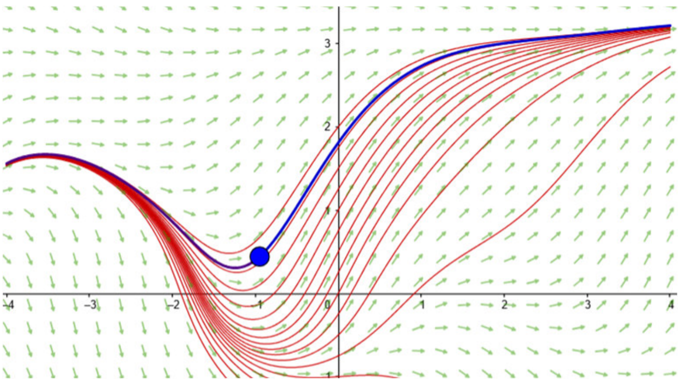
Equazioni differenziali ordinarie



Equazioni differenziali ordinarie

- *Equazioni differenziali del 1° ordine a variabili separabili,*
- *Equazioni differenziali lineari del 1° ordine*
- *Equazioni differenziali del 1° ordine non lineari:*
    - *Equazione di Bernoulli*
    - *Equazione di Clairaut*
- *Problema di Cauchy per le eq. diff. del 1° ordine in forma normale,*
- *Equazioni differenziali lineari di ordine* $n \geq 2$

Equazioni differenziali ordinarie

Definizione

Sia $I \subseteq R$ *si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine n, un'equazione in cui compaiono la funzione incognita* $y = y(x),\ x \in I,$ *e le sue derivate fino all'ordine n:*

$$g(x, y, y', y'',...., y^{(n)}) = 0$$

Con $y' = y'(x), y'' = y''(x),..., y^{(n)} = y^{(n)}(x)$

e g *funzione reale.*

Equazioni differenziali ordinarie

Se g è un polinomio in cui $y, y', y'',...., y^{(n)}$ *sono di primo grado, allora l'equazione si dice*

equazione differenziale lineare

(l'ordine dell'equazione è dato dall'ordine massimo di derivazione che compare)

Equazioni differenziali ordinarie

$y = y(x)$ *è soluzione dell'equazione differenziale di ordine* ***n*** *se,* $y(x)$ *insieme alle sue derivate soddisfa l'equazione, cioè*

$$g(y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

Un'equazione differenziale è in forma normale se è esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}),$$

altrimenti si dice in forma non-normale

Equazioni differenziali ordinarie

Integrare un'equazione differenziale significa trovare tutte le soluzioni. L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale di ordine ***n*** *dipende da* ***n*** *parametri reali: le costanti* $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$y = y(x, c_1, c_2, ..., c_n)$$ ***INTEGRALE GENERALE***

Fissando i parametri $c_1, c_2, ..., c_n$ *si ottiene una soluzione particolare dell'equazione differenziale e viene chiamata* ***INTEGRALE PARTICOLARE****.*

Equazioni differenziali ordinarie

Nel caso di un'eq. diff. del 1° ordine:

$g(x, y, y') = 0$ *forma non normale*

$y' = f(x, y)$ *forma normale o esplicita*

$y = y(x, c)$ ***integrale generale***

Equazioni differenziali ordinarie

NOTA

*Non sempre ogni soluzione dell'equazione differenziale data è anche un integrale particolare, ma ci sono casi di equazioni differenziali che ammettono anche INTEGRALI SINGOLARI, cioè integrali non ottenibili per nessun valore della costante "**c**".*

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = f(x)g(y)$$

Con $f(x)$ *e* $g(y)$ *funzioni continue*

$se\ \exists y_0 :\ g(y_0) = 0 \Rightarrow y = y_0$ *è soluzione*

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali a variabili separabili

Se $g(y) \neq 0 \quad \forall y,$ *allora si divide l'equazione per g(y) e si integra:*

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x), \quad ma \qquad y' = \frac{dy}{dx},$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

$$G(y) = F(x) + c, \quad c = costante$$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio. Integrare la seguente equazione differenziale

$$y' = 2x + 2xy^2$$

$\Rightarrow y' = 2x(1+y^2)$ $g(y) = 1 + y^2 \neq 0 \ \forall y$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2x dx$ $\Rightarrow arctg y = x^2 + c$

$y = tg(x^2 + c)$ ***Integrale generale***

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali a variabili separabili

Esempio. Risolvere $y' = xy^2$

$y = 0$ *è soluzione*

se $y \neq 0$: $\int \frac{1}{y^2} dy = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$

$\boxed{\Rightarrow y = -\frac{2}{x^2 + 2c}}$ ***Integrale generale***

$\boxed{y = 0}$ ***Integrale singolare***

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$$

con $a(x)$ *e* $b(x)$ *funzioni continue in I.*

Se $b(x) = 0$ *allora* $y' + a(x)y = 0$ *si dice* ***omogenea***

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Teorema

Tutte le soluzioni dell'eq. diff. lineare del 1° ordine non omogenea

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$$

sono date da

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)} b(x)dx + c\right)}$$

con $\boldsymbol{A(x)}$ *primitiva di* $\boldsymbol{a(x)}$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali lineari del 1 ° ordine

Dimostrazione

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, cioè $A'(x) = a(x)$

Moltiplicando entrambi i membri dell'eq. diff. per il fattore $e^{A(x)}$ si ha

$$e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)y(x) = e^{A(x)}b(x)$$

cioè

$$\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)}y(x)\right) = e^{A(x)}b(x)$$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali lineari del 1 ° ordine

Integrando membro a membro si ha

$$e^{A(x)}y(x) = \int e^{A(x)}b(x)dx + c$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}b(x)dx + c\right)$$

Se $b(x) = 0$ *allora* $y(x) = ce^{-A(x)}$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Esempio *Integrare la seguente equazione differenziale*

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

$$a(x) = 2x \Rightarrow A(x) = x^2, \quad b(x) = xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x^2}\left(\int e^{x^2} xe^{-x^2} dx + c\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$ ***Integrale generale***

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazioni differenziali lineari del 1° ordine

Esercizi *Integrare le seguenti equazioni differenziali*

$$(1 + x^2)y' + y = arctgx$$

$$y' + \cos(x) \cdot y = 0$$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Bernoulli

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, \qquad \alpha \in R, \text{con } \alpha \neq 0,1$$

a(x), b(x)funzioni continue, α ≠ 0,1 altrimenti si ricade nelle eq. lineari.

(*Se α>0 allora y=0 è una soluzione: integrale singolare*)

Se $\boldsymbol{y}$ *è diverso da zero, si divide tutto per* $\boldsymbol{y^{\alpha}}$:

$$y'y^{-\alpha} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Bernoulli

Posto: $z(x) = y^{1-\alpha}$

Si ha: $z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

e sostituendo nella eq. precedente si ottiene un'equazione differenziale lineare del primo ordine rispetto a z.

$$\boxed{z'(x) + (1-\alpha)a(x)z(x) = (1-\alpha)b(x)}$$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Bernoulli

Esercizio . *Integrare la seguente eq diff*

$$y' - y = xy^2$$

$y = 0$ *è soluzione*

se $y \neq 0$:

$$y'y^{-2} - y^{-1} = x \Rightarrow z(x) = y^{-1}, \quad z' = -y^{-2}y'$$

$z' + z = -x$ *Eq diff. lineare in z(x)*

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Bernoulli

Risolvendo $z(x) = e^{-x}\left(-\int xe^{x}dx + c\right)$ *si ha*

$z(x) = e^{-x}(-xe^{x} + e^{x} + c) \quad \Rightarrow \quad z = (-x + 1 + ce^{-x})$

Poiché $y(x) = z^{-1}$ *si ha* $\quad y = \dfrac{1}{-x + 1 + ce^{-x}}$

$y = 0$	*Integrale singolare*
$y = \dfrac{1}{-x + 1 + ce^{-x}}$	*Integrale generale*

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Bernoulli

Esercizio

$$y' - 2y = \sqrt{y} \cdot senx$$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

$$y = xy' + g(y')$$

con ***g*** *funzione derivabile.*

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine in forma ***non normale****.*

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

*Derivando rispetto a **x** primo e secondo membro dell'eq. differenziale si ha:*

$$y' = y' + xy'' + g'(y')y''$$

$$y''[x + g'(y')] = 0$$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

1) $y'' = 0 \rightarrow y' = c$

sostituendo nell'equazione diff. di partenza

$$\boxed{y = cx + g(c)}$$

*ottengo una **famiglia di rette** al variare di **c***

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

2) $x + g'(y') = 0$

Posto $t = y'$ *dalla precedente si ricava:*

$$ii) \qquad \boxed{\begin{cases} x(t) = -g'(t) \\ y(t) = -tg'(t) + g(t) \end{cases}}$$

Tale soluzione è un INTEGRALE SINGOLARE

ed è l'inviluppo della famiglia di rette (i)

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

Esercizio $$y = \frac{x(y')^3 - 1}{(y')^2}$$

Si ha $y = xy' - (y')^{-2}$ *Equazione di Clairaut*

$$y' = y' + xy'' + 2(y')^{-3} y'' \Rightarrow y''(x + 2(y')^{-3}) = 0$$

$y'' = 0$ $\qquad\qquad$ $x + 2(y')^{-3} = 0$

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

da $y'' = 0$ *si ottiene* $y' = c \Rightarrow$

$$y = cx - \frac{1}{c^2}$$ *famiglia di rette*

da $x + 2(y')^{-3} = 0$ *ponendo* $y' = t$ *si ottiene*

$$\begin{cases} x = -2t^{-3} \\ y = tx - 2t^{-2} \Rightarrow y = -4t^{-2} \end{cases}$$

Integrale singolare o curva inviluppo del fascio di rette

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

$$y = xy' - sen(y')$$

Si ha $y' = xy'' + y' - y''\cos(y')$

$\Rightarrow \quad xy'' - y''cos(y') = 0 \;\Rightarrow\; y''(x - cos(y')) = 0$

1) $y'' = 0 \;\Rightarrow\; y' = c \Rightarrow$

$$y' = xc - sen(c)$$ *fascio di rette*

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

Esercizio

2) $x - cos(y') = 0 \quad \Rightarrow \quad x = cos(y')$

ponendo $y' = t$ *si ottiene*

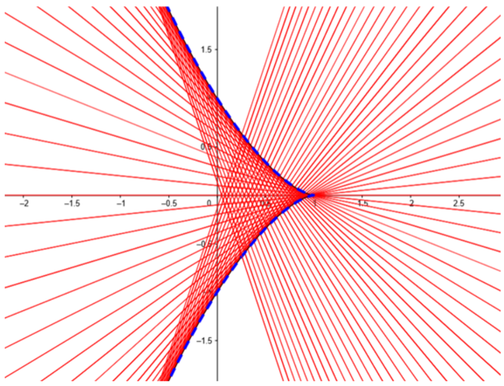
$$\begin{cases} x = cost \\ y = \cos(t) \cdot x - sen(t) \end{cases}$$

Integrale singolare o curva inviluppo del fascio di rette

Equazioni differenziali del 1° ordine

Equazione di Clairaut

Rappresentazione grafica delle soluzioni



Integrale generale (Famiglia di rette)

Integrale singolare curva inviluppo