

Calcolo integrale


Metodo di integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx, \quad N(x), D(x) \text{ polinomi in } x$$

1° caso: $\text{grado}(N(x)) < \text{grado}(D(x))$

a) $D(x)$ ha radici reali semplici: si determinano le radici del denominatore $D(x)$ e lo si scompone in fattori

1



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte


Esercizio $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

$$D(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

Si devono cercare 2 costanti A e B (in quanto 2 sono i fattori semplici in cui è scomposto il polinomio $D(x)$):

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{(A + B)x - A - 2B}{(x - 2)(x - 1)}$$

2



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte


Per il principio di identità dei polinomi, i polinomi a numeratore del 1° e dell'ultimo membro, sono uguali se sono uguali i rispettivi coefficienti cioè

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{1}{x - 2} dx - \int \frac{1}{x - 1} dx = \ln \left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| + c$$

3



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

b) $D(x)$ ha radici reali multiple


$$\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx$$

si ha $D(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$:

una radice semplice ($x = 1$) e una radice multipla di molteplicità " 2 " (radice doppia $x = 0$) si devono cercare 3 costanti A, B, C

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} = \frac{Ax(x - 1) + B(x - 1) + Cx^2}{x^2(x - 1)}$$

4



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte


$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B)x - B}{x^2(x-1)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 & A=-1 \\ -A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ -B=1 & C=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx = -\int \frac{1}{x} dx + \int -\frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + \frac{1}{x} + c$$

5



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

c) $D(x)$ ha radici complesse coniugate e semplici


$$\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

$$D(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$$

Una radice reale semplice $x = -1$ reale semplice e un fattore non scomponibile di grado 2

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

6



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 & A = \frac{1}{2} \\ B + C = 0 & \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ A + C = 1 & C = \frac{1}{2} \end{cases}$$


L'integrale può essere espresso come segue

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \arctg x + c$$

7



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte


2° caso: $\text{grado}(N(x)) \geq \text{grado}(D(x))$

In questo caso si deve eseguire la divisione tra il polinomio a numeratore ($N(x)$) e il polinomio a denominatore ($D(x)$):

$$N(x) = D(x)q(x) + r(x)$$

$q(x)$ = quoziente della divisione
 $r(x)$ = resto della divisione

8



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\Rightarrow \frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$$


con $r(x)$ un polinomio di grado inferiore a quello di $N(x)$:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{D(x)} dx$$

Integrale di funzione razionale
intera (polinomio)

Integrale di funzione razionale
fratta (caso 1)

9



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte


$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx \quad \text{grado}(N(x))=5 > \text{grado}(D(x))=4$$

Effettuando la divisione tra i due polinomi si ottiene

$$q(x)=x, \quad r(x)=-x^3-x+1$$

$$\Rightarrow \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} = x - \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2}$$

10



Calcolo integrale


Integrazione delle funzioni razionali fratte

$$\frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2} = \frac{x^3 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} =$$

$$\frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B}{x^2(x^2 + 1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = 0 \\ A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases}$$

11



Calcolo integrale

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Si ha

$$\int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx = \int x dx - \int \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2} dx =$$

$$\int x dx - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - \ln |x| - \frac{1}{x} - \arctg x + c$$

12

Calcolo integrale

Calcolo dell'area di una figura piana

Sia $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Con $f(x)$ funzione continua e
 $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$

$$\text{area}(T) = \int_a^b f(x) dx$$

The diagram shows a Cartesian coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. A curve labeled $f(x)$ is plotted above the x-axis. The region T is shaded with diagonal lines and is bounded by the x-axis from $x=a$ to $x=b$, the vertical lines at $x=a$ and $x=b$, and the curve $f(x)$.

13

Calcolo integrale

Calcolo dell'area di una figura piana


Sia $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$

Con $f(x)$ e $g(x)$ funzione continue.

$$\text{area}(T) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

The diagram shows a Cartesian coordinate system with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. Two curves, $f(x)$ and $g(x)$, are plotted. The curve $f(x)$ is above the curve $g(x)$. The region T is shaded with diagonal lines and is bounded by the vertical lines at $x=a$ and $x=b$, the curve $f(x)$ above, and the curve $g(x)$ below.

14

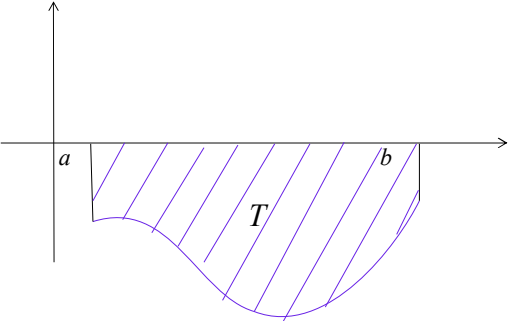


Calcolo integrale


Calcolo dell'area di una figura piana

Se $f(x) \leq 0$ cioè $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$

Allora:

$$\text{area}(T) = -\int_a^b f(x) dx$$


15



Calcolo integrale

- *Calcolare l'area della regione*
 $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$
- *Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra l'asse delle x, il grafico della funzione $y = xe^x$ con $x \in [-1, 1]$*
- *Calcolare l'area della porzione di piano compresa tra le due parabole di equazione $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x^2 + x + 2$*

16