Analisi Matematica 2

Forme differenziali lineari

Forme differenziali lineari

Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + \ F_2(x, y, z)\mathbf{j} + \ F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vettoriale di classe $C^1(V)$, $\ V$ aperto connesso di $\mathbb{R}^3$.
Ad $\mathbf{F}$ associamo l'espressione

$$\omega(x, y, z) = F_1 \ dx + \ F_2 \ dy + F_3 \ dz$$

che si chiama forma differenziale lineare con coefficienti $F_1, \ F_2, \ F_3$.

Definizione: linee di campo

Dato un campo vettoriale $\mathbf{F} : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} \in C^1(V)$, si chiama linea di campo di $\mathbf{F}$ una qualsiasi curva regolare tangente in ogni punto a $\mathbf{F}$. Se $\mathbf{F}$ è un campo di forze allora le linee di campo si chiamano linee di forze, se $\mathbf{F}$ rappresenta un campo di velocità allora si parlerà di linee di flusso.

Se pensiamo al vettore $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ come ad un vettore spostamento infinitesimo, allora $\omega =< \mathbf{F}, d\mathbf{r} >$ rappresenta il lavoro effettuato da $\mathbf{F}$ in relazione a tale spostamento.

Integrale di seconda specie

Sia $\omega \in C^1(V)$ e sia γ una curva regolare contenuta in V di equazione

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \ t \in [a, b]$$

Definizione di integrale curvilineo di ω o integrale di seconda specie

Si definisce integrale curvilineo di ω lungo γ

$$\int_\gamma F_1(x, y, z)\ dx +\ F_2(x, y, z)\ dy + F_3(x, y, z)\ dz =$$

$$\int_a^b \Big[F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) +\ F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)\Big]\, dt$$

Interpretazione dell'integrale $\int_\gamma \omega$

Se come abbiamo fatto precedentemente consideriamo il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\mathbf{k}$ e un vettore spostamento infinitesimo $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, allora l'integrale

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z')dt$$

rappresenta il lavoro che il campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ compie per spostare il suo punto di applicazione da $\mathbf{r}(a)$ a $\mathbf{r}(b)$ lungo la curva γ.

Sono possibili altre interpretazioni e queste sono legate alla natura del Campo $\mathbf{F}$.

Forme differenziali nel piano

In modo analogo si definisce una forma differenziale ω nel piano e il suo integrale:

$$\omega = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

con $\mathbf{F}(x, y) = \big(F_1(x, y), F_2(x, y)\big)$ campo vettoriale di classe $C^1(A)$, A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, e se $\gamma := (x(t), y(t))$ é una curva regolare contenuta in A:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b [F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)]dt$$

Data $\omega = -ydx + xdy$, calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ é la circonferenza di centro l'origine e raggio 2

Proprietá delle forme differenziali

Siano $\omega_1,\ \omega_2$ forme differenziali lineari di classe $C^1(E)$ (E aperto connesso di $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$), $\gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ curve regolari a tratti contenute in E, $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$:

1. Linearitá rispetto all'integranda

$$\int_\gamma \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \ \beta \int_\gamma \omega_2;$$

2. Additivitá rispetto al cammino di integrazione

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega;$$

Proprietá delle forme differenziali

3. Se γ_1 é equivalente a γ_2 con stesso orientamento (cioé si passa da γ_1 a γ_2 con un cambio di parametro che non muta il verso di percorrenza)

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega;$$

4. se l'orientazione di γ_1 é opposta a quella di γ_2 (cioé si passa da γ_1 a γ_2 con un cambio di parametro che muta solo il verso di percorrenza) si ha:

$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega.$$

Se γ é una curva chiusa si usa il simbolo

$$\oint_{\gamma} \omega$$

Forme differenziali esatte.

Data una forma differenziale $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ di classe $C^1(V)$, V aperto connesso, essa si definisce esatta, se esiste una funzione differenziabile $f(x, y, z)$ tale che

$$df = \omega$$

cioè

$$df = \overbrace{F_1 \; dx + \; F_2 \; dy + F_3 \; dz}^{\omega}$$

Essendo $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$, questo equivale a dire che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \; \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \; \frac{\partial f}{\partial z} = F_3 \qquad (\nabla f = \mathbf{F}).$$

f si chiama funzione potenziale (dalla fisica).

Osservazione. Se f é una funzione potenziale, lo é anche $f + c$, con c una costante.

Teorema (di integrazione delle forme esatte)

Se ω é **esatta** in V e γ é una curva regolare interna a V con parametrizzazione $r(t), \ t \in [a, b]$

$$\int_\gamma \omega \ = f(x(b), y(b), z(b)) - \ f(x(a), y(a), z(a)).$$

Oss. Se V é un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ allora

$$\int_\gamma \omega \ = f(x(b), y(b)) - \ f(x(a), y(a)).$$

Dimostrazione. Sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ esatta, cioè esiste $f : \ df = \omega$. Inoltre sia $r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b]$. Allora

$$\int_\gamma F_1(x, y, z)dx + \ F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz =$$

$$\int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)\Big] dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t))\ dt = f(x(b), y(b), z(b)) - \ f(x(a), y(a), z(a)).$$

Se la forma é esatta l'integrale curvilineo non dipende dalla curva, ma solo dagli estremi, cioè $\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$ dove γ è una curva di estremi $A = (x(a), y(a), z(a))$ e $B = (x(b), y(b), z(b))$.
Il teorema si generalizza a curve regolari a tratti.
(Analogo discorso per le forme differenziali definite in $\mathbb{R}^2$)

Teorema (di caratterizzazione delle forme esatte)

Sia ω di classe $C^1(V)$, V aperto connesso (in $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$, le seguenti 3 affermazioni sono vere:

i) ω é esatta in V;

ii)per OGNI curva chiusa $\gamma \subset V$, risulta

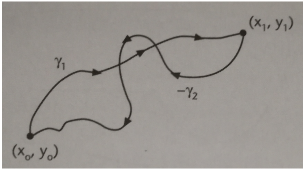
$$\oint_\gamma \omega = 0;$$

iii) se γ_1 *e* γ_2 hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dimostriamo ad esempio $i) \to ii)$. Si utilizza il Teorema di integrazione delle forme esatte, dopo aver spezzato la curva chiusa in due parti.

$$\oint_\gamma \omega = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = (f(P_2) - f(P_1)) + (f(P_1) - f(P_2)) = 0.$$



Condizione necessaria

Sia $\omega = F_1 \ dx + \ F_2 \ dy + F_3 \ dz$, con $\omega \in C^1(V)$. Condizione necessaria affinché ω sia esatta in V é che risulti

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

ovvero

$$rot \ F = 0$$

La forma $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ tale che rot F =0 si chiama forma chiusa.

In $\mathbb{R}^2$, $\omega = F_1 \ dx + \ F_2 \ dy$ si dice chiusa se $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

Se ω è esatta $\Rightarrow$ ω è chiusa. NON è vero il viceversa!

Esempio: $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ è chiusa in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ma non è esatta. Infatti se $\gamma : (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$ si ha $\oint_\gamma \omega \neq 0$.

Dimostrazione in $\mathbb{R}^2$
Se $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ é esatta, allora esiste la funzione potenziale f tale che

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Deriviamo la F_1 rispetto a y e F_2 rispetto a x. Per la f vale il teorema di Schwarz (sull'invertibilitá dell'ordine di derivazione delle derivate seconde):

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Ne consegue che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \; = \; \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Dimostrazione in $\mathbb{R}^3$
Sia ω una forma differenziale esatta in $\mathbb{R}^3$. Allora

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

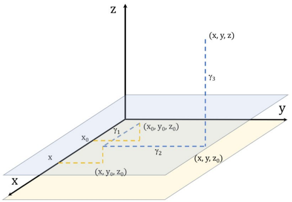
Data $\omega = x^2 dx + y dy + z^3 dz$, dimostrare che é chiusa in $\mathbb{R}^3$

Osserviamo che, una volta dimostrato che ω é esatta, essendo l'integrale curvilineo di una forma esatta indipendente dalla curva γ, possiamo allora sostituire γ con una curva di comodo, come ad esempio, una spezzata a lati paralleli agli assi.
Nel piano costruiamo la funzione potenziale $f(x, y)$ ponendo

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} F_1(\xi, y_0) d\xi \; + \; \int_{y_0}^{y} F_2(x, \eta) d\eta.$$

Nello spazio si avra' (ad esempio):

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} \omega \\ &= \int_{x_0}^{x} F_1(\xi, y_0, z_0) d\xi \ + \int_{y_0}^{y} F_2(x, \eta, z_0) d\eta \ + \int_{z_0}^{z} F_3(x, y, t) dt. \end{aligned}$$



Condizione sufficiente affinché ω sia esatta.

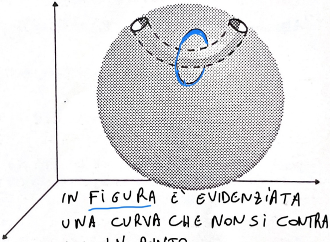
Condizione sufficiente

Sia V un insieme semplicemente connesso ed $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ chiusa ($rot\ F = 0$), allora ω é esatta in V.

Un aperto connesso E è semplicemente connesso se ogni curva chiusa contenuta in E si può ridurre ad un solo punto.

È EVIDENZIATA COL COLORE BLU
UNA CURVA CHE NON SI CONTRAE
IN UN PUNTO

Insieme non semplicemente connesso in R^2.



IN FIGURA È EVIDENZIATA
UNA CURVA CHE NON SI CONTRAE
IN UN PUNTO

Insieme non semplicemente connesso in R^3.

Data la forma differenziale $\omega = 2x^3 dx + (x^2 - y^2)dy$, integrarla lungo la spezzata che é la frontiera del triangolo di vertici $(0,0),\ (1,1)\ e\ (2,0)$, percorsa in senso antiorario.

Data la forma differenziale
$\omega = [sin(x+y) + x\ cos(x+y)]dx + [x\ cos(x+y)]dy$,
1. dimostrare che é esatta nel suo campo di definizione;
2. trovare la funzione potenziale;
3. integrarla lungo la spezzata che é la frontiera del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, percorsa in senso antiorario.

Svolgimento

1. $\frac{\partial F_1}{\partial y} = cos(x+y) - xsin(x+y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Quindi ω é una forma differenziale chiusa.

Il campo di definizione di ω é tutto il piano $\mathbb{R}^2$ che é un insieme semplicemente connesso.

Per il teorema sulla condizione sufficiente per la forma esatta abbiamo che ω é esatta.

2. Essendo ω esatta allora esiste la funzione potenziale $f(x,y)$ tale che $f_x = sin(x+y) + x\ cos(x+y)$, $\quad f_y = x\ cos(x+y)$

Dalla relazione $f_y = x\ cos(x+y)$, integrando (rispetto a y) si ricava, a meno di una costante che dipende da x

$$f(x,y) = x\ sin(x+y) + \phi(x).$$

Si trova $\phi(x)$ derivando la f rispetto a x ed eguagliandola alla F_1 prima componente della forma:

$f_x = sin(x+y) + x\ cos(x+y) + \phi'(x) = F_1$,

si deduce $\phi'(x) = 0$, $\ \phi = cost$.

La funzione potenziale é $f(x,y) = x\ sin(x+y)$.

3. L'integrale vale zero perché la curva é chiusa e la forma é esatta in $\mathbb{R}^2$.

Osservazione. Se la forma non é esatta, l'integrale su una curva chiusa puó essere zero o diverso da zero.

Data $\omega = 2xy^3 \ dx + 3x^2y^2dy$
1. dimostrare che é esatta in $\mathbb{R}^2$;
2. calcolare la funzione potenziale.

Svolgimento

1. La forma ω é chiusa $\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$ in un aperto semplicemente connesso ($\mathbb{R}^2$, che é anche il suo campo di esistenza).

Quindi ω (essendo chiusa in un insieme semplicemente connesso) é esatta.

2. Essendo ω esatta, esiste la funzione potenziale $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \int_0^x 0 \ dx + \int_0^y 3x^2\eta^2 d\eta = x^2 \ y^3.$$

Si è scelto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Esercizi

- Dato il campo vettoriale $F = (2y + 1, 2x - 1, 2z)$, dire se la forma differenziale lineare associata al campo F è esatta nel suo insieme di definizione e in caso affermativo calcolare la funzione potenziale.

- Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, la forma differenziale $\omega = 2\,kxydx - 3x^2dy$ è esatta nel suo campo di esistenza e in caso affermativo calcolare la funzione potenziale e l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è l'ellisse di semiassi 2 e 3 e centro l'origine del sistema di riferimento.

- Data la forma differenziale $\omega = \frac{x}{\sqrt{y+x}}dx - \frac{2y+x}{\sqrt{y+x}}dy$ dire se è esatta e calcolare $\int_{+\gamma} \omega$ dove $+\gamma := \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Esercizi

- Dire in quale dominio è esatta la forma differenziale $\omega = x \ln y dx + \frac{x^2}{2y} dy$ e calcolare l'integrale $\int_{+\gamma} \omega$ dove $+\gamma$ è l'arco di ellisse di equazioni $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi.$
- Trovare un dominio in cui la seguente forma differenziale $\omega = (x^2 + \tan y)dx + \frac{x+1}{\cos^2 y} dy$ è esatta. Calcolare la funzione potenziale.
- Data la forma differenziale $\omega = -\frac{2x}{y-x^2} dx + \frac{1}{y-x^2} dy - dz$ dire se è esatta nel suo campo di esistenza e calcolare la funzione potenziale. Calcolare inoltre l'integrale $\int_{+\gamma} \omega$ dove $+\gamma : (\cos t, 2 + \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq \pi$