Integrali impropri o generalizzati

Integrali impropri o generalizzati

L'operazione di integrazione si può estendere al caso di *<u>funzioni non limitate</u> e ad <u>intervalli non limitati</u>*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Sia $f:(a,b]\to R$ *tale che,* $\forall\delta>0,$ *f è integrabile secondo Riemann in* $[a+\delta,b]$ *cioè esiste l'integrale*

$$I(\delta)=\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

Integrali impropri o generalizzati

Definizione

Se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta \to 0^+} I(\delta)$$

allora si dice che f è integrabile in senso improprio e tale limite si chiama integrale improprio o generalizzato e si indica

$$\lim_{\delta \to 0^+} I(\delta) = \int_a^b f(x)dx$$

Integrali impropri o generalizzati

Esercizio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$I(\delta) = \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 - 2\sqrt{\delta},$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} I(\delta) = \lim_{\delta \to 0^+} 2 - 2\sqrt{\delta} = 2$$

L'integrale converge e si può scrivere: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$

Integrali impropri o generalizzati

Esercizio $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$I(\delta) = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(1-\delta) - \arcsin(-1+\delta),$$

$$\lim_{\delta \to 0^+} I(\delta) = \tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2}) = \pi$$

L'integrale converge e si può scrivere: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi$

Integrali impropri o generalizzati

Esercizio. Studiare la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx, \quad \alpha > 0$$

si ha $$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & se \ \ \alpha < 1 \\ non\,converge & se \ \ \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Integrali impropri o generalizzati

Nel caso in cui $f:[a,b)\to R$ *non è limitata in x=b ma è integrabile in* $[a,b-\delta]\quad \forall\delta>0$ *allora si pone*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

Se tale limite esiste finito.

Se inoltre la funzione f non è limitata in c∈ (a,b) allora si dice che f è integrabile in senso improprio se f è integrabile in senso improprio in [a,c] e in [c,b] e si pone

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Integrali impropri o generalizzati

Consideriamo ora intervalli illimitati:

$$[a,+\infty)\qquad(-\infty,b]\qquad(-\infty,+\infty)$$

Definizione

Sia $f:[a,+\infty)\to R$ *integrabile su ogni intervallo* $[a,\beta]$ *con* $\beta>a$*, poniamo*

$$J(\beta)=\int_a^\beta f(x)dx$$

Se esiste finito il limite $\lim_{\beta\to+\infty} J(\beta)$ *allora f si dice integrabile in senso improprio su* $[a,+\infty)$ *e tale limite si chiama* *integrale improprio o generalizzato* *di f in* $[a,+\infty)$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(x)dx$$

Integrali impropri o generalizzati

Analoga definizione per $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ *dove* $f:(-\infty,b]\to R$ *è integrabile su* $[-\beta,b]$

Per quanto riguarda l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *con* f *integrabile su ogni intervallo limitato, si pone*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad c \in R$$

e i due integrali impropri convergenti

Integrali impropri o generalizzati

Esercizio. Dire se converge o esiste in senso improprio il seguente

- $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Si ha: $$J(\beta) = \int_{1}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{\beta} = -\frac{1}{\beta} + 1$$

$$\lim_{\beta\to+\infty} J(\beta) = \lim_{\beta\to+\infty} -\frac{1}{\beta} + 1 = 1$$

L'integrale converge e si può scrivere: $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

Integrali impropri o generalizzati

Esercizio. Dire se converge o esiste in senso improprio il seguente

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Si ha: $J(\beta) = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx\Big|_{-\beta}^{\beta}$

$$\lim_{\beta \to +\infty} J(\beta) = \tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2}) = \pi$$

L'integrale converge e si può scrivere: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$

Integrali impropri o generalizzati

Esercizio.

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-\alpha} dx, \quad \alpha > 0$$

si ha $\int_{1}^{+\infty} x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & se \ \ \alpha > 1 \\ non\, converge & se \ \ \alpha \le 1 \end{cases}$