

Analisi Matematica 2

Integrali tripli

Integrali tripli su domini normali.

Dominio normale rispetto al piano x, y .

Consideriamo due funzioni di due variabili $z_1 = \alpha(x, y)$, $z_2 = \beta(x, y)$, continue su un dominio D normale del piano x, y e tali che $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$.

Definizione

L'insieme dello spazio

$$E := \{(x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

si chiama dominio normale rispetto al piano x, y

Il volume o misura di questo insieme $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si può calcolare mediante un integrale doppio

$$\text{vol } E = \iint_D (\beta(x, y) - \alpha(x, y)) dx dy.$$

Analogamente si definiscono i domini normali rispetto ai piani y, z , o x, z .

Ogni dominio normale di \mathbb{R}^3 é un dominio chiuso e limitato.

E é un dominio normale regolare se D é un dominio regolare normale del piano e se le funzioni α , β sono di classe C^1 in D . Sia $g(x, y, z)$ una funzione continua in E . A partire da una decomposizione di D in domini normali, si arriva alla definizione di somme superiori e inferiori e quindi di integrale triplo, seguendo la definizione di integrale semplice e doppio.

Formule di riduzione per gli integrali tripli

Formula di riduzione: un integrale triplo si può ricondurre a tre integrali semplici successivi. In particolare

$$\iiint_E g(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} g(x, y, z) dz, \text{ integrale per fili.}$$

Si ottengono formule analoghe scambiando gli assi.

$$\iiint_E g(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_D g(x, y, z) dx dy \text{ integrale per strati.}$$

Se $g(x, y, z) = 1$, $\iiint_E dx dy dz = \text{volume di } E$.

Calcolare il volume del solido V così definito:

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

Cambio di coordinate negli integrali tripli.

Sia V un dominio normale dello spazio (u, v, w) , consideriamo tre funzioni di classe C_V^1

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in V \quad (1)$$

e l'applicazione

$\Phi : (u, v, w) \in V \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \Phi(V) = E$ sia invertibile con determinante Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

Teorema

Siano E e V due domini normali e l'applicazione Φ sia invertibile, di classe C^1 e $|J(u, v, w)| \neq 0$. Se $g(x, y, z)$ é continua in E si ha

$$\begin{aligned} & \iiint_E g(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_V g(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, dudvdw. \end{aligned}$$

Quindi $|J(u, v, w)| \, dudvdw = dx \, dy \, dz$ rappresenta l'elemento di volume nelle nuove coordinate.

Coordinate cilindriche.

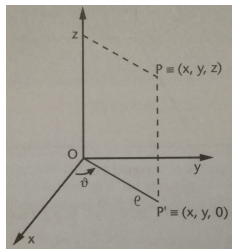
Un esempio

di cambio di coordinate che si utilizza molto spesso é quello in coordinate dette "cilindriche".

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, & |J| = \rho \\ y = \rho \sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Corrisponde a un cambio in coordinate polari nell'integrale doppio, lasciando inalterata la z .

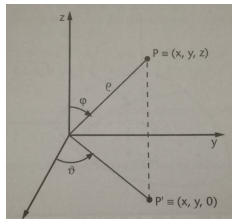
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ é la distanza del punto P' (proiezione del punto P sul piano x, y) dall'origine, θ é l'angolo formato da OP' con l'asse x .



es. Calcolare il volume della porzione di solido interno alla sfera di centro l'origine e raggio 2, che si proietta nel cerchio $x^2 + y^2 = 2y, z \geq 0$.

Altro esempio di cambio di coordinate
é quello in coordinate sferiche (o polari).

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases} \quad |J| = \rho^2 \sin \phi \quad (2)$$



dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é la distanza del punto $P(x, y, z)$ dall'origine, ϕ é l'angolo formato da OP con l'asse z , θ é l'angolo formato da OP' con l'asse x (P' é la proiezione di P sul piano x, y).