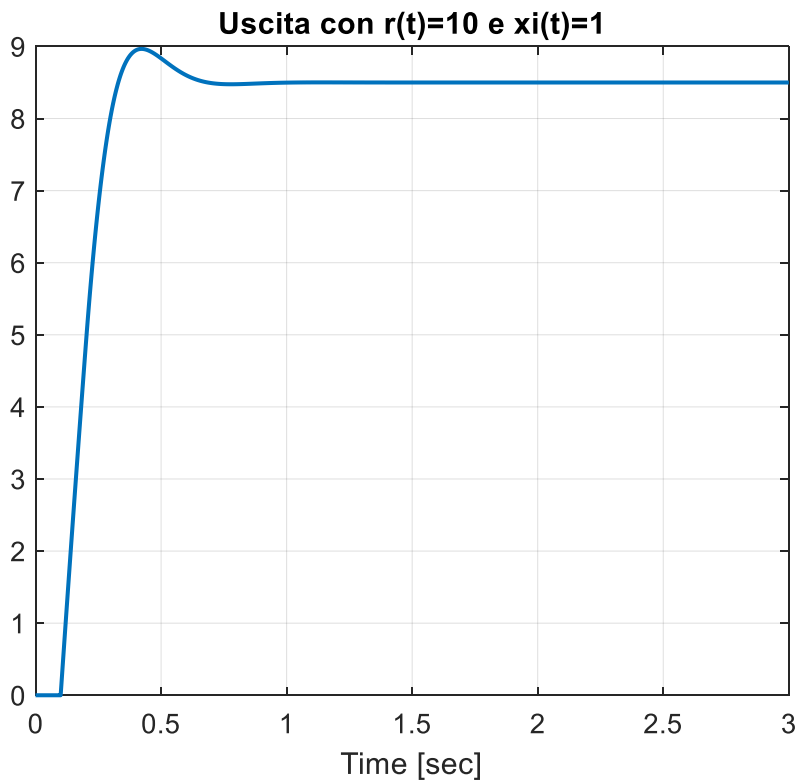
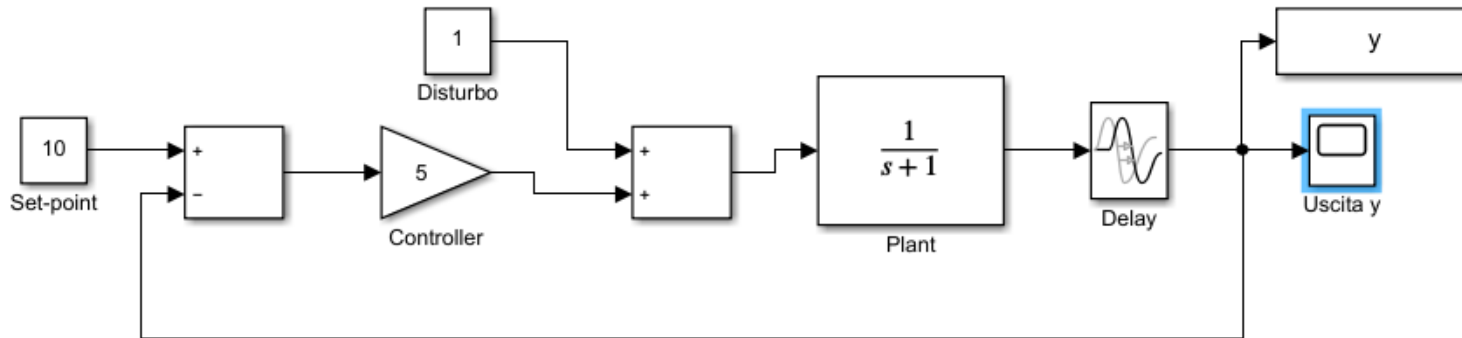
$$r(t) = 10 \quad y(t) \rightarrow 10 \cdot W_r^y(0) = 10 \cdot \frac{5}{6} = 8.33$$

$$\xi(t) = 1 \quad y(t) \rightarrow 1 \cdot W_\xi^y(0) = 1 \cdot \frac{1}{6} = 0.166$$

Il termine di ritardo non altera i guadagni delle FdT a ciclo aperto e a ciclo chiuso (i guadagni statici delle due FdT a ciclo chiuso, e quindi i valori di regime calcolati, coincidono con quelli che si sarebbero avuti nel caso $\delta = 0$).

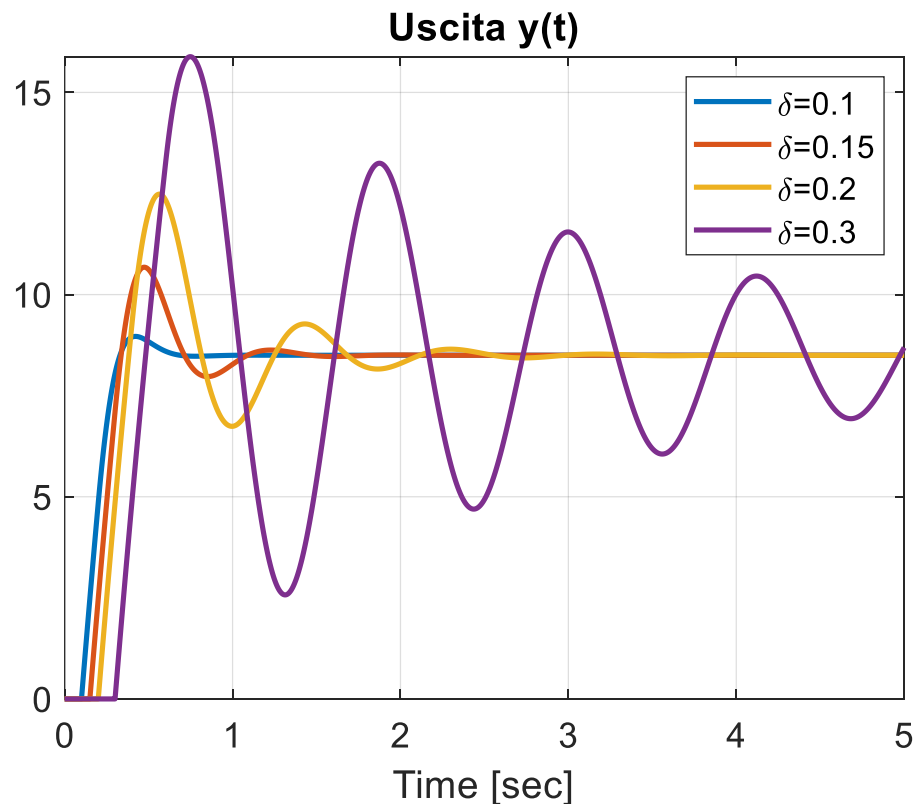
Continuano pertanto a valere tutte le relazioni e proprietà del comportamento di regime studiate in relazione ai sistemi di controllo di tipo zero, uno, due etc.

File: RIT_01.slx



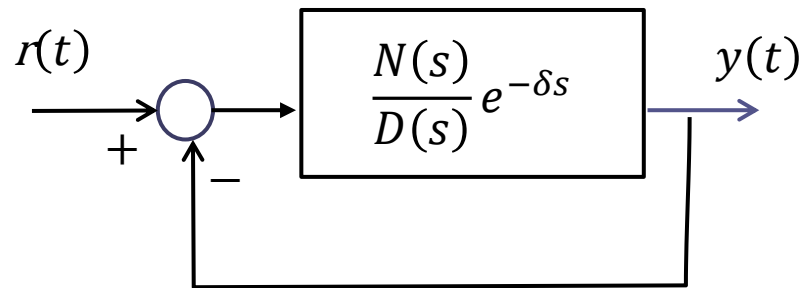
La risposta converge al valore 8.5 determinato sulla carta, e presenta una sovraelongazione **indotta dal ritardo**

Mostriamo, con riferimento al sistema di controllo oggetto dell'esercizio, come le prestazioni del sistema a ciclo chiuso si deteriorano rapidamente al crescere del valore del ritardo. Per valori del ritardo superiori ad una soglia «critica» che impareremo a determinare più avanti il sistema di controllo diventa instabile a ciclo chiuso

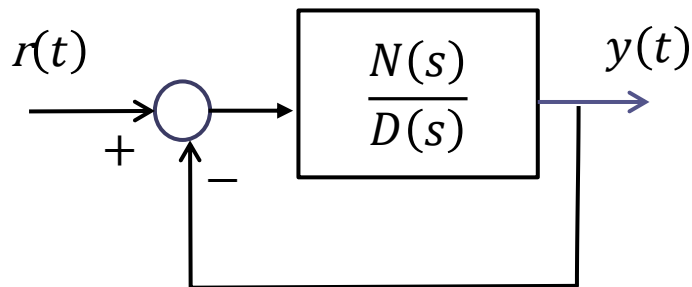


Puntualizzazione sulla stabilità a ciclo chiuso di sistemi con ritardo

La presenza di un termine di ritardo nella FdT a ciclo aperto ha sempre **effetti negativi** sulla stabilità a ciclo chiuso. Ciò significa che il seguente sistema in retroazione

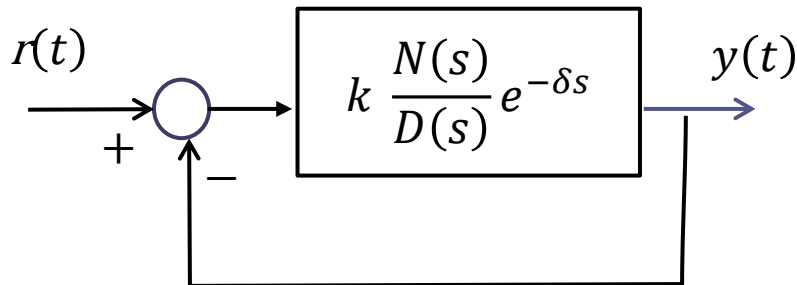


non potrà **mai** essere asintoticamente stabile se non lo è anche il relativo sistema in retroazione nel quale il ritardo sia stato azzerato



Determinazione del «ritardo critico»

Con riferimento al seguente sistema di controllo



$$A(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$

desideriamo rispondere al seguente **quesito**:

Fissato k , ed ipotizzato che se $\delta = 0$ il relativo sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso, qual'è il **massimo valore consentito per il ritardo δ** («ritardo critico δ_{cr} ») tale da garantire la stabilità a ciclo chiuso ?

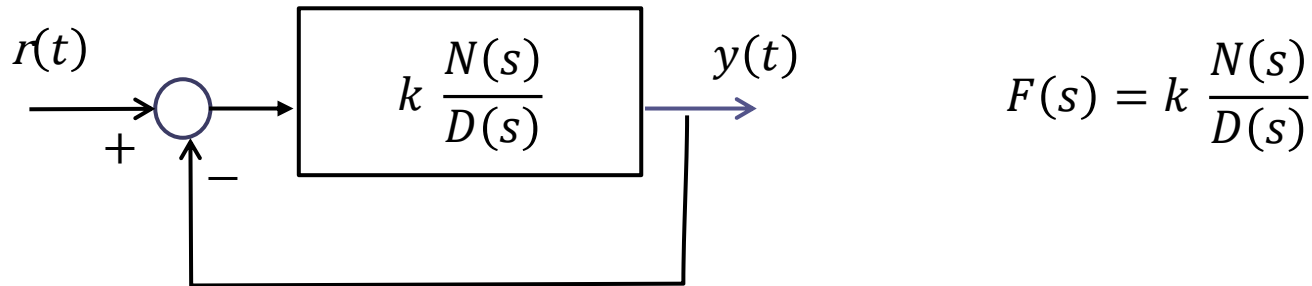
La risposta è:

$$\delta_{cr} = \frac{m_\varphi}{\omega_t}$$

in cui la pulsazione di attraversamento ed il margine di fase sono **associati alla FdT $F(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$** e vengono letti sui relativi diagrammi di Bode

Dimostrazione

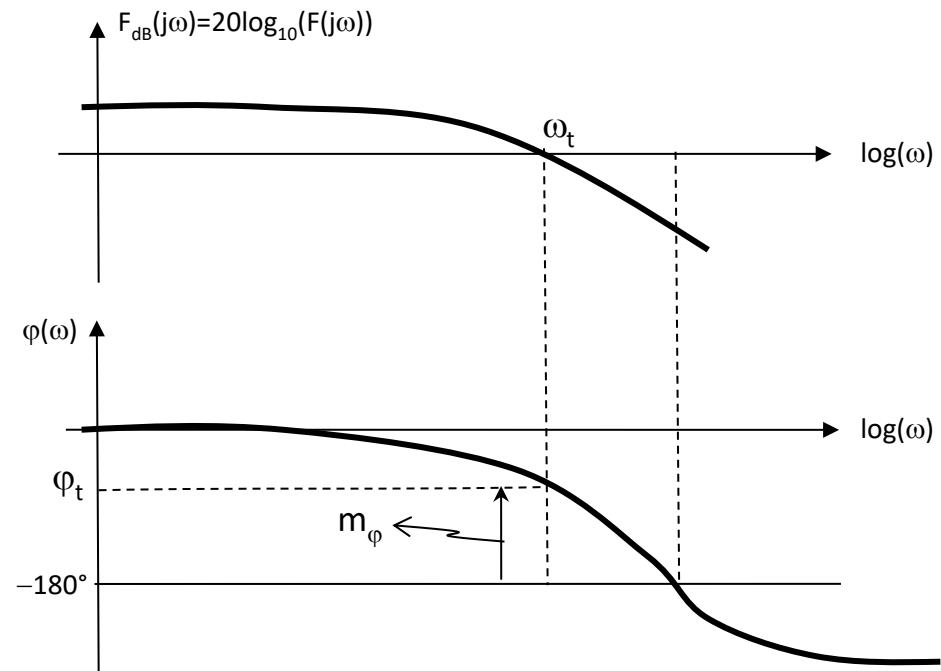
Per ipotesi il seguente sistema di controllo (ricavato ponendo pari a zero il ritardo δ) è asintoticamente stabile a ciclo chiuso



Diagrammi di Bode della $F(s)$

Sulla base del Criterio di Bode, il margine di fase di $F(s)$ sarà positivo.

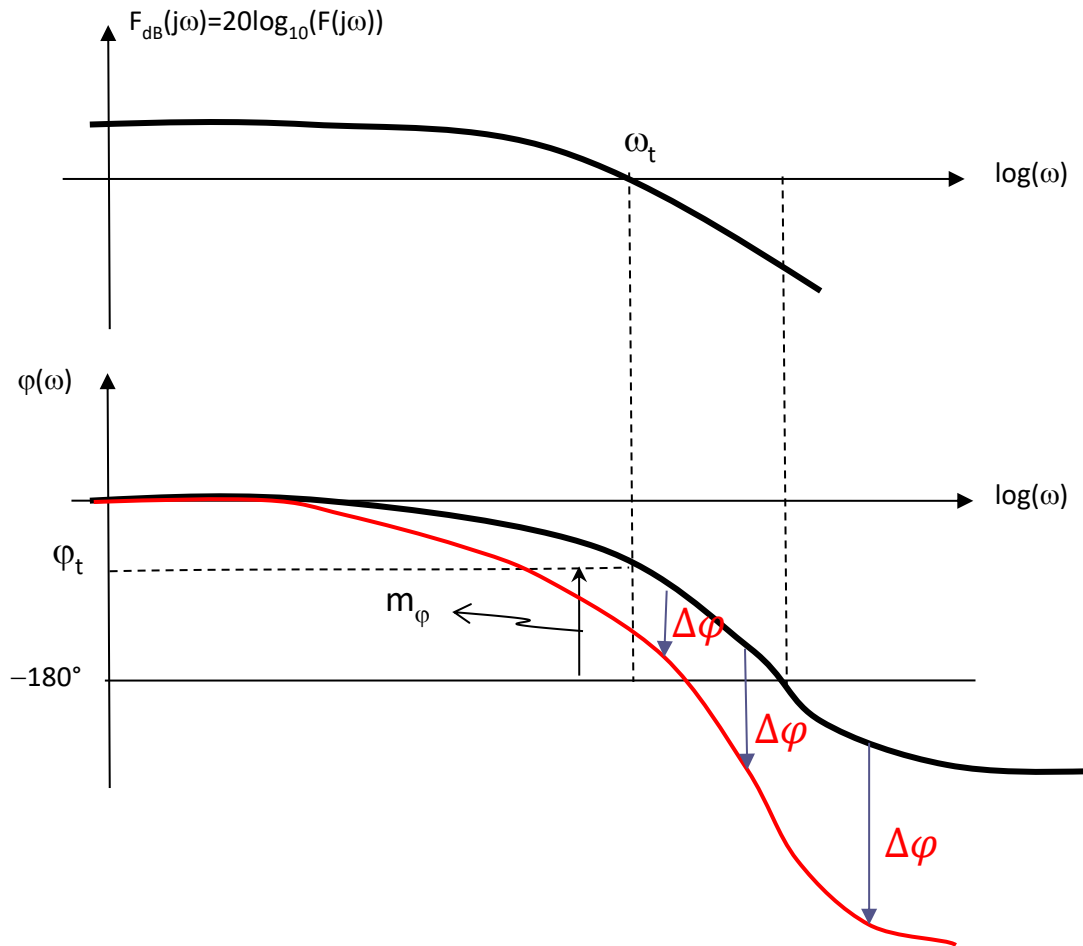
Qual'è l'effetto del termine di ritardo $e^{-\delta s}$ sui diagrammi di Bode?



In cosa differiscono i diagrammi di Bode delle due FdT seguenti ?

$$F(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$$

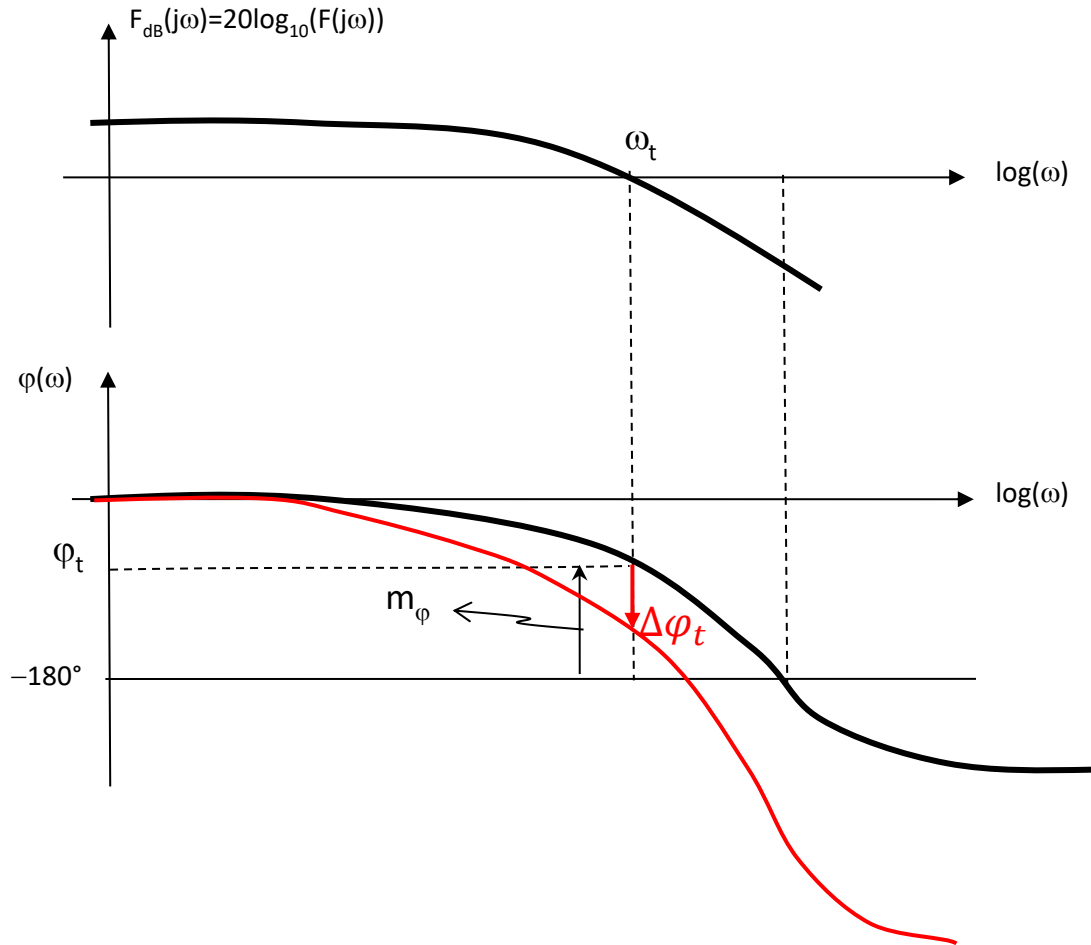
$$A(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\delta s}$$



Il diagramma dei moduli è identico

Il diagramma delle fasi viene alterato. Il termine di ritardo $e^{-\delta s}$ induce nella fase di $A(j\omega)$ uno sfasamento **in ritardo** addizionale che alla generica frequenza ω vale

$$\Delta\varphi = -\delta\omega$$



In corrispondenza della pulsazione di attraversamento ω_t il ritardo induce uno sfasamento $\Delta\varphi_t$ pari a

$$\Delta\varphi_t = -\delta\omega_t$$

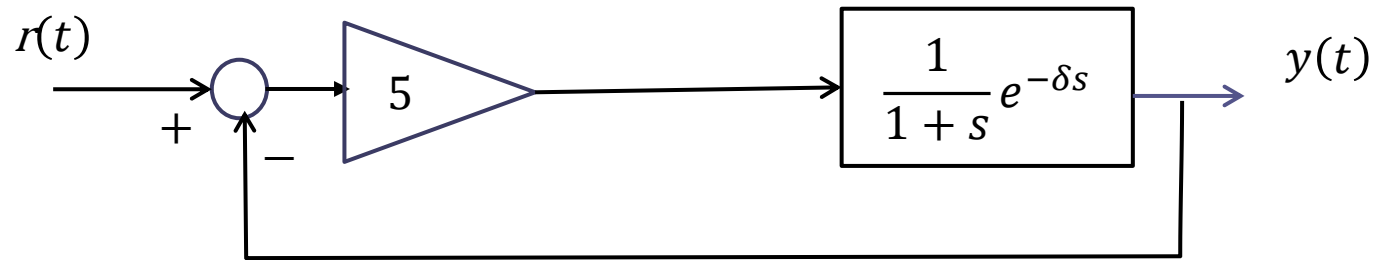
Quanto può valere al massimo tale sfasamento in ritardo $\Delta\varphi_t$ senza che venga pregiudicata la stabilità a ciclo chiuso ?

Desumiamo dal Criterio di Bode che il massimo sfasamento $\Delta\varphi_t$ consentito tale da non pregiudicare la stabilità a ciclo chiuso **è pari al margine di fase**

$$|\Delta\varphi_t| = \delta\omega_t < m_\varphi \quad \Rightarrow \quad \delta < \frac{m_\varphi}{\omega_t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{cr} = \frac{m_\varphi}{\omega_t}}$$

Esercizio RIT-02

Si consideri il seguente sistema in retroazione



Determinare il ritardo critico δ_{cr}

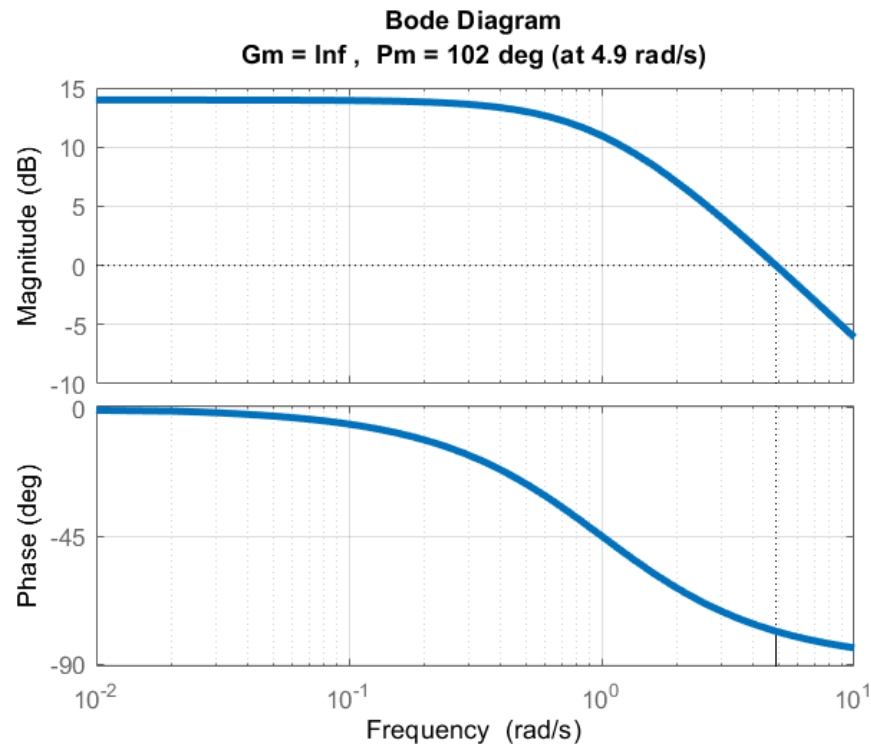
Soluzione $\delta_{cr} = 0.363s$

Determinare il ritardo critico δ_{cr}

$$\delta_{cr} = \frac{m_{\varphi}}{\omega_t}$$

La pulsazione di attraversamento ω_t ed il margine di fase m_{φ} sono associati alla FdT $F(s) = k \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{5}{1+s}$ e vengono letti sui relativi diagrammi di Bode

```
s = tf('s');
F = 5/(s+1);
margin(F), grid
xlim([0.01 10])
```



$$\omega_t = 4.9 \text{ rad/s}$$

$$m_{\varphi} = 102^{\circ} = 1.78 \text{ rad}$$

$$\delta_{cr} = \frac{m_{\varphi}}{\omega_t} = 0.363 \text{ s}$$

Istruzioni Matlab per visualizzare i diagrammi di Bode di una generica FdT di tipo FOPDT nell'intervallo di frequenza che va da 0.01 a 10

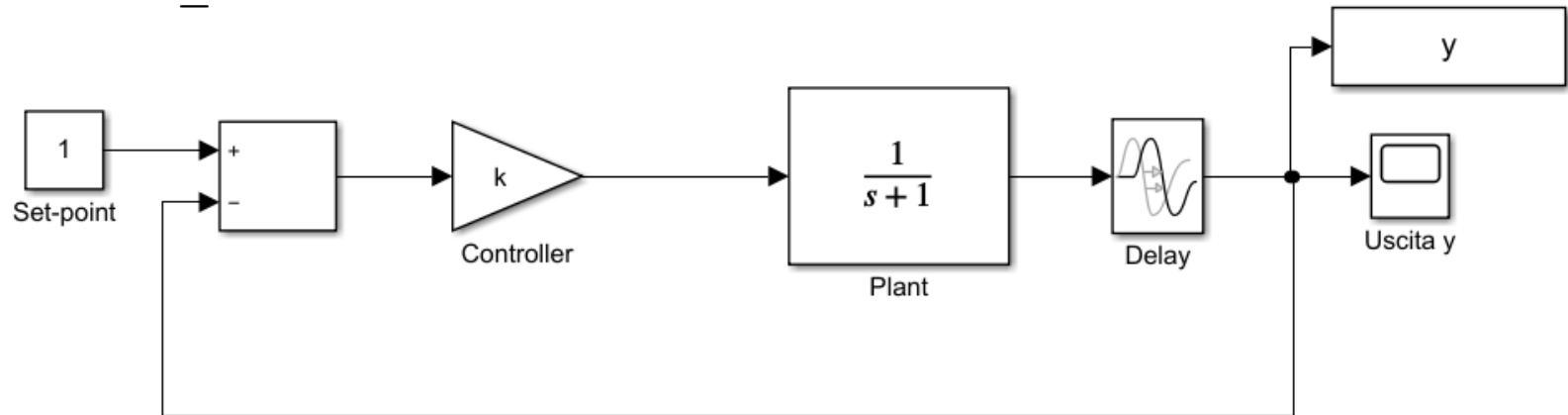
```
k=5;
delta=0.5;
tau=1;

s = tf('s');
L = k*exp(-delta*s)/(tau*s+1);

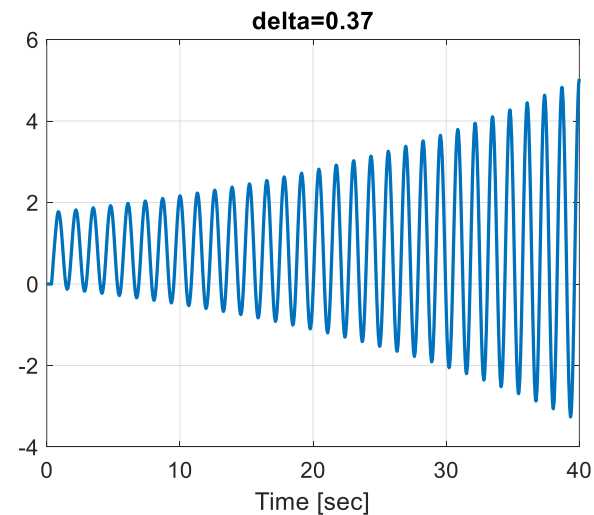
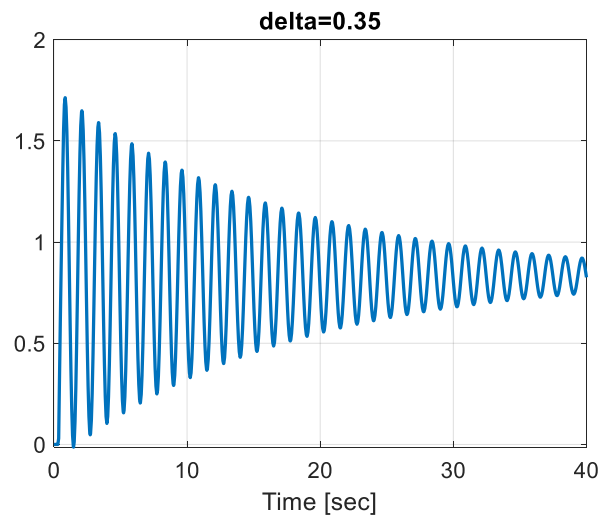
bode(L),grid
xlim([0.01 10])
```

Se si utilizza la funzione `margin` anziché `bode` vengono visualizzati i valori di pulsazione di attraversamento, pulsazione critica, margine di fase e margine di guadagno

File: RIT_02.slx



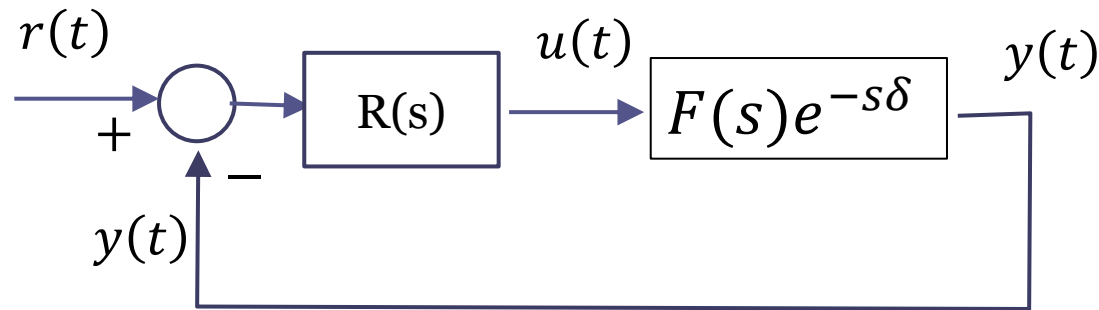
Con riferimento al problema trattato nell'esercizio RIT-02, mostriamo la risposta a ciclo chiuso in corrispondenza di due valori distinti del ritardo, uno di poco inferiore al ritardo critico ed uno di poco superiore



Predittore di Smith

L'architettura denominata «Predittore di Smith» serve per controllare in retroazione processi **asintoticamente stabili** affetti da un ritardo δ tale da rendere problematica la realizzazione di un sistema di controllo a loop singolo come quello riportato nella seguente figura, in cui $F(s)$ rappresenta una FdT espressa mediante un rapporto di polinomi che viene detta «parte razionale» del processo.

Architettura convenzionale a loop singolo

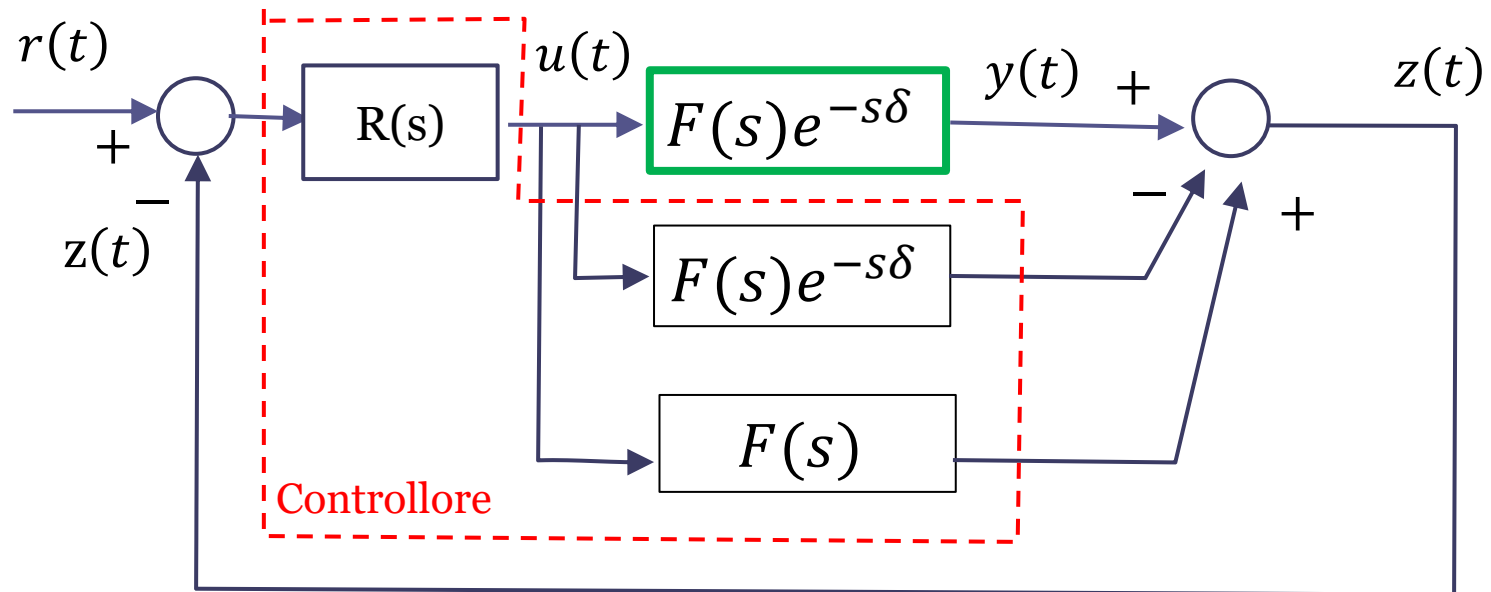


$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{Parte razionale del processo da controllare}$$

$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)e^{-s\delta}}{1 + R(s)F(s)e^{-s\delta}}$$

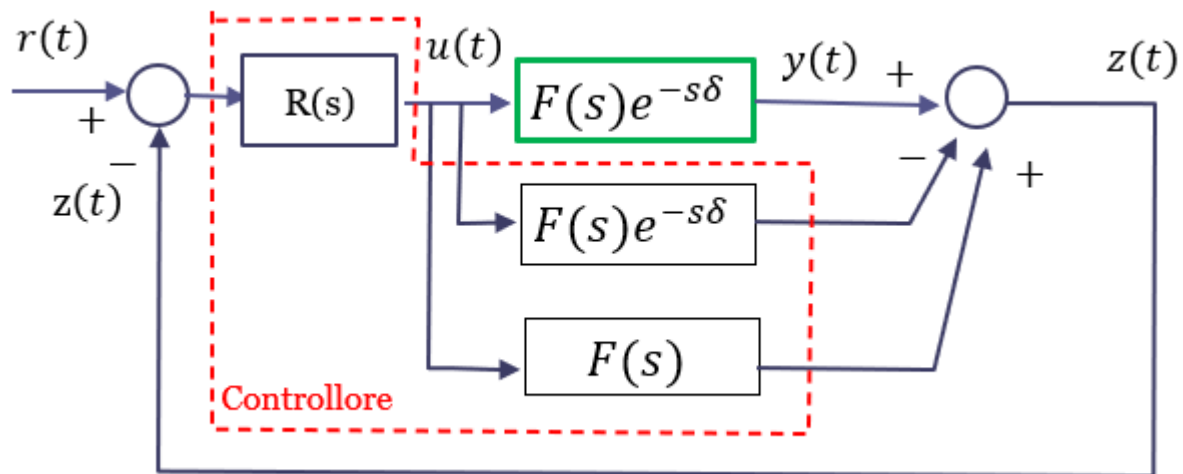
Quando il ritardo δ è elevato rispetto alla costante di tempo più grande del processo (si dice in questo caso che il ritardo «domina» la dinamica del processo) serve una **architettura di controllo più complessa**.

Predittore di Smith



Nella architettura denominata «Predittore di Smith» viene confrontata con il set point una variabile differente dalla variabile di uscita, la variabile $z(t)$, ottenuta sommando all'uscita $y(t)$ del processo dei segnali ausiliari, **generati artificialmente dal sistema di controllo**.

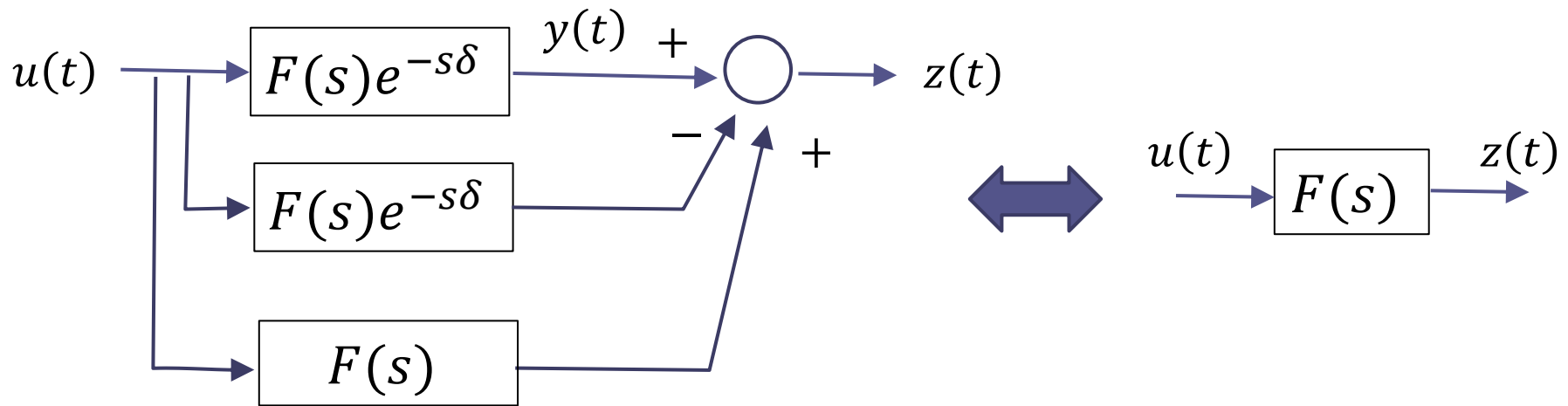
N.B. Tale architettura è applicabile unicamente nel caso in cui il processo $F(s)e^{-s\delta} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-s\delta}$ sia asintoticamente stabile, cioè le radici del polinomio $D(s)$ abbiano parte reale strettamente negativa.



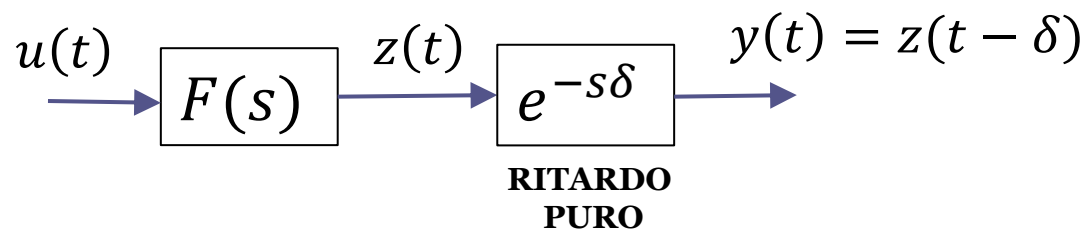
Il sistema di controllo mediante Predittore di Smith **include tutti i blocchi racchiusi all'interno del rettangolo tratteggiato**. Il sistema di controllo fa pertanto uso esplicito della dinamica del processo, e ciò costituisce il principale limite implementativo. In altri termini, per poter implementare il Predittore di Smith si deve disporre della **perfetta conoscenza del modello matematico del processo da controllare**.

I due blocchi $F(s)e^{-s\delta}$ hanno nello schema un significato completamente differente. Quello in alto, evidenziato in verde, rappresenta il processo fisico da controllare, quello sottostante invece è un blocco che fa parte del sistema di controllo, e che viene pertanto realizzato come parte integrante dello schema di controllo. Esso è, per intenderci, un blocco analogo per funzionalità ad un blocco Simulink che **emula** il medesimo legame ingresso-uscita del sistema fisico.

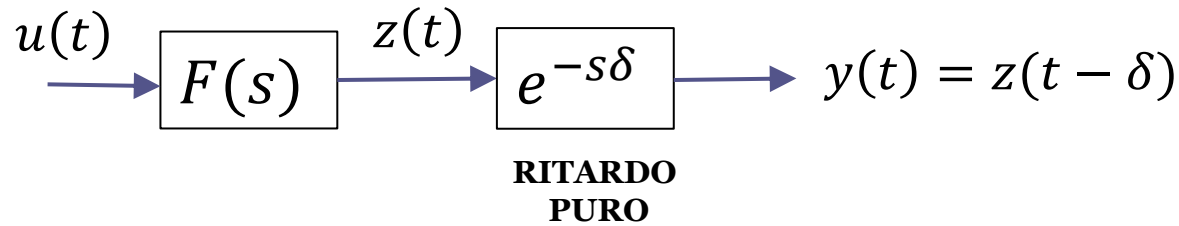
Perchè si chiama «Predittore»? Concentriamoci sulla parte del sistema di controllo che costruisce il segnale $z(t)$ e chiediamoci in che relazione stanno fra loro il segnale $z(t)$ e l'uscita $y(t)$



Poiché il legame fra $u(t)$ e $y(t)$ è descritto dalla FdT $F(s)e^{-s\delta}$, per ottenere $y(t)$ a partire da $z(t)$ si deve far propagare quest'ultimo attraverso un ulteriore blocco avente FdT $e^{-s\delta}$. Tale blocco rappresenta, come abbiamo visto, un **ritardo puro**



Dalla seguente rappresentazione



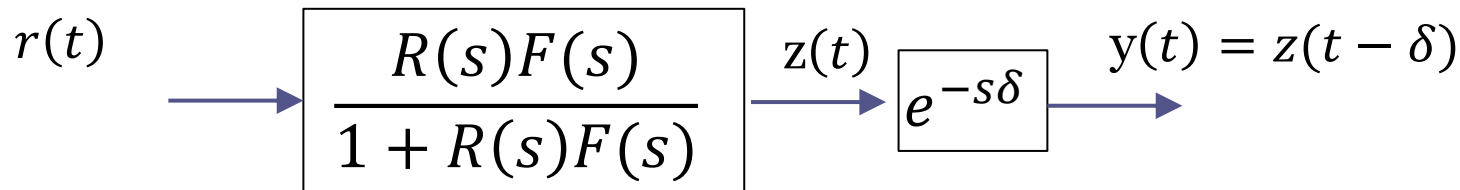
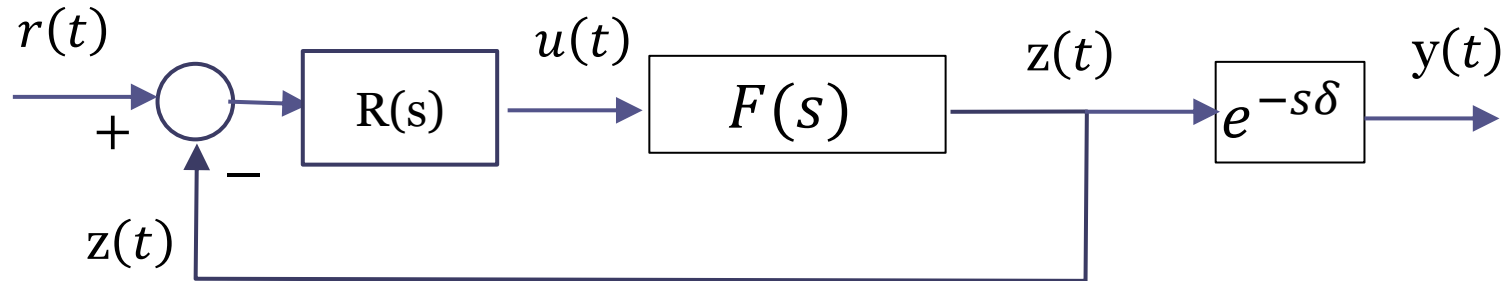
ed in particolare dalla relazione $y(t) = z(t - \delta)$ si desume che

$$z(t) = y(t + \delta)$$

Il valore del segnale $z(t)$ all'istante t rappresenta pertanto una «**predizione**» di quello che sarà il valore dell'uscita all'istante futuro $t + \delta$

E' chiaro che la possibilità di costruire tale «predizione» del comportamento futuro del processo discende dalla perfetta conoscenza del suo modello matematico

Sulla base delle analisi precedentemente svolte, lo schema di controllo con Predittore di Smith può essere analizzato riferendosi al seguente **schema equivalente**



Funzione di trasferimento a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita

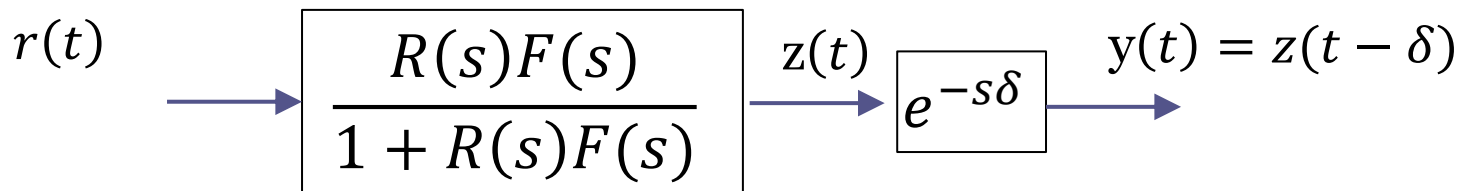
$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)}{1 + R(s)F(s)} e^{-s\delta}$$

L'espressione ricavata per la FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)}{1+R(s)F(s)} e^{-s\delta}$$

rende estremamente semplice analizzare la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo, che sarà unicamente determinata dai poli della FdT $\frac{R(s)F(s)}{1+R(s)F(s)}$

La seguente decomposizione



fornisce inoltre una facile soluzione al problema della determinazione delle caratteristiche della variabile di uscita. L'evoluzione temporale della variabile $z(t)$ può essere analizzata (e anche «imposta» mediante una opportuna scelta del regolatore $R(s)$) con le tecniche viste in precedenza per i sistemi dinamici **non affetti da ritardo**. L'evoluzione temporale della variabile di uscita $y(t)$ replicherà fedelmente quella della variabile $z(t)$ con l'unica differenza di un ritardo temporale δ fra i due segnali.

FdT a ciclo chiuso con e senza il predittore di Smith

Senza il predittore di Smith (con sistema di controllo tradizionale a loop singolo):

$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)}{1 + R(s)F(s)e^{-s\delta}} e^{-s\delta}$$

Usando il predittore di Smith:

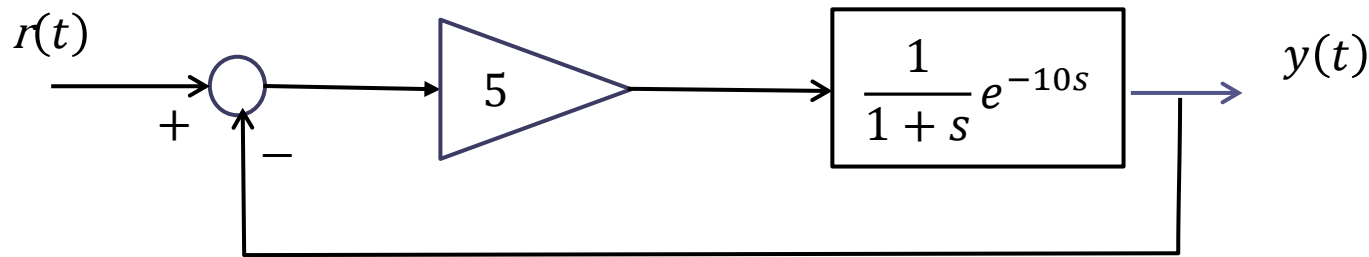
$$W_r^y(s) = \frac{R(s)F(s)}{1 + R(s)F(s)} e^{-s\delta}$$

Si nota come utilizzando il predittore di Smith la FdT a ciclo chiuso ha una forma differente. **Il termine di ritardo è sparito dal denominatore.**

Utilizzando il predittore di Smith la stabilità a ciclo chiuso dipende unicamente dalla posizione nel piano dei poli della FdT $\frac{R(s)F(s)}{1 + R(s)F(s)}$, che è una FdT **algebraica**.

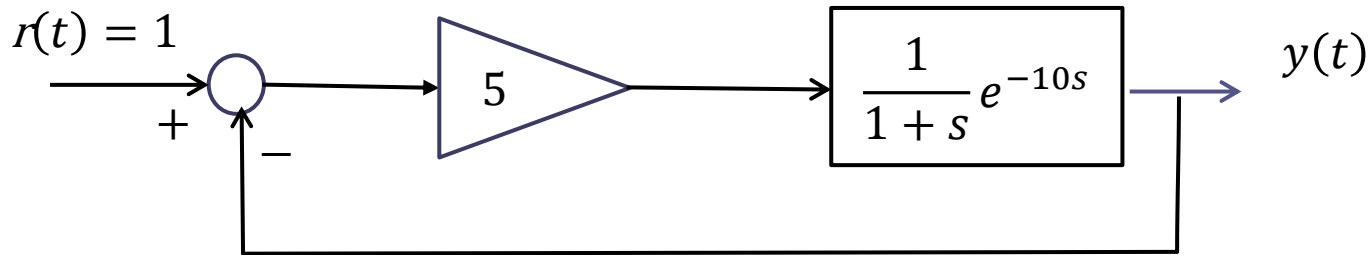
Esercizio RIT-03

Si consideri il seguente sistema in retroazione



che risulta essere **instabile a ciclo chiuso** (sulla base dei riscontri dell'esercizio RTT-02).
Riprogettarne l'architettura implementando il Predittore di Smith e mantenendo il medesimo controllore proporzionale.

Per lo schema con Predittore di Smith determinare l'evoluzione completa (transitoria e di regime) dell'uscita in risposta ad un set point a gradino unitario

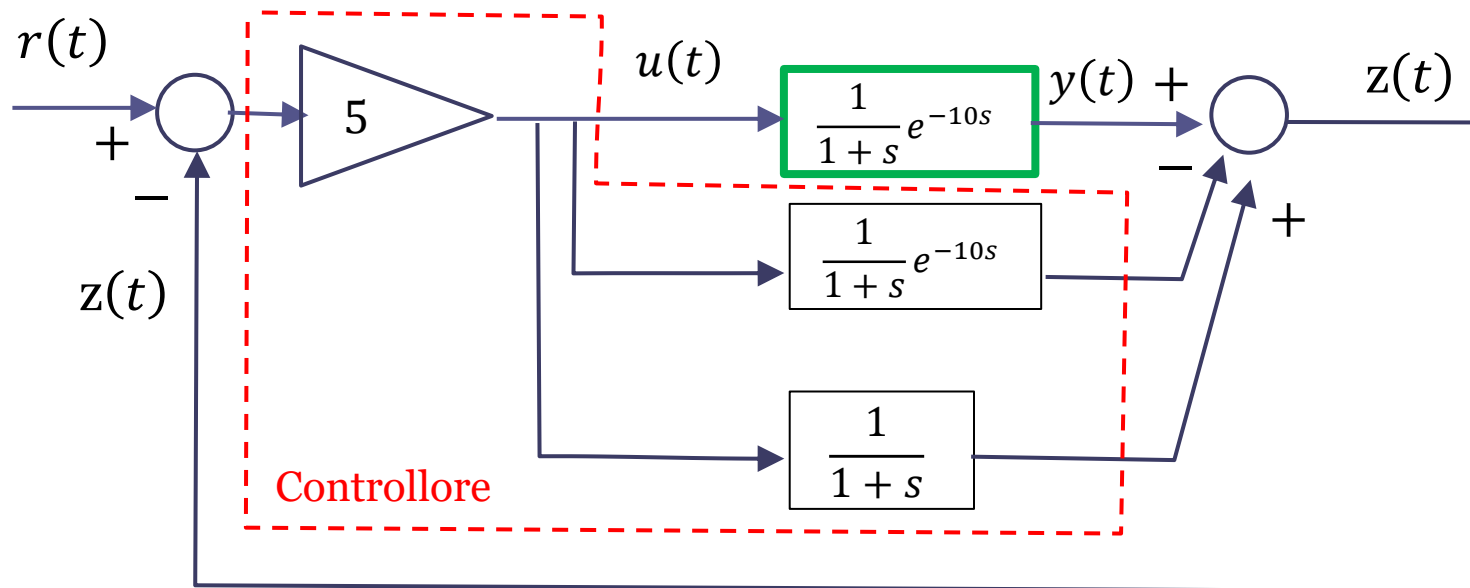


$$W_r^y(s) = \frac{5}{s + 1 + 5e^{-10s}} e^{-10s}$$

instabile a ciclo chiuso



Schema a blocchi della architettura basata sul Predittore di Smith

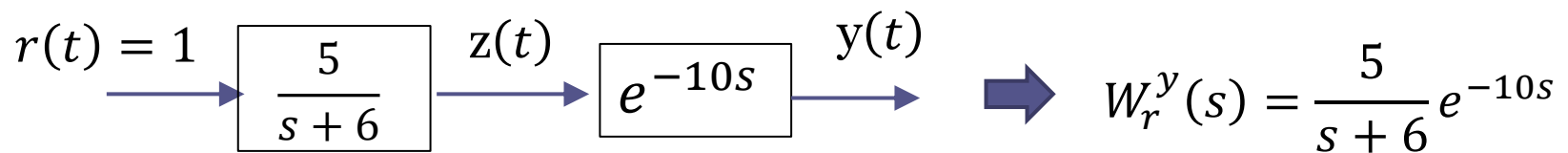
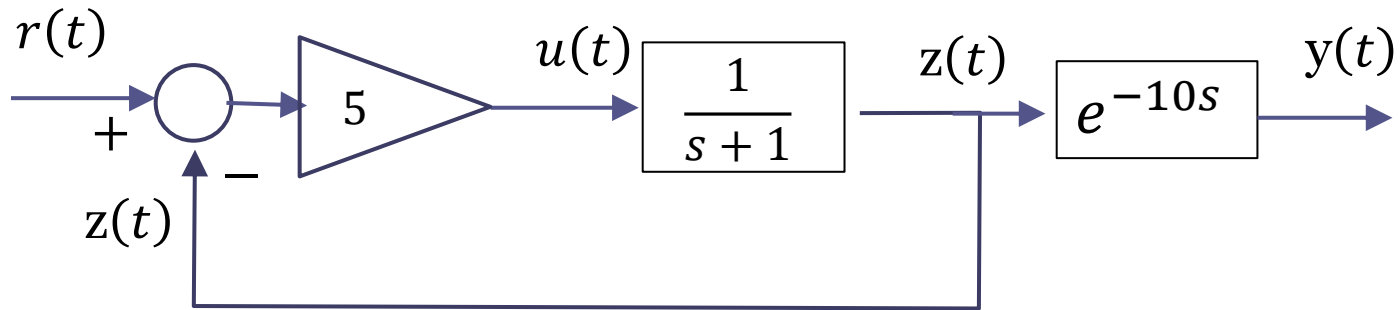


Lo schema in figura garantisce la stabilità asintotica a ciclo chiuso qualunque sia il valore del ritardo in conseguenza del fatto che la FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita (come giustificato nella slide successiva) è la seguente

$$W_r^y(s) = \frac{5}{s+6} e^{-10s}$$

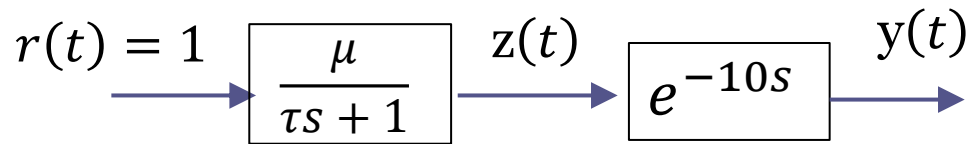
Evoluzione dell'uscita in risposta ad un set point a gradino unitario

Schema equivalente

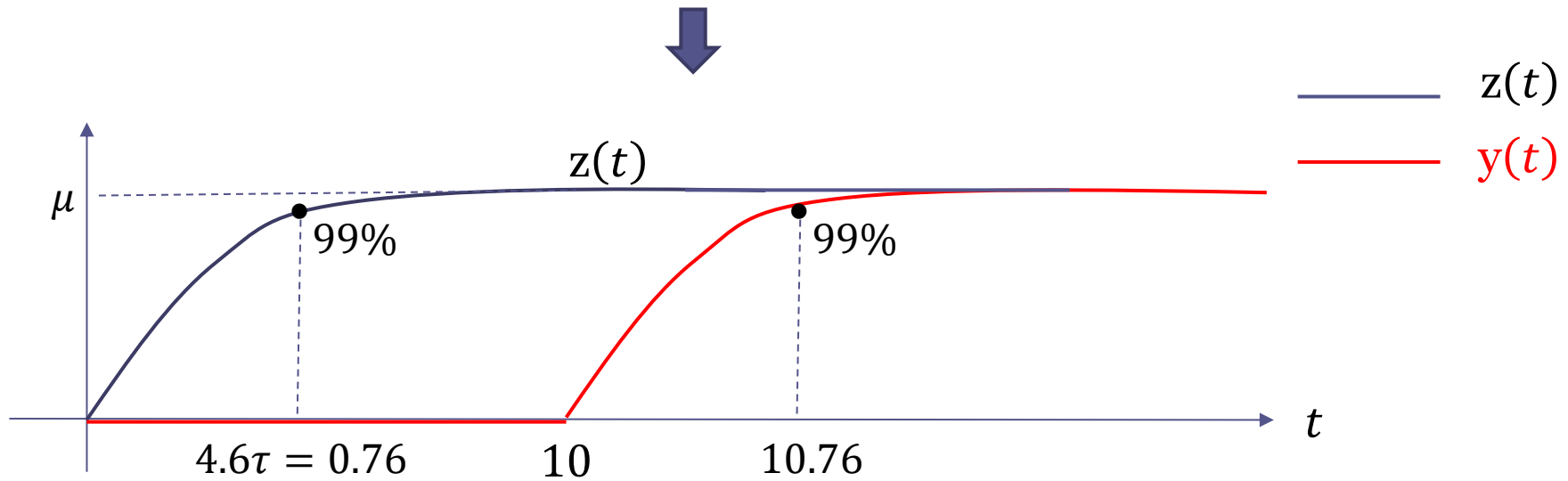


$$\frac{5}{s+6} = \frac{5/6}{\frac{1}{6}s+1}$$

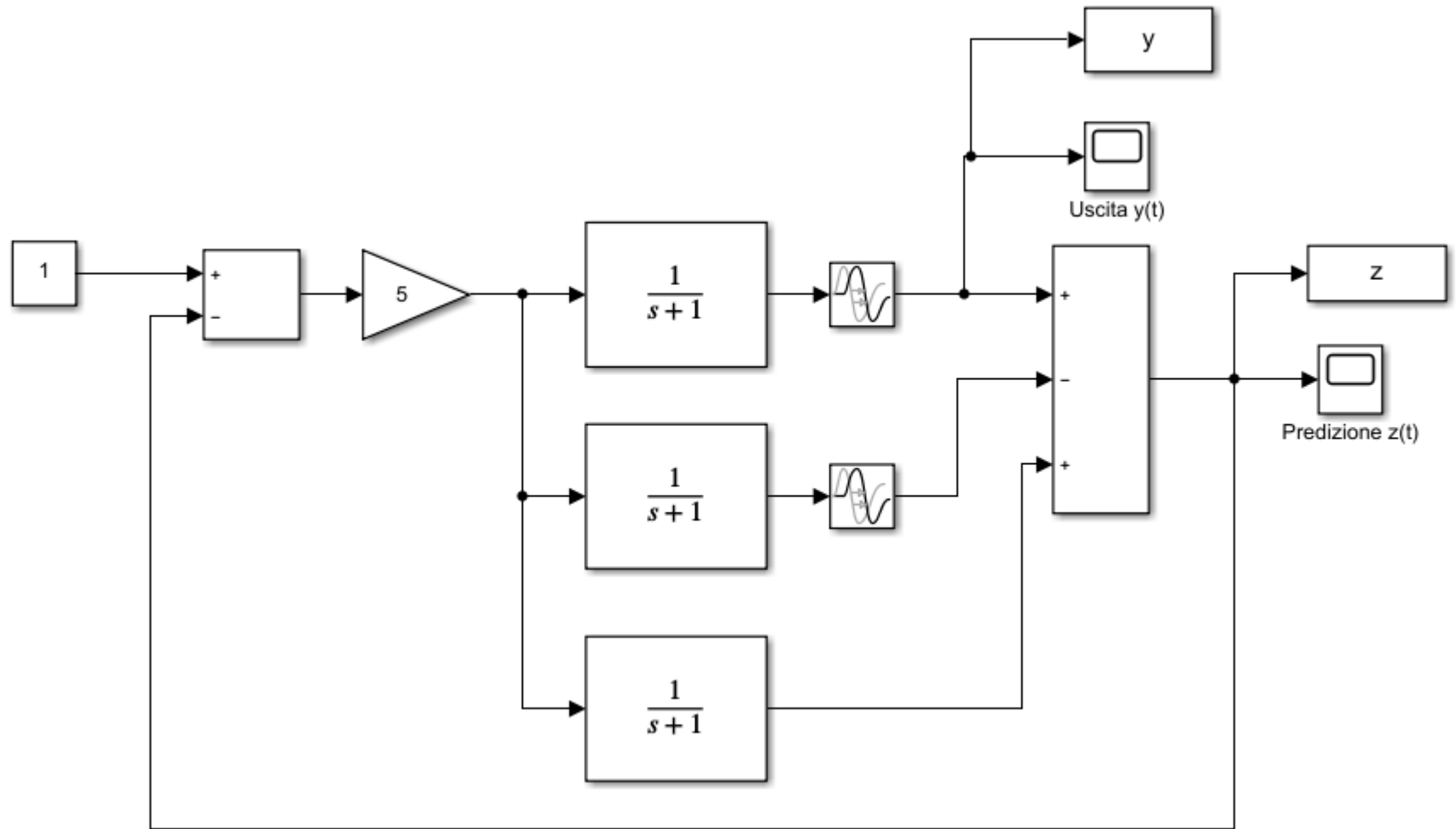
Sistema STC con guadagno $\mu = 5/6$ e costante di tempo $\tau = \frac{1}{6}$. La risposta al gradino unitario di tale FdT definisce l'evoluzione temporale del segnale $z(t)$. L'uscita $y(t)$ replica l'evoluzione temporale di $z(t)$ con 10 secondi di ritardo.

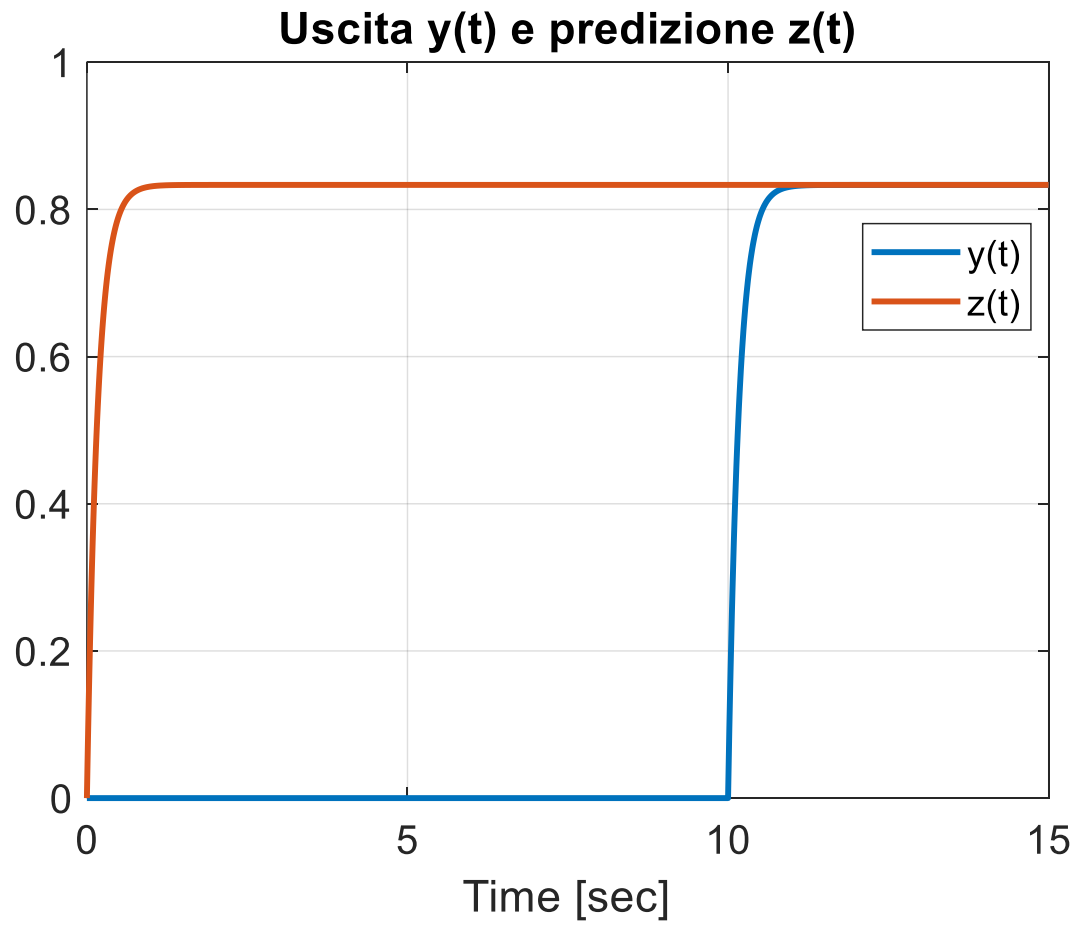


$$\mu = \frac{5}{6} \quad \tau = \frac{1}{6}$$



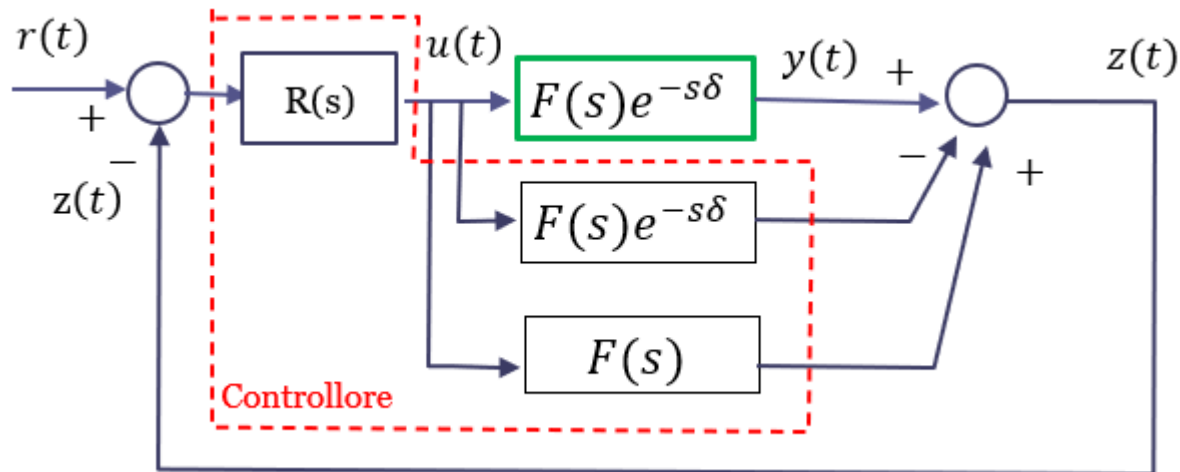
File: RIT_03.slx



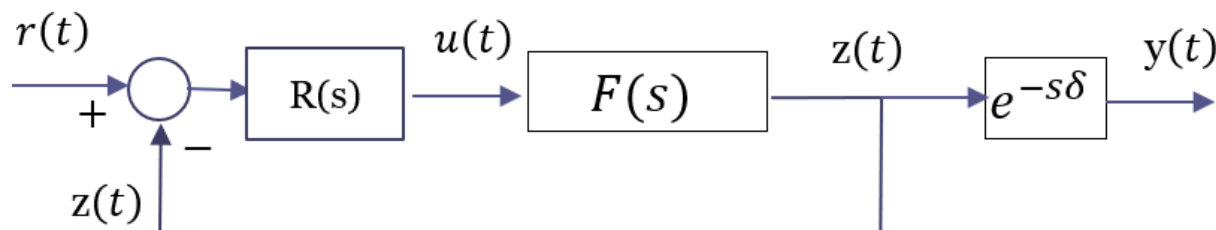


Progetto del regolatore $R(s)$

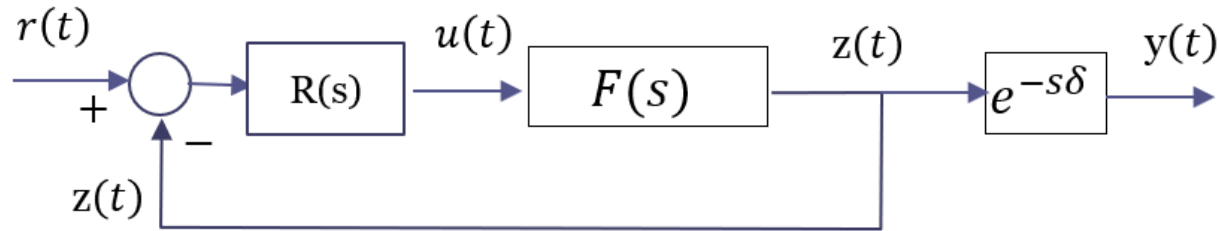
Vediamo come sviluppare il progetto del regolatore $R(s)$ volto a garantire il soddisfacimento di determinate specifiche sul comportamento di regime e transitorio della variabile di uscita



Per comprendere come deve essere impostato il ragionamento risulta utile riferirsi al seguente schema equivalente.

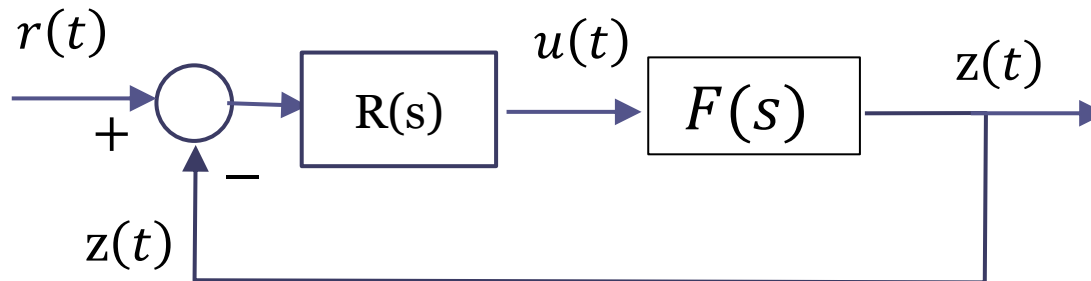


Per comprendere come deve essere impostato il ragionamento risulta utile riferirsi al seguente **schema equivalente**.

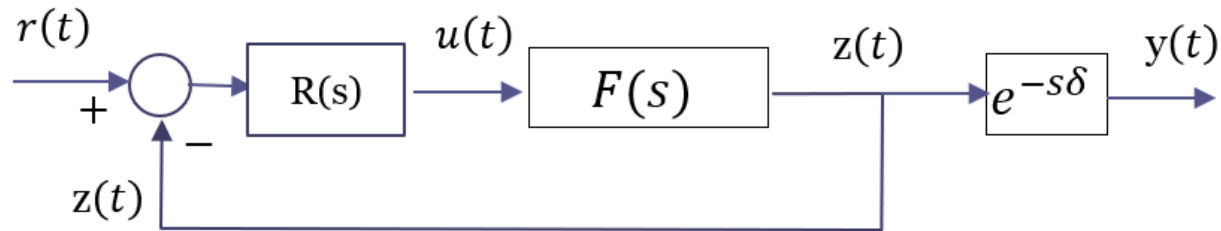


Il comportamento di regime dell'uscita $y(t)$ coincide con quello del segnale $z(t)$.

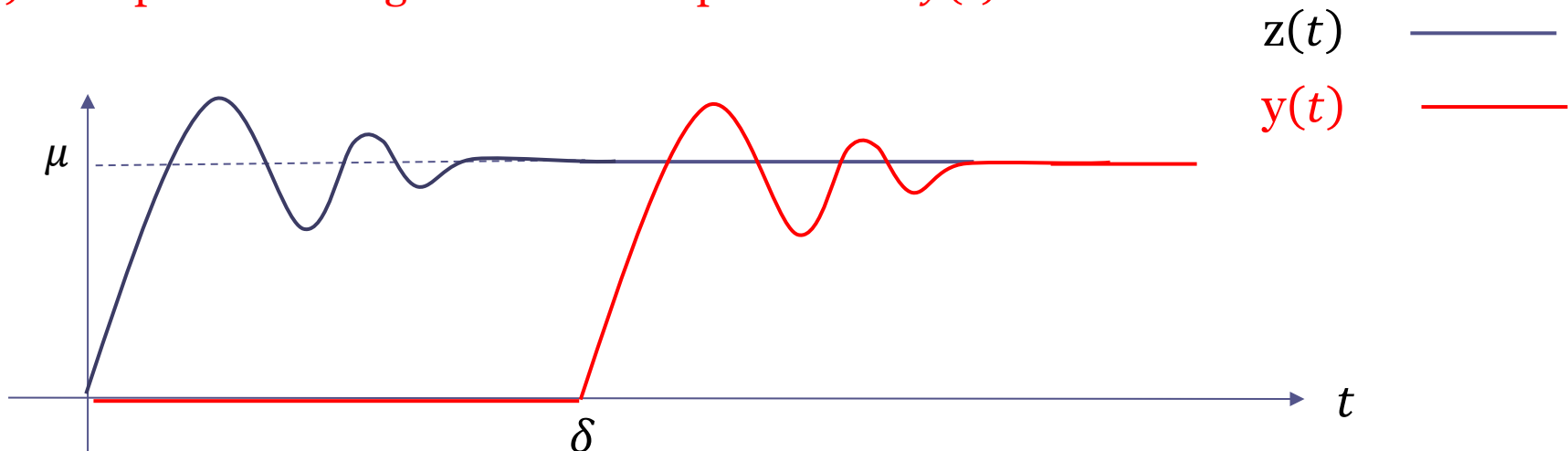
Per garantire il soddisfacimento delle **specifiche sul comportamento di regime** (ad esempio la precisione statica) sarà pertanto sufficiente progettare il regolatore per fare in modo che tali specifiche siano soddisfatte dal segnale $z(t)$. In altri termini, il progetto del regolatore va fatto con riferimento al seguente sistema in retroazione, in cui il processo coincide con la sola **parte algebrica** $F(s)$ del processo complessivo $F(s)e^{-\delta s}$



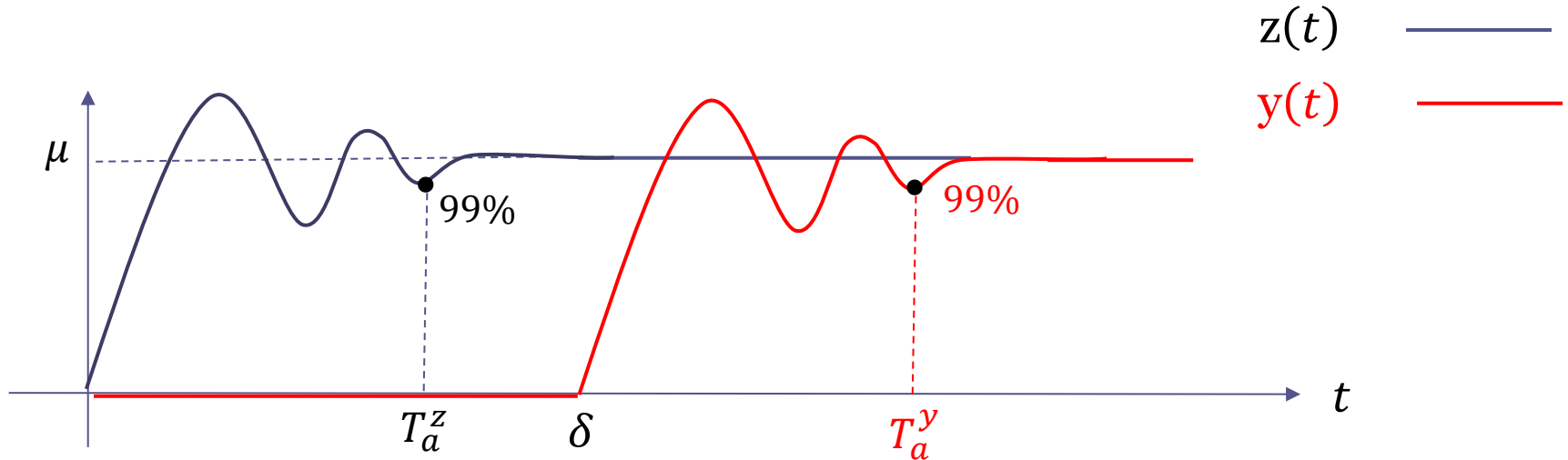
Circa le specifiche sul comportamento transitorio si deve tenere in considerazione il fatto che l'evoluzione temporale della variabile di uscita $y(t)$ replicherà fedelmente quella della variabile $z(t)$ con l'unica differenza di un ritardo temporale δ fra i due segnali.



Ciò implica che $z(t)$ ed $y(t)$ sono caratterizzati dalla **medesima sovralongazione**, e pertanto **se viene garantita una certa specifica sulla sovralongazione della variabile $z(t)$ tale specifica sarà garantita anche per l'uscita $y(t)$**



Invece i **tempi di assestamento** delle due curve differiscono di δ



$$T_a^y = T_a^z + \delta$$

Se ad esempio il ritardo δ vale 1, per garantire un tempo di assestamento della uscita $y(t)$ minore o uguale di 1.2 si dovrà progettare il regolatore in modo da imporre un tempo di assestamento per la variabile $z(t)$ minore o uguale di 0.2

(chiaramente, se il ritardo δ vale 1 secondo non è possibile fare in modo che il tempo di assestamento di $y(t)$ sia inferiore ad 1 secondo, dato che l'uscita si mantiene identicamente nulla per $t \in [0, \delta]$ ed inizia a «rispondere» solo per $t > \delta$)

Esercizio RIT-04

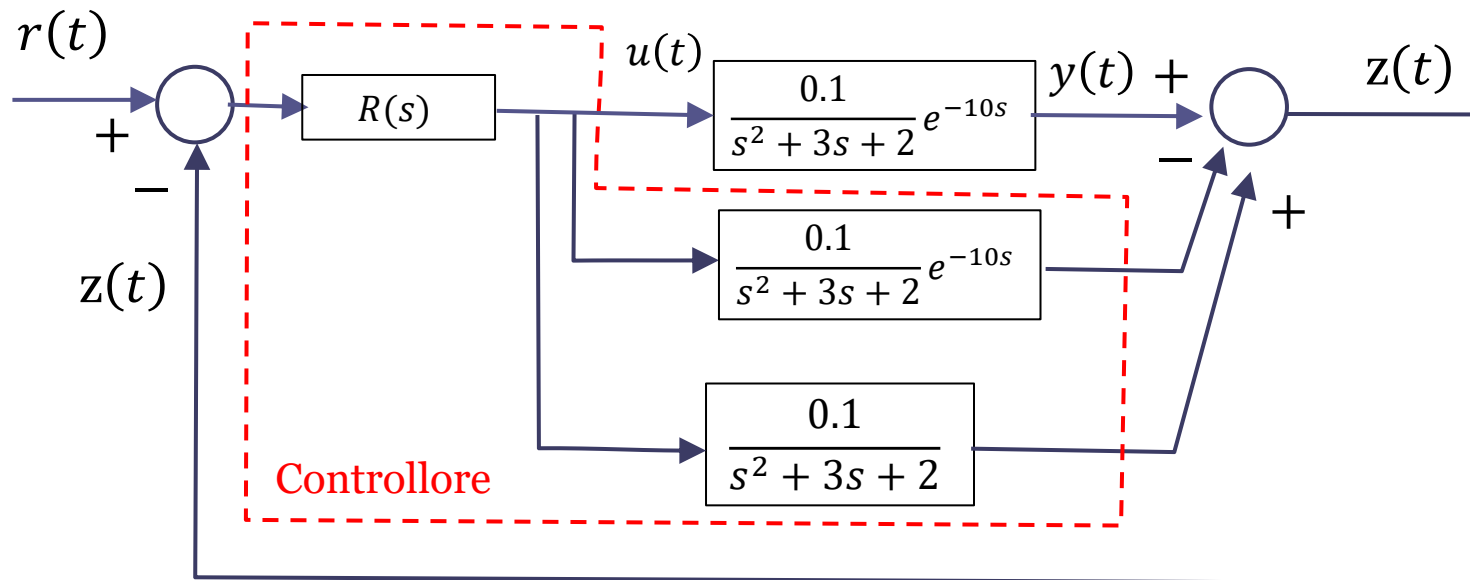
Con riferimento al processo $P(s) = \frac{0.1}{s^2+3s+2} e^{-10s}$ si progetti un sistema di controllo a ciclo chiuso in grado di garantire la precisione statica ed una risposta ad un set point costante monotona crescente e caratterizzata da un tempo di assestamento non superiore a 24 secondi

S1 precisione statica

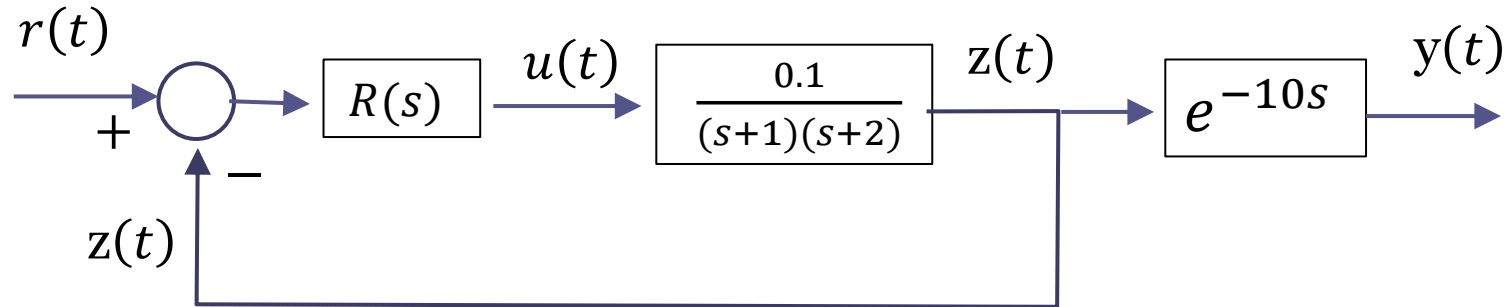
S2 risposta ad un set point costante monotona crescente

S3 tempo di assestamento non superiore a 24 secondi

Schema a blocchi della architettura basata sul Predittore di Smith



Per il progetto del regolatore facciamo riferimento allo **schema equivalente**



Si deve progettare il regolatore $R(s)$ in modo che $z(t)$ soddisfi il requisito di precisione statica, esibisca una risposta al gradino monotona crescente, ed il suo tempo di assestamento sia non superiore a $T^* = 14$ secondi ($= 24 - 10$)

$R(s)$ deve contenere un polo nell'origine. Inseriamo anche uno zero in modo da realizzare un controllore con grado relativo nullo. In prima battuta, posizioniamo lo zero sovrapposto al polo del processo più in bassa frequenza

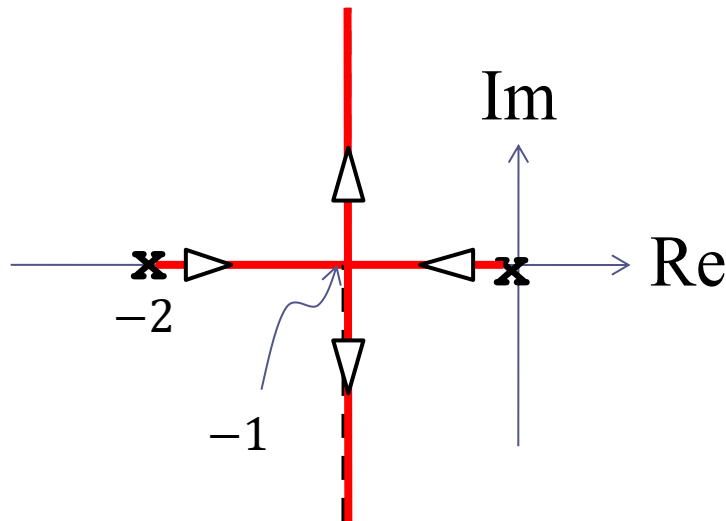
$$R(s) = K_R \frac{s + 1}{s}$$

Tracciamo il LdR per comprendere l'effetto della variazione del guadagno K_R sui poli a ciclo chiuso

$$R(s) = K_R \frac{s + 1}{s}$$

$$L(s) = \frac{s + 1}{s} \cdot \frac{0.1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{0.1}{s(s + 2)}$$

$\bar{k} = 0.1$ Guadagno in alta frequenza di $L(s)$



Taratura del punto doppio: $K_R = 10$

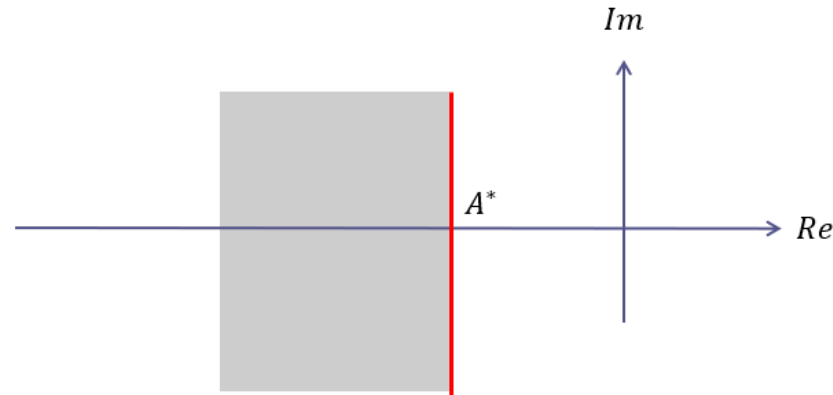
$$K_R = \frac{1}{\bar{k}} \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{0.1} \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

La specifica S1 è soddisfatta grazie alla presenza nella FdT a ciclo aperto del polo nell'origine.

La specifica S2 implica che i poli a ciclo chiuso debbano essere tutti **reali**

$$0 < K_R \leq 10$$

La specifica S3 implica un vincolo sulla parte reale dei 2 poli a ciclo chiuso cui corrisponde la regione ammissibile per i poli avente la forma mostrata in figura



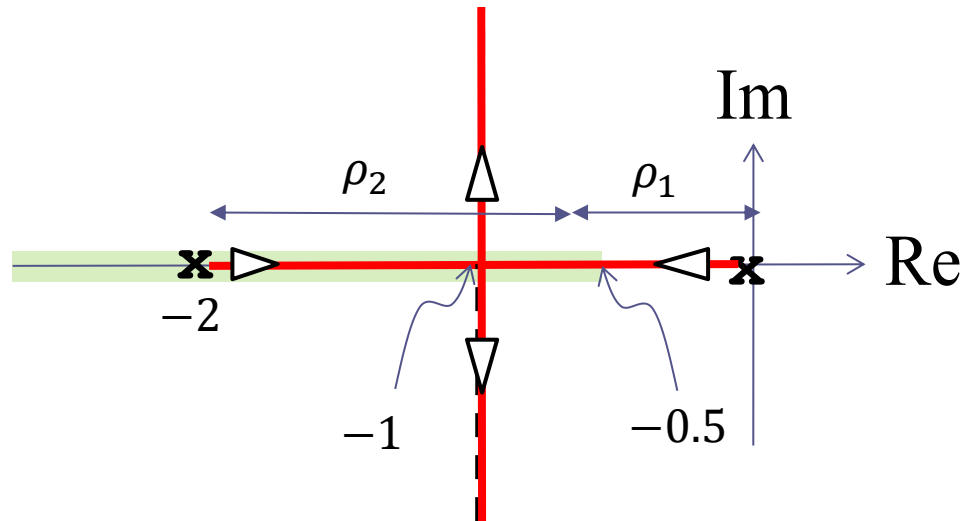
Per il calcolo di A^* si presti attenzione al fatto che si deve considerare un T^* ridotto di 10 rispetto al valore di specifica (a causa della presenza del ritardo)

$$T_a \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore al primo} \end{cases}$$

$$T^* = 14$$

$$A^* = -\frac{7}{T^*} = -\frac{7}{14} = -0.5$$

La regione ammissibile è quindi la porzione dell'asse reale alla sinistra del punto di ascissa -0.5



La taratura del punto dell'asse reale posizionato sul bordo della regione ammissibile (il punto di ascissa -0.5) fornisce come risultato

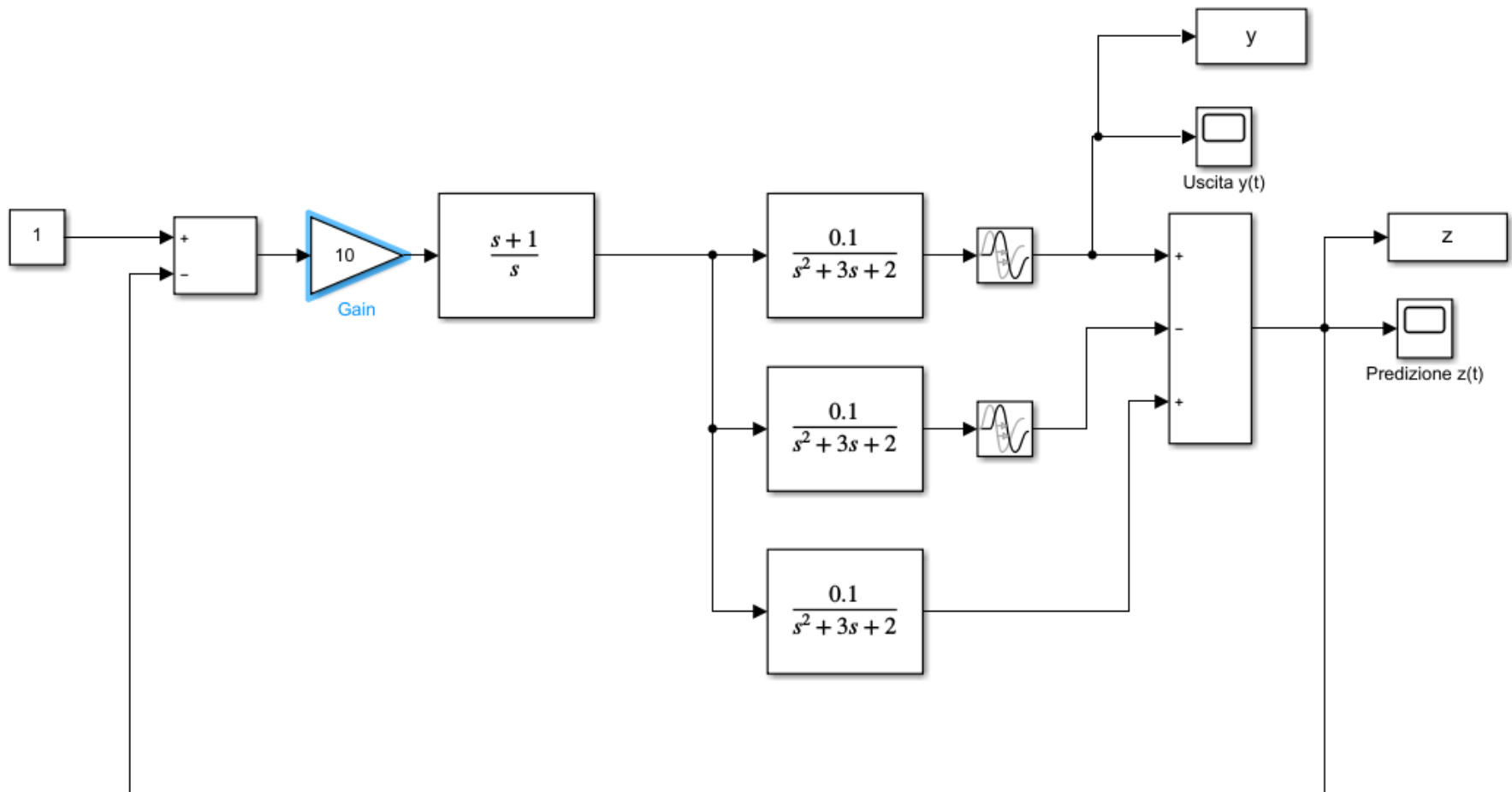
$$K_R = \frac{1}{k} \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{0.1} \cdot 0.5 \cdot 1.5 = 7.5$$

L'esercizio è pertanto risolto dal regolatore

$$R(s) = K_R \frac{s + 1}{s} \quad 7.5 \leq K_R \leq 10$$

File: RIT_04.slx

Verifichiamo mediante Simulink le prestazioni del sistema di controllo progettato



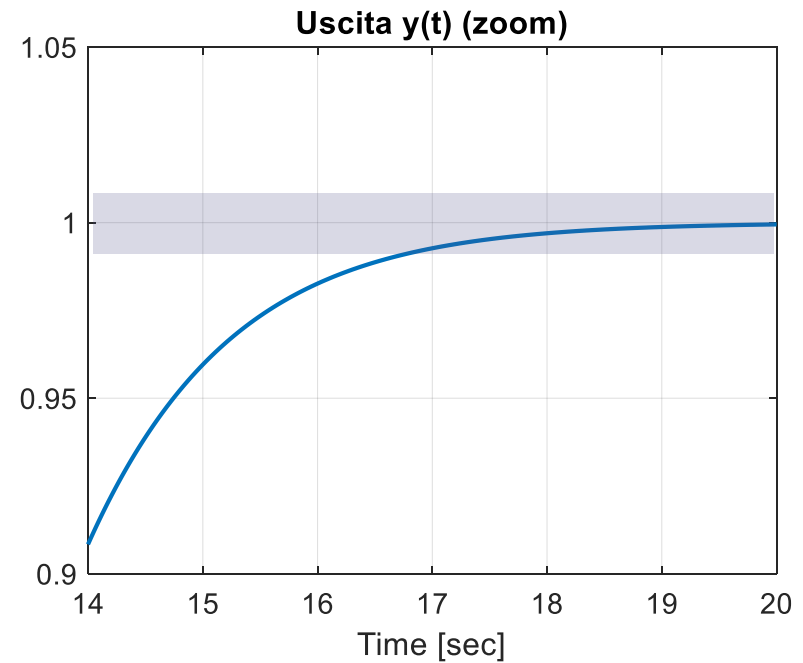
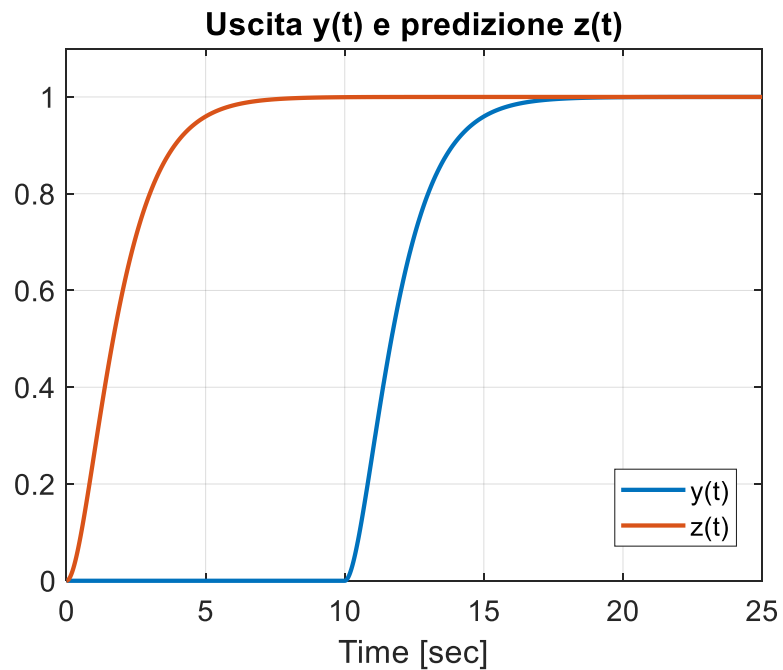
S1 precisione statica



S2 risposta ad un set point costante monotona crescente

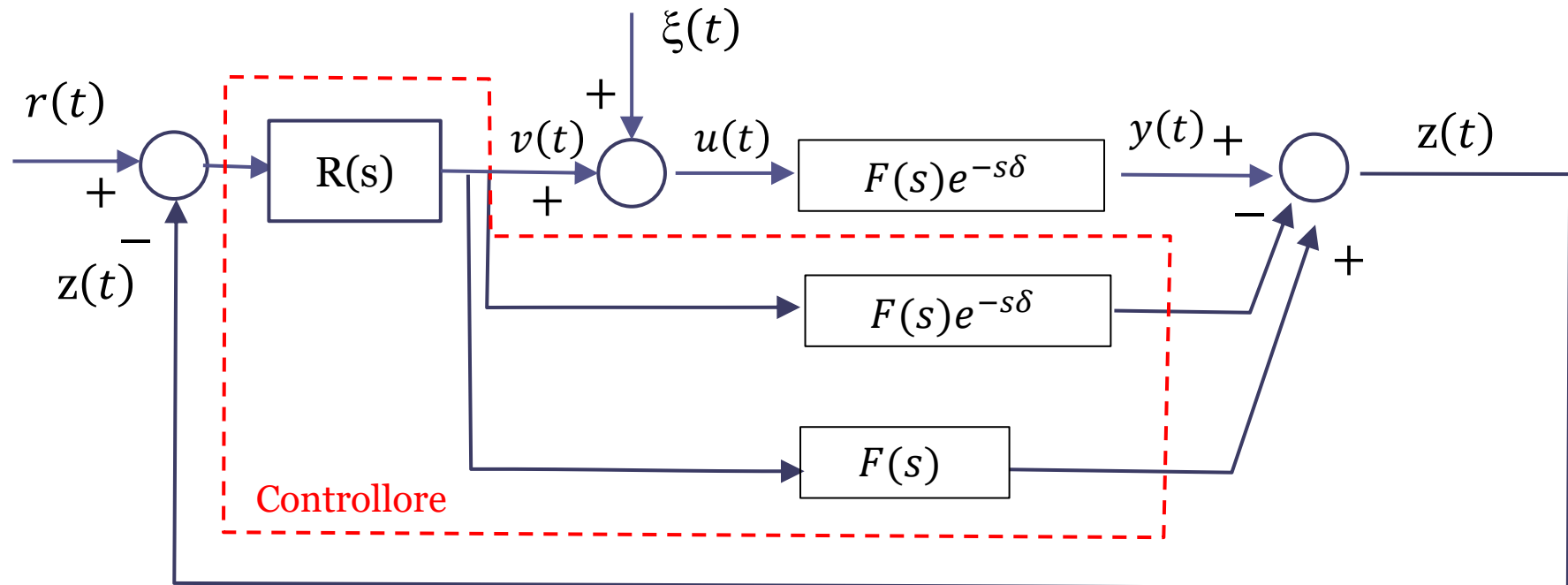


S3 tempo di assestamento non superiore a 24 secondi



Predittore di Smith in presenza di disturbi

L'analisi delle prestazioni di un sistema di controllo con Predittore di Smith in presenza di disturbi non è banale.

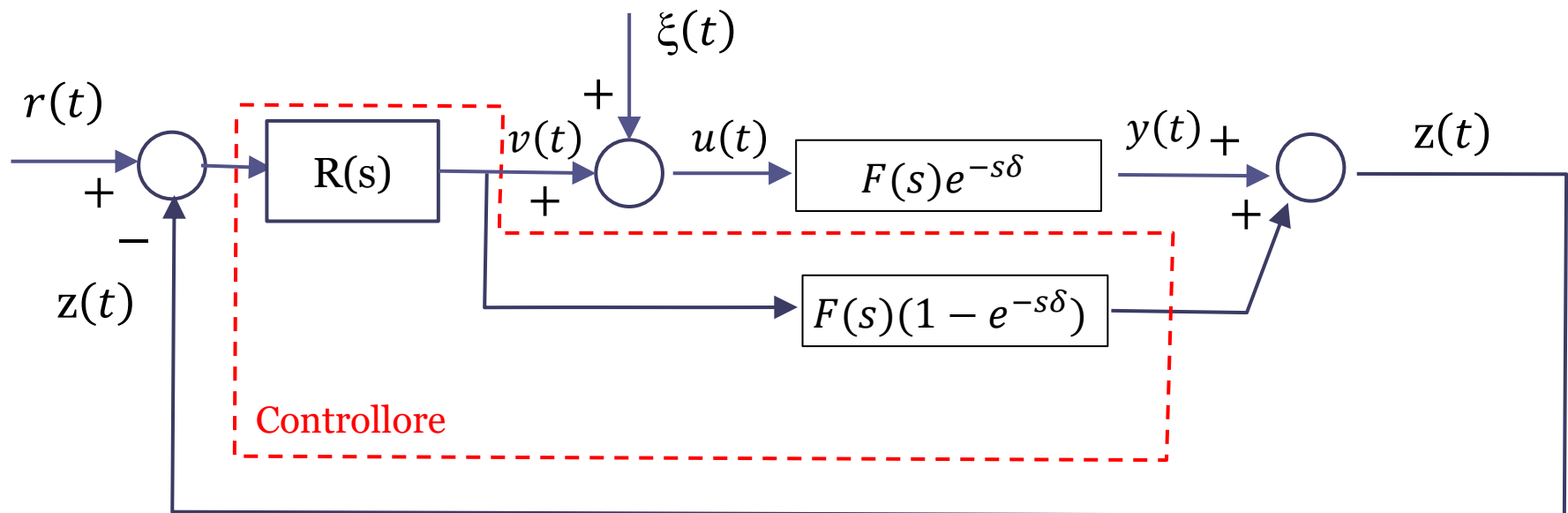


Per determinare la FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita non è possibile semplificare le tre FdT combinandole fra loro secondo lo schema in parallelo in quanto tali FdT **non sono più in parallelo**. Infatti il processo riceve in ingresso il segnale $u(t) = v(t) + \xi(t)$ mentre i due blocchi sottostanti ricevono in ingresso il segnale $v(t)$ prodotto in uscita dal regolatore $R(s)$

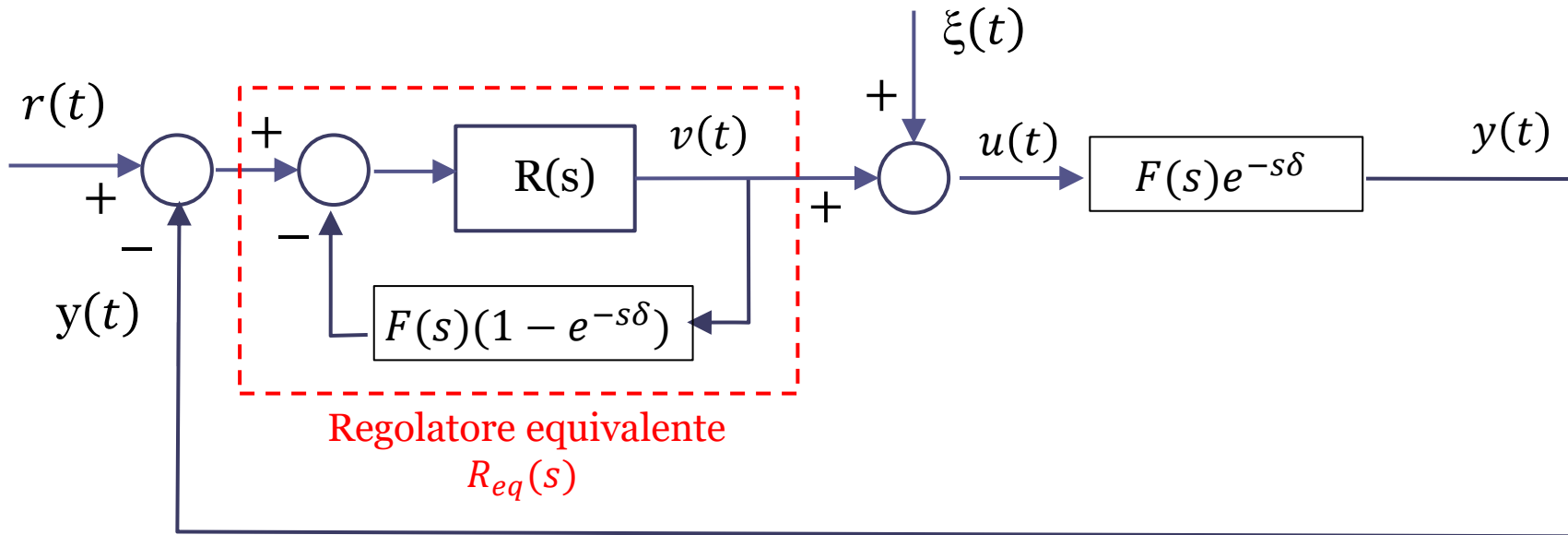
P.M.I.: per garantire la reiezione di un disturbo costante in un sistema di controllo in retroazione con Predittore di Smith deve essere presente un polo nell'origine nel regolatore $R(s)$ (e ovviamente garantire contestualmente la stabilità del sistema a ciclo chiuso)

Dimostrazione

Procediamo semplificando via via lo schema fino a ricondurci ad una configurazione più familiare. Come primo passo componiamo in parallelo i due blocchi interni al controllore aventi FdT $F(s)e^{-s\delta}$ e $F(s)$. Tale operazione è possibile in quanto tali blocchi ricevono in ingresso il medesimo segnale



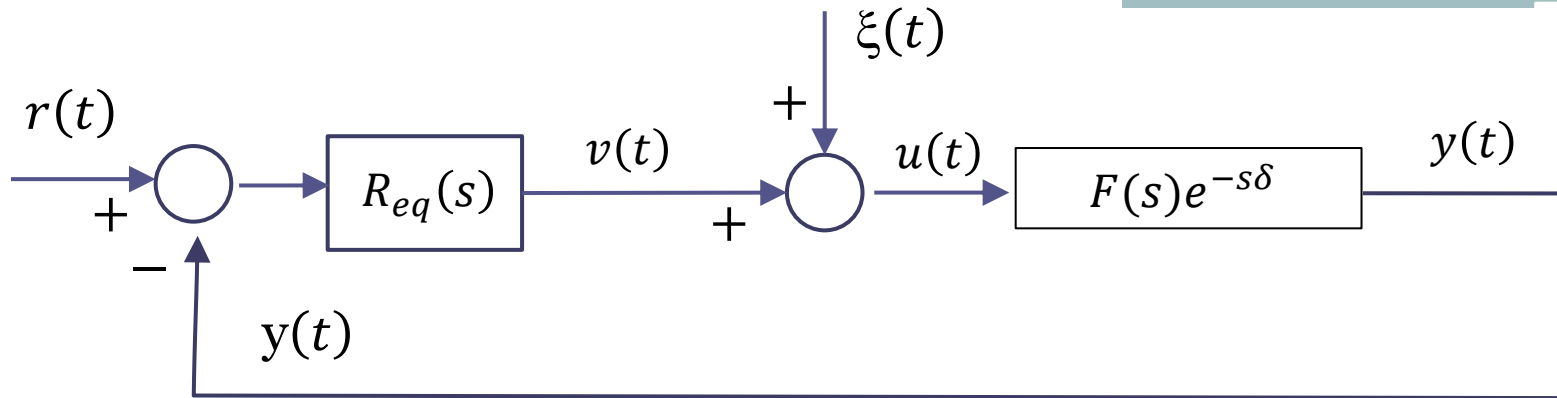
Ora rappresentiamo in maniera diversa lo schema senza alterarne in alcun modo la funzionalità



Lo schema in alto, completamente equivalente a quello della slide precedente, consente di ricondurre il sistema di controllo alla configurazione standard previa la definizione di un «regolatore equivalente» $R_{eq}(s)$ avente FdT

$$R_{eq}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)F(s)(1 - e^{-s\delta})}$$

Il regolatore equivalente è caratterizzato da una FdT irrazionale di non facile decodifica in termini di zeri e poli



$$R_{eq}(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)F(s)(1 - e^{-s\delta})}$$

Lo schema precedente, e in particolare l'espressione dedotta per $R_{eq}(s)$, consentono di desumere il semplice, ma fondamentale, risultato che **se il regolatore $R(s)$ contiene un polo nell'origine (cioè se $\lim_{s \rightarrow 0} R(s) = \infty$) anche il regolatore equivalente $R_{eq}(s)$ contiene un polo nell'origine.**

$$\text{Es. } R(s) = \frac{k}{s} \quad \Rightarrow \quad R_{eq}(s) = \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s}F(s)(1 - e^{-s\delta})} = \frac{k}{s + kF(s)(1 - e^{-s\delta})}$$

$$\quad \Rightarrow \quad \lim_{s \rightarrow 0} R_{eq}(s) = \infty$$