Calcolo dell'integrale

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Dobbiamo scomporre la frazione in fratti semplici; in questo caso il denominatore non è scomponibile infatti

$$\Delta = 1-4 = 3 < 0$$

Cerchiamo di esprimere il denominatore come somma di due quadrati e per questo utilizziamo il metodo del completiamo al quadrato.

Per cui al denominatore otteniamo

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx.$$

Possiamo mettere in evidenza per il termine $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ e otteniamo:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx$$

Per cui integrando si ottiene:

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c}$$

Metodo del completamento del quadrato.

È una tecnica che permette di trasformare un trinomio quadratico della forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nella somma del quadrato di un binomio e di una costante

1. Si riduce il coefficiente di x^2 a 1

Dividiamo tutta l'equazione per a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2. Calcoliamo il termine da aggiungere per completare il quadrato

Si prende il coefficiente che moltiplica l'incognita di primo grado $\frac{b}{a}$, lo si divide per 2 e si eleva il risultato al quadrato:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

3. Si aggiunge e toglie tale valore e si ottiene:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

Per cui il trinomio diventa:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$