

Es. 1

Con riferimento ad un generico sistema dinamico lineare tempo-invariante (LTI):

- si enuncino, con la massima precisione possibile, le condizioni sotto le quali il sistema dinamico risulti essere asintoticamente stabile, semplicemente stabile, instabile;
- si scrivano le espressioni delle funzioni di trasferimento di tre sistemi del secondo ordine, il primo asintoticamente stabile, il secondo semplicemente stabile, il terzo instabile

Es. 3- risolto

Per ciascuno dei sistemi dinamici descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento, si dica, giustificando la risposta, se il sistema è:

- asintoticamente stabile;
- semplicemente stabile;
- instabile.

$$G_1(s) = \frac{1}{1-s^2}$$
$$G_4(s) = \frac{s}{s^4 + 2s^2 + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + 1}$$
$$G_5(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$G_3(s) = \frac{s-1}{s^2 + 1}$$
$$G_6(s) = \frac{s-1}{s^2 + 2s + 1}$$

Es. 4 - risolto

Con riferimento al sistema dinamico descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 7x_2(t) + u(t)$$

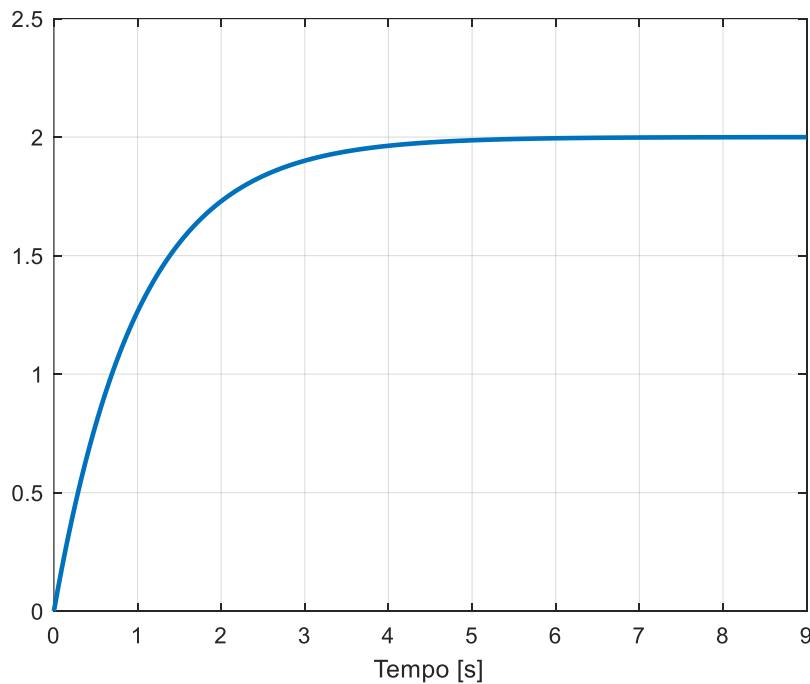
$$y(t) = 14x_1(t) + 2x_2(t)$$

si determini l'espressione della FdT $F_{u^y}(s)$ tra il segnale di ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$, e se ne valutino i poli, gli zeri, le relative costanti di tempo, ed il valore del guadagno statico. Si scriva l'espressione della FdT sia con la fattorizzazione poli-zeri che con la fattorizzazione in costanti di tempo. Si scriva l'equazione differenziale associata (legame ingresso-uscita) e si tracci un grafico approssimato dell'andamento della risposta ad un segnale di ingresso a gradino con ampiezza 2 ($u(t)=2$).

Suggerimento: trasformare con Laplace tutte le equazioni e adottare opportune manipolazioni algebriche.

Es. 5- risolto

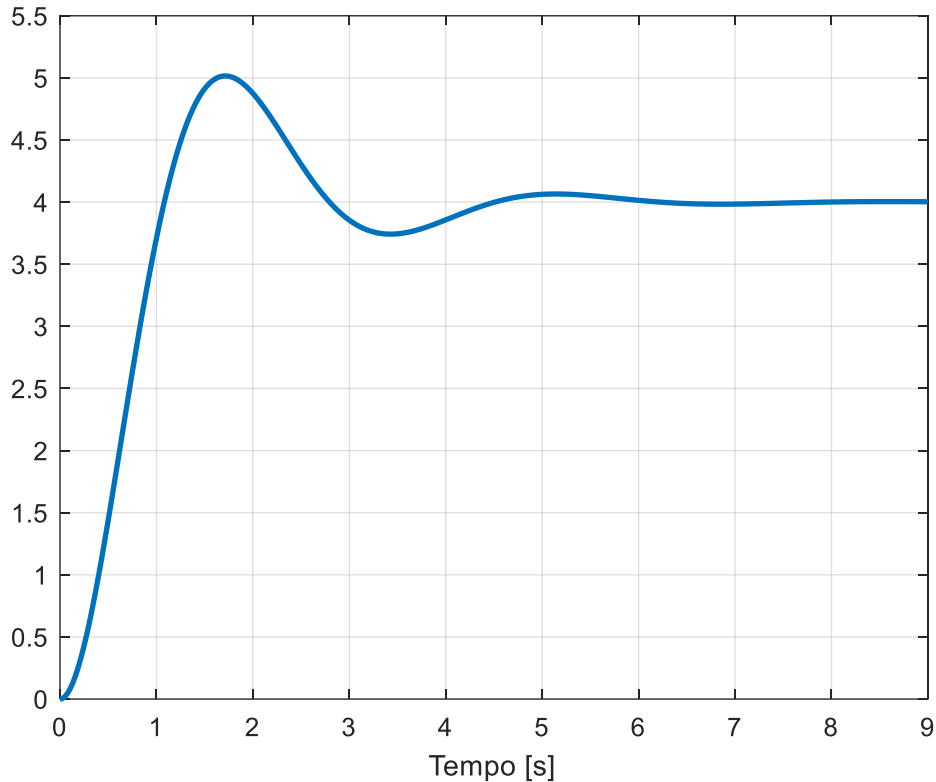
Un sistema dinamico con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ presenta la risposta al gradino unitario riportata nella figura seguente



Si determini in via approssimata l'espressione della funzione di trasferimento del sistema, e si scriva l'equazione differenziale associata.

Es. 6- risolto

Un sistema dinamico presenta la risposta al gradino unitario riportata in figura:



Si determini in via approssimata l'espressione della funzione di trasferimento del sistema, e si scriva l'equazione differenziale associata.

Es. 7

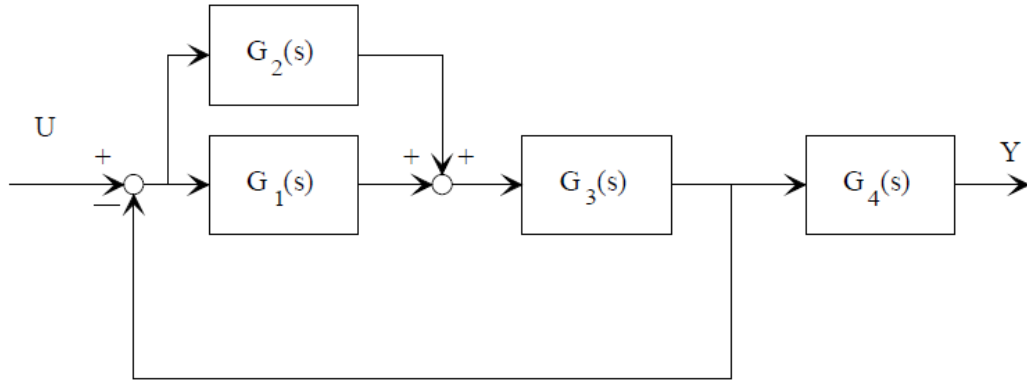
Si tracci l'andamento qualitativo della risposta al gradino unitario del sistema descritto dalla funzione di trasferimento $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+6)}$. Chiamando $y(t)$ la variabile di uscita ed $u(t)$ la variabile di ingresso, si scriva la relazione ingresso-uscita de sistema sotto forma di equazione differenziale.

Es. 9

Si fornisca la definizione di "tipo" per un sistema di controllo, e si illustrino, mediante considerazioni discorsive e/o analisi formali, le caratteristiche principali dei sistemi di controllo di tipo uno.

Es. 10

Si calcoli la funzione di trasferimento tra il segnale di ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ per il sistema dinamico descritto dal seguente schema a blocchi



$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

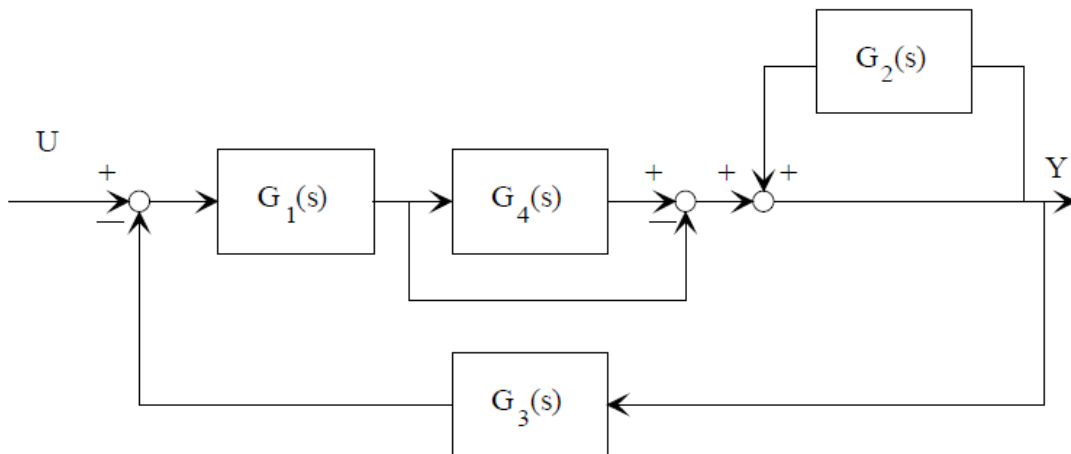
$$G_2(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$G_3(s) = \frac{2}{s}$$

$$G_4(s) = \frac{s+2}{s+4}$$

Es. 11

Si calcoli la funzione di trasferimento tra il segnale di ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ per il sistema dinamico descritto dal seguente schema a blocchi



$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

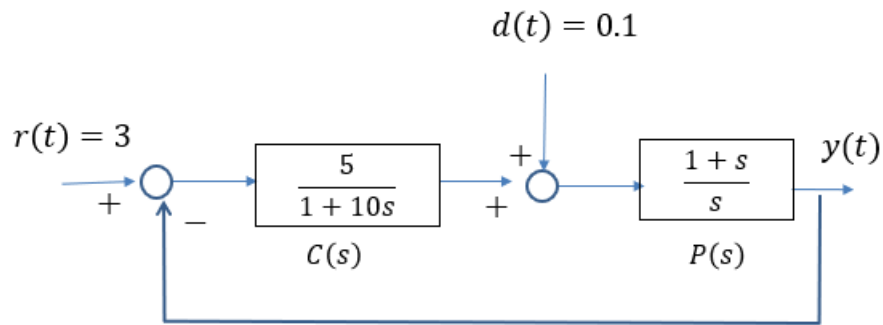
$$G_2(s) = \frac{s+2}{s}$$

$$G_3(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$G_4(s) = 5$$

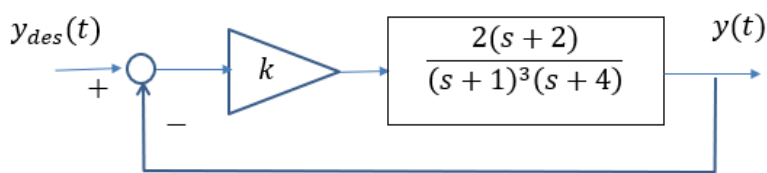
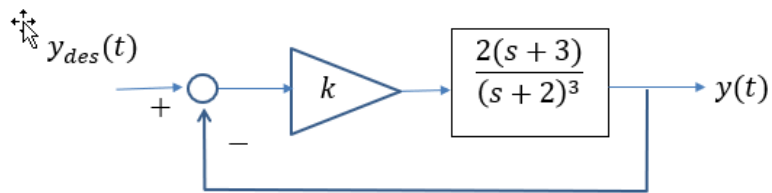
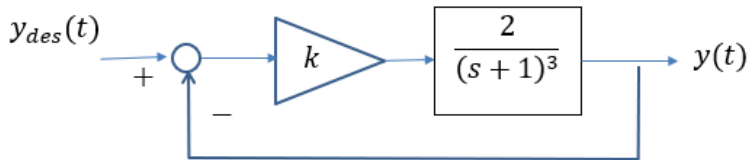
Es. 12

Con riferimento al seguente sistema di controllo a retroazione unitaria, si valutino le funzioni di trasferimento a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita, e fra il disturbo e l'uscita. Si analizzi la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo e si determini il comportamento a regime dell'uscita.



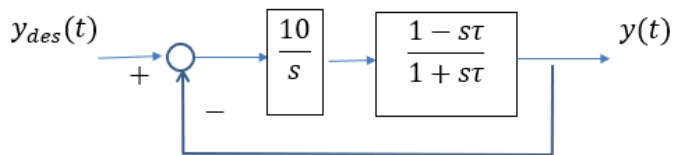
Es. 13

Si analizzi al variare di k la stabilità dei 3 sistemi di controllo in retroazione riportati nella figura seguente, e si traccino qualitativamente le risposte a ciclo chiuso per un set point a gradino unitario in corrispondenza di valori di k progressivamente crescenti.



Es. 14

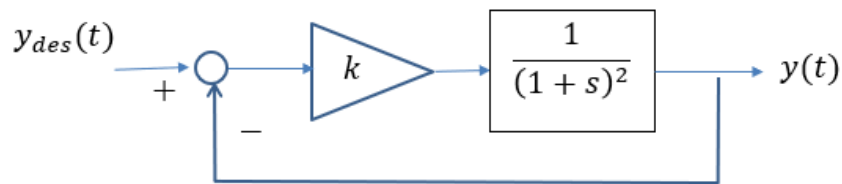
Si consideri il sistema di controllo



1. Posto $\tau = 0$ si discuta la stabilità del sistema a ciclo chiuso
2. Si determini l'intervallo di valori di τ per cui il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile

Es. 15

Con riferimento al sistema di controllo



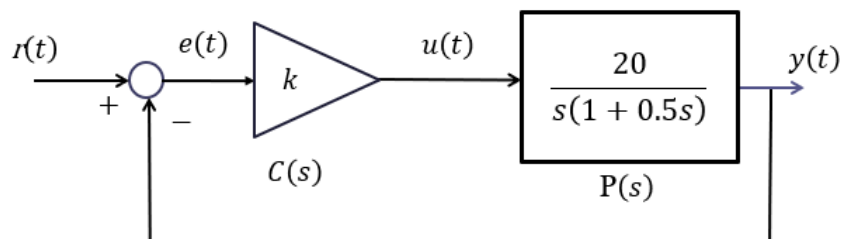
si determini il valore del parametro k in modo tale che a transitorio esaurito l'errore a regime e_∞ corrispondente ad un set point a gradino unitario sia tale che $|e_\infty| \leq 0.15$.

In corrispondenza del valore minimo di k precedentemente determinato, si ricavino la pulsazione critica e lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati a ciclo chiuso.

Si traccino qualitativamente le risposte a ciclo chiuso per un set point a gradino unitario in corrispondenza di valori di k progressivamente crescenti

Es. 16 - risolto

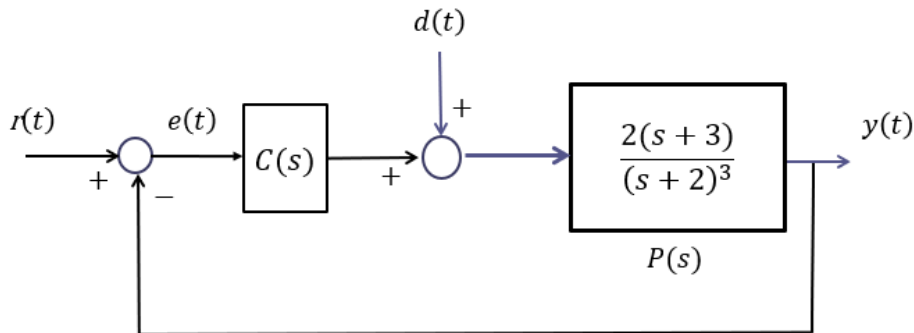
Con riferimento al seguente sistema di controllo



si determini il minimo valore del parametro k in modo tale che a transitorio esaurito l'errore a regime e_∞ corrispondente ad un set point a rampa $r(t) = 4t$ sia tale che $|e_\infty| \leq 0.02$

Es. 17- risolto

Con riferimento al seguente sistema di controllo

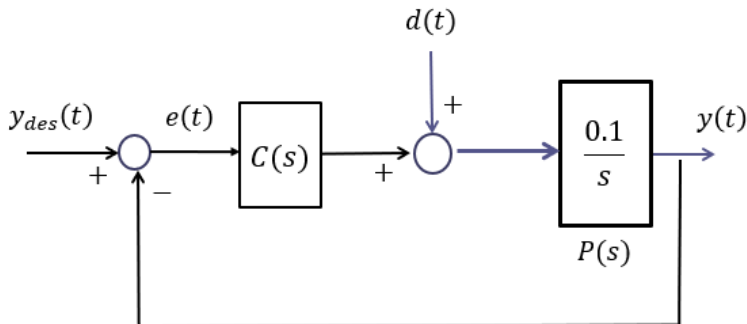


Progettare un controllore $C(s)$ che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1) Precisione statica.
- S2) Errore a regime per un set point a rampa unitaria non superiore a 0.1
- S3) Attenuazione minima di un disturbo costante pari al 95%

Es. 18

Con riferimento al seguente sistema di controllo



Progettare un controllore $C(s)$ che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1) Precisione statica.
- S2) Attenuazione minima di un disturbo costante pari al 90%
- S3) Costante di tempo della FdT a ciclo chiuso minore di 0.5 secondi.

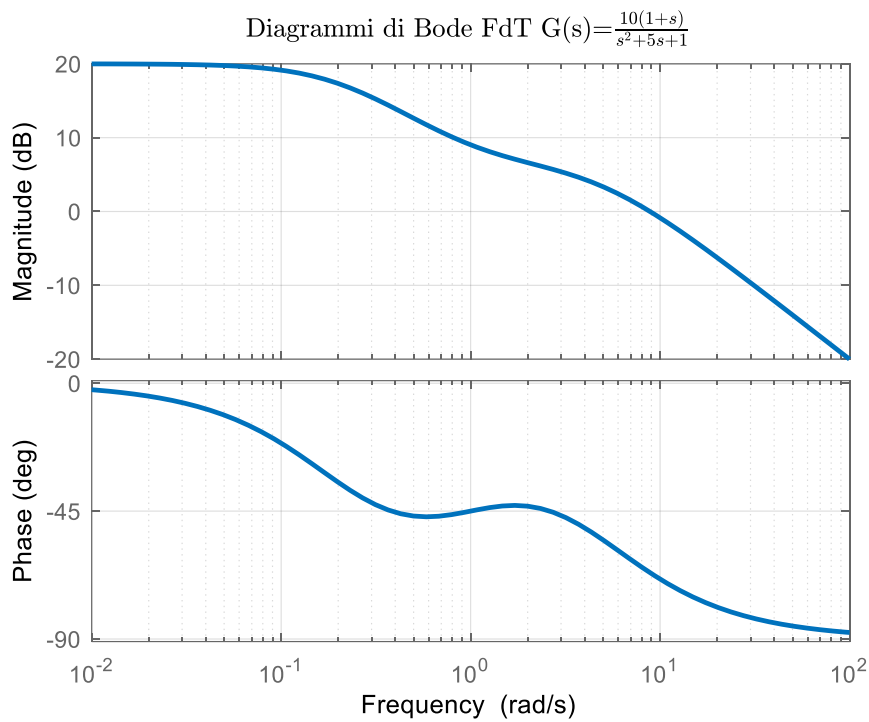
Es. 19- risolto

Dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento $G(s)$, si enunci con precisione il teorema della risposta armonica (ossia il risultato che fornisce l'espressione dell'uscita a regime in risposta ad un segnale armonico in ingresso), specificandone le ipotesi di applicabilità.

Posto quindi:

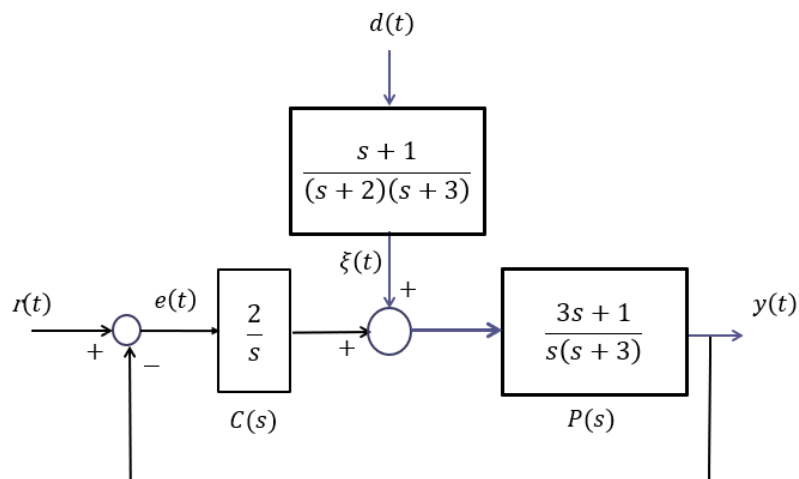
$$G(s) = 10 \frac{1 + s}{s^2 + 5s + 1}$$

si determini l'espressione dell'uscita, a transitorio esaurito, quando l'ingresso assume l'andamento $u(t) = 5 \sin(2t)$.



Es. 20- risolto

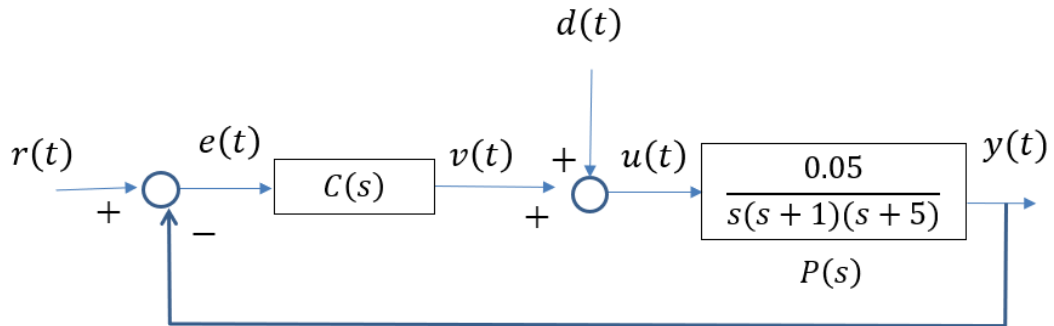
Con riferimento al seguente sistema di controllo in retroazione



determinare l'espressione analitica della evoluzione di regime della variabile di uscita quando $r(t) = 3t + 0.5 \sin(t)$ e $d(t) = 1$.

Es. 21- risolto

Si consideri il sistema di controllo in Figura



Figura

con un regolatore proporzionale $C(s) = K_C$. Definire, se esiste, un intervallo di valori per il guadagno K_C che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

S1) Precisione statica.

S2) Attenuazione di un disturbo costante in misura almeno pari al 99%

SOLUZIONI

Es. 3

Per ciascuno dei sistemi dinamici descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento, si dica, giustificando la risposta, se il sistema è:

- a) asintoticamente stabile;
- b) semplicemente stabile;
- c) instabile.

$$G_1(s) = \frac{1}{1-s^2}$$
$$G_4(s) = \frac{s}{s^4 + 2s^2 + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + 1}$$
$$G_5(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

$$G_3(s) = \frac{s-1}{s^2 + 1}$$
$$G_6(s) = \frac{s-1}{s^2 + 2s + 1}$$

1. $G_1(s) = \frac{1}{1-s^2} = \frac{1}{(1-s)(1+s)}$ poli: $p_1 = 1, p_2 = -1$

Poiché è presente un polo a parte reale positiva, il sistema G_1 è instabile

2. $G_2(s) = \frac{1}{s^3 + 1}$

Poiché non è verificata la condizione necessaria del criterio di Routh-Hurwitz, si può affermare con certezza che il sistema G_2 non è asintoticamente stabile. Uno dei suoi poli è $p_1 = -1$. Per individuare gli altri due poli, ricerchiamo le costanti a e b per le quali è soddisfatta la seguente identità:

$$s^3 + 1 = (s + 1)(s^2 + as + b).$$

Si ricava facilmente $a = -1$ e $b = 1$. Si ha quindi:

$$s^3 + 1 = (s + 1)(s^2 - s + 1).$$

Le radici del polinomio $s^2 - s + 1$ sono:

$$p_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

Poiché sono presenti due poli a parte reale positiva, il sistema G_2 è instabile

3. $G_3(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ poli: $p_1 = j, p_2 = -j$

Poiché i due poli hanno parte reale nulla, e hanno entrambi molteplicità unitaria, il sistema G_3 è semplicemente stabile

4. $G_4(s) = \frac{s}{s^4 + 2s^2 + 1}$

Poiché non è verificata la condizione necessaria del criterio di Routh-Hurwitz, si può affermare con certezza che il sistema G_4 non è asintoticamente stabile.

Per determinarne i poli, operiamo nel polinomio caratteristico la sostituzione

$$s^2 = t$$

Si ottiene:

$$t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2 = 0$$

Si ha una radice $t_1 = -1$, con molteplicità pari a due. Poiché:

$$s^2 = -1$$

ha come radici

$$s_{1,2} = \pm j$$

Il sistema G_4 possiede i poli

$$p_1 = p_2 = j, \quad p_3 = p_4 = -j$$

I 4 poli hanno parte reale nulla, e ve ne sono due aventi molteplicità pari a 2. Il sistema G_4 è semplicemente stabile

$$5. \quad G_5(s) = \frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s(1+s)} \quad \text{poli: } p_1 = 0, p_2 = -1$$

Poiché è presente un polo semplice avente parte reale nulla, e non sono presenti, poli a parte reale positiva, il sistema G_5 è semplicemente stabile

$$6. \quad G_6(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+1} = \frac{s-1}{(s+1)^2} \quad \text{poli: } p_{1,2} = -1$$

Poiché tutti i poli hanno parte reale negativa, il sistema G_6 è asintoticamente stabile

Es. 4 Con riferimento al sistema dinamico descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 7x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = 14x_1(t) + 2x_2(t)$$

si determini l'espressione della FdT $F_u^y(s)$ tra il segnale di ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$, e se ne valutino i poli, gli zeri, le relative costanti di tempo, ed il valore del guadagno statico. Si scriva l'espressione della FdT sia con la fattorizzazione poli-zeri che con la fattorizzazione in costanti di tempo. Si scriva l'equazione differenziale associata (legame ingresso-uscita) e si tracci un grafico approssimato dell'andamento della risposta ad un segnale di ingresso a gradino con ampiezza 2 ($u(t)=2$).

Suggerimento: trasformare con Laplace tutte le equazioni e adottare opportune manipolazioni algebriche.

La FdT $F_u^y(s)$ tra il segnale di ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ è, per definizione, pari al rapporto $F_u^y(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

Trasformando con Laplace tutte le equazioni che descrivono il sistema si ottiene:

$$sX_1(s) = X_2(s) \quad (1)$$

$$sX_2(s) = -6X_1(s) - 7X_2(s) + U(s) \quad (2)$$

$$Y(s) = 14X_1(s) + 2X_2(s) \quad (3)$$

Sostituendo la (1) nella (2) si ottiene

$$sX_2(s) = -\frac{6}{s}X_2(s) - 7X_2(s) + U(s) \quad (4)$$

Dalla quale si ricava

$$X_2(s) \left[s + 7 + \frac{6}{s} \right] = U(s) \quad \Rightarrow \quad X_2(s) = \frac{1}{s+7+\frac{6}{s}} U(s) = \frac{s}{s^2+7s+6} U(s) \quad (5)$$

Dalle equazioni (1) e (5) si ha

$$X_1(s) = \frac{1}{s} X_2(s) = \frac{1}{s^2+7s+6} U(s) \quad (6)$$

Sostituendo le (5) e la (6) nella (3), si ricava facilmente dop semplici passaggi algebrici:

$$F_u^y(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{14+2s}{s^2+7s+6}$$

$$\text{Poli: } p_1 = -1 \quad p_2 = -6.$$

$$\text{Zero: } z_1 = -7$$

$$\text{Guadagno statico: } \mu = F_u^y(0) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \approx 2.33$$

Guadagno in alta frequenza: $K = 2$

Costanti di tempo associate ai poli: $T_1 = -\frac{1}{p_1} = 1$ $T_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{6}$

Costante di tempo associata allo zero: $\tau_1 = -\frac{1}{z_1} = \frac{1}{7}$

Fattorizzazione poli zeri: $F_u^y(s) = K \frac{(s-z_1)}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{2(s+7)}{(s+1)(s+6)}$

Fattorizzazione in costanti di tempo $F_u^y(s) = \mu \frac{(\tau_1 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{7}{3} \frac{(\frac{1}{7}s + 1)}{(s+1)(\frac{1}{6}s + 1)}$

Nella FdT $F_u^y(s)$ il polo in -1 è dominante, e sia il polo addizionale che lo zero possono essere rimossi senza che le caratteristiche della risposta al gradino vengano alterate in maniera significativa.

Per il tracciamento della risposta al segnale di ingresso $u(t)=2$ si può pertanto far riferimento alla FdT approssimata di ordine ridotto:

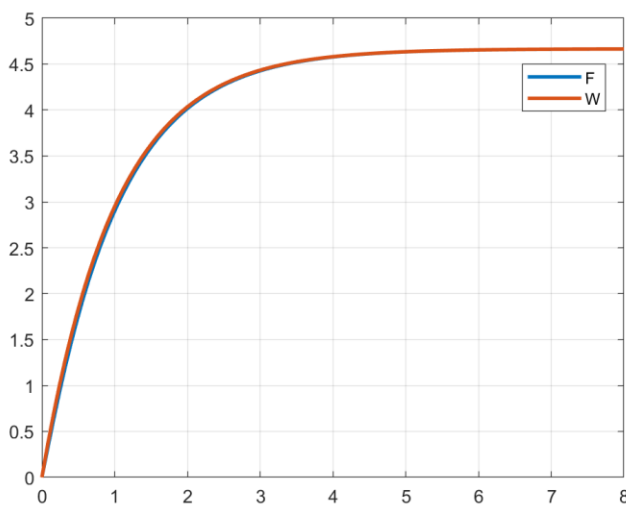
$$W(s) = \frac{7}{3} \frac{1}{(s+1)} \quad (\text{processo STC})$$

La risposta sarà pertanto monotona esponenziale

Il valore di regime è pari (sulla base del TFRG) a: $y_\infty = 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3} \approx 4.67$

Il tempo di assestamento sarà: $T_a = 4.6\tau_1 = 4.6 \text{ s}$

La seguente Figura mostra, sovrapposte, le risposte del sistema F completo e di quello W approssimato



```
s=tf('s');  
mu=7/3; T1=1; T2=1/6; tau1=1/7;
```

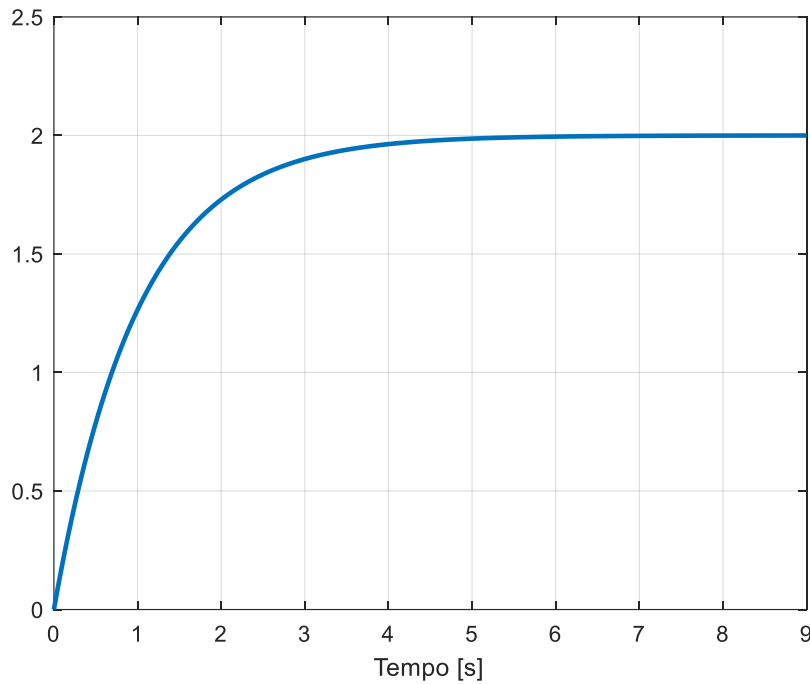
```
F=mu*(tau1*s+1)/((T1*s+1)*(T2*s+1))
[yF tF]=step(F,8);

W=mu/(T1*s+1)
[yW tW]=step(W,8);

plot(tF,2*yF,tW,2*yW,'LineWidth',2),grid
legend('F','W')
```

Es. 5

Un sistema dinamico con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ presenta la risposta al gradino unitario riportata nella figura seguente



Si determini in via approssimata l'espressione della funzione di trasferimento del sistema, e si scriva l'equazione differenziale associata.

La forma della risposta al gradino è quella di un sistema STC:

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Il valore di regime (pari a 2) coincide con il guadagno statico μ :

$$\mu = 2$$

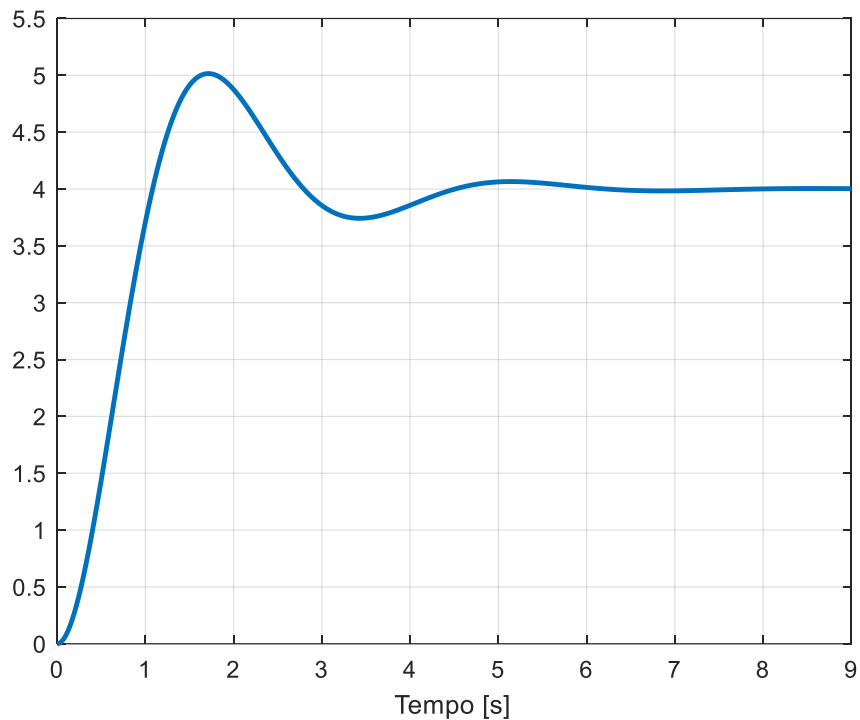
Il tempo di assestamento può essere rilevato approssimativamente in figura come prossimo a 5 secondi.

Si ha quindi: $4.6T \approx 5 \quad T = \frac{5}{4.6} = 1.08$

$$G(s) \approx \frac{2}{1 + 1.08 s}$$

Es. 6

Un sistema dinamico presenta la risposta al gradino unitario riportata in figura:



Si determini in via approssimata l'espressione della funzione di trasferimento del sistema, e si scriva l'equazione differenziale associata.

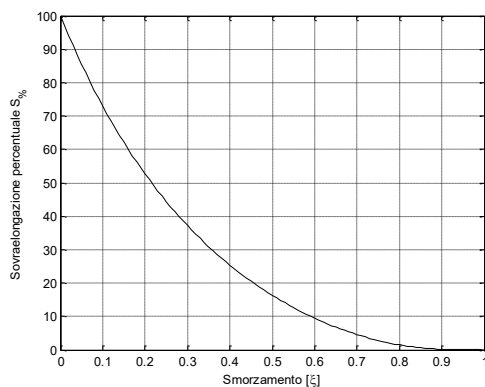
La forma della risposta al gradino è quella di un sistema del secondo ordine con due poli complessi coniugati e nessuno zero:

$$G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Il valore di regime (pari a 4) coincide con il guadagno statico μ :

$$\mu = 4$$

La sovravelongazione percentuale è del 25%. Da tale dato possiamo ricavare lo smorzamento ξ che sarà approssimativamente pari a 0.4: $\xi \approx 0.4$



Per ricavare la pulsazione naturale, possiamo far riferimento indifferentemente al periodo o all'istante del primo punto di massimo.

$$\text{Periodo } T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\text{Istante del primo punto di massimo: } t_p = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

Risulta più comodo leggere dal grafico della risposta l'istante del primo punto di massimo, approssimativamente pari a 1.8 secondi: $t_p \approx 1.8s$

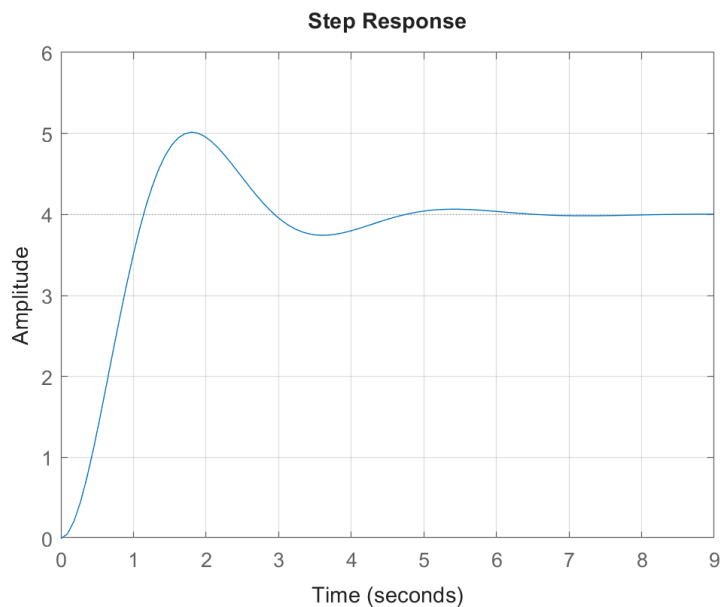
La pulsazione naturale può pertanto essere dedotta sulla base della espressione di t_p , invertendola rispetto ad ω_n :

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{1.8 \cdot \sqrt{1-(0.4)^2}} \approx 1.9 \text{ rad/s}$$

Sostituendo nella FdT del sistema i valori determinati per i parametri, si ottiene:

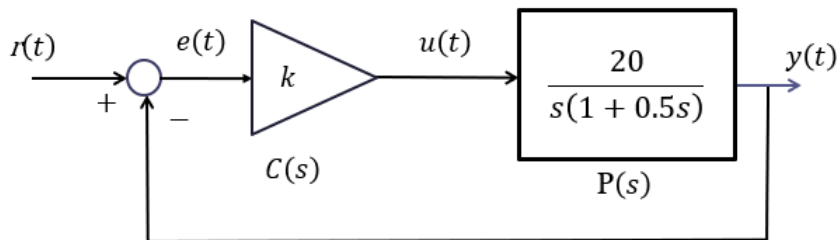
$$G(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{4 \cdot (1.9)^2}{s^2 + 2 \cdot 0.4 \cdot 1.9 s + (1.9)^2} = \frac{14.44}{s^2 + 1.52s + 3.61}$$

Il seguente grafico mostra la risposta al gradino del sistema individuato, che come atteso risulta coincidente con la curva fornita nel testo nel quesito.



```
s=tf('s')
mu=4;
csi=0.4;
omegan=1.9;
G=mu*omegan^2/(s^2+2*csi*omegan*s+omegan^2);
step(G,9),grid
```

Es. 16 Con riferimento al seguente sistema di controllo



si determini il minimo valore del parametro k in modo tale che a transitorio esaurito l'errore a regime e_∞ corrispondente ad un set point a rampa $r(t) = 4t$ sia tale che $|e_\infty| \leq 0.02$

Verifichiamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Il polinomio caratteristico si determina moltiplicando fra loro le FdT del regolatore $C(s) = k$ e del processo $P(s) = \frac{20}{s(1+0.5s)}$ e sommando successivamente il numeratore ed il denominatore della FdT "aggregata" $C(s)P(s)$.

$$C(s)P(s) = k \cdot \frac{20}{s(1 + 0.5s)} = \frac{20k}{0.5s^2 + s}$$

$$P_{car}(s) = 0.5s^2 + s + 20k$$

Sulla base della regola di Cartesio, il sistema di controllo è pertanto as. stabile a ciclo chiuso in corrispondenza di ogni possibile valore positivo di k .

In un sistema di controllo di tipo 1 con un set-point a rampa, il segnale di errore $e(t)$ tende ad un valore costante. Per determinare tale valore utilizziamo il Teorema del valore finale.

FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'errore:

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + \frac{20k}{s(1 + 0.5s)}} = \frac{s(1 + 0.5s)}{s(1 + 0.5s) + 20k} = \frac{s(1 + 0.5s)}{0.5s^2 + s + 20k}$$

Trasformata di Laplace (TdL) del segnale di errore:

$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s(1 + 0.5s)}{0.5s^2 + s + 20k} \cdot \frac{4}{s^2} = \frac{4(1 + 0.5s)}{s(0.5s^2 + s + 20k)}$$

Nella precedente relazione è stata impiegata l'espressione della TdL $R(s) = \frac{4}{s^2}$ di un set point a rampa $r(t) = 4t$.

Poiché $E(s)$ ha tutti i poli ha parte reale negativa più un polo semplice in $s=0$ risulta soddisfatta la condizione di applicabilità del Teorema del valore finale. Ciò ci assicura che il segnale di errore tende ad un valore finito costante e_∞ . Determiniamolo:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = [sE(s)]_{s=0} = \left[\frac{4(1 + 0.5s)}{0.5s^2 + s + 20k} \right]_{s=0} = \frac{4}{20k} = \frac{1}{5k}$$

Imponiamo che e_∞ soddisfi la disuguaglianza imposta dall'esercizio:

$$e_{\infty} = \frac{1}{5k} \leq 0.02 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{1}{5 \cdot 0.02} = 10$$

Il minimo valore del parametro k in modo tale che a transitorio esaurito l'errore a regime e_{∞} corrispondente ad un set point $r(t) = 4t$ sia tale che $|e_{\infty}| \leq 0.02$ è pertanto $k = 10$.

N.B. Il valore di regime e_{∞} del segnale di errore in un sistema di controllo di tipo 1 soggetto ad un set-point a rampa $r(t) = \Sigma t$ può essere determinato ricorrendo alla seguente formula:

$$e_{\infty} = \frac{\Sigma}{\mu_R \mu_P}$$

In cui Σ è la pendenza della rampa di set-point, μ_R è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del regolatore, e μ_P è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del processo.

Nel sistema di controllo in esame:

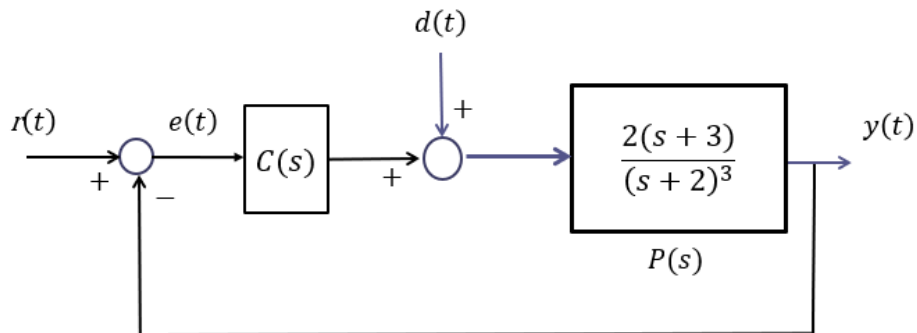
$$\Sigma = 4 \quad \mu_R = k \quad \mu_P = 20$$

$$e_{\infty} = \frac{\Sigma}{\mu_R \mu_P} = \frac{4}{20k} = \frac{1}{5k}$$

Si riottiene quindi, ovviamente, lo stesso valore di e_{∞} determinato in precedenza.

Es. 17

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



progettare un controllore $C(s)$ che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1) Precisione statica.
- S2) Errore a regime per un set point a rampa unitaria non superiore a 0.1
- S3) Attenuazione minima di un disturbo costante pari al 95%

Le 3 specifiche sono tutte inerenti il comportamento a regime.

Poiché il processo non contiene un polo nell'origine, la specifica S1 prevede l'inserimento di un polo nell'origine nel controllore.

La specifica S2 è soddisfatta se il controllore possiede polo nell'origine e se il suo guadagno statico generalizzato è sufficientemente elevato.

La specifica S3 potrebbe potenzialmente essere soddisfatta mediante un controllore non contenente un polo nell'origine, ma poiché le due precedenti specifiche S1 ed S2 implicano che debba essere inserito un polo nell'origine nel controllore la specifica S3 sarà automaticamente soddisfatta senza alcun vincolo sul guadagno K_C e con un livello di attenuazione di un disturbo costante pari al 100% (CNES per la reiezione di un disturbo costante).

Ricerchiamo pertanto il controllore nella forma seguente

$$C(s) = K_C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{s}$$

con un polo nell'origine, uno zero addizionale nel punto -2 che si ritiene opportuno sovrapporre ad uno dei poli del processo, ed un generico guadagno statico generalizzato K_C del quale deve essere determinato l'intervallo di valori ammissibili che garantiscano la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo ed il soddisfacimento della specifica S2 (sia la specifica S1 che la specifica S3 sono difatti automaticamente garantite indipendentemente dal valore di K_C , purché il controllore sia tale da garantire la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo).

Determiniamo il polinomio caratteristico del sistema di controllo.

Il polinomio caratteristico si determina moltiplicando fra loro le FdT del regolatore $C(s) = K_C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{s}$ e del processo $P(s) = \frac{2(s+3)}{(s+2)^3}$ e sommando successivamente fra loro il numeratore ed il denominatore della FdT "aggregata" $C(s)P(s)$.

$$C(s)P(s) = K_C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{2(s+3)}{(s+2)^3} = \frac{K_C(s+3)}{s(s+2)^2}$$

$$P_{car}(s) = s(s+2)^2 + K_C(s+3) = s(s^2 + 4s + 4) + K_Cs + 3K_C = s^3 + 4s^2 + (4 + K_C)s + 3K_C$$

Il polinomio caratteristico di grado 3 ammette tutte le radici a parte reale negativa se tutti i coefficienti hanno segno concorde (cioè, se $K_C > -4$) e se in aggiunta vale che

$$4 \cdot (4 + K_C) > 3K_C$$

Rielaborando:

$$16 + 4K_C > 3K_C \quad \Rightarrow \quad K_C > -16$$

Il sistema di controllo è pertanto as. stabile a ciclo chiuso qualunque sia il valore **positivo** del guadagno statico K_C del controllore.

Sappiamo che in un sistema di controllo di tipo 1, in risposta ad un set point a rampa il segnale di errore tende ad un valore costante di regime. Per determinare tale valore utilizziamo il Teorema del valore finale.

FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'errore:

$$\begin{aligned} W_r^e(s) &= \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_C(s+3)}{s(s+2)^2}} = \frac{s(s+2)^2}{s(s+2)^2 + K_C(s+3)} \\ &= \frac{s(s+2)^2}{s^3 + 4s^2 + (4 + K_C)s + 3K_C} \end{aligned}$$

Trasformata di Laplace (TdL) del segnale di errore:

$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s(s+2)^2}{s^3 + 4s^2 + (4 + K_C)s + 3K_C} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{(s+2)^2}{s(s^3 + 4s^2 + (4 + K_C)s + 3K_C)}$$

Nella precedente relazione è stata impiegata l'espressione della TdL $R(s) = \frac{1}{s^2}$ di un set point a rampa $r(t) = t$.

Poiché $E(s)$ ha tutti i poli ha parte reale negativa più un polo semplice in $s=0$ risulta soddisfatta la condizione di applicabilità del Teorema del valore finale. Ciò ci assicura che il segnale di errore tende ad un valore finito costante e_∞ . Determiniamolo:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = [sE(s)]_{s=0} = \left[\frac{(s+2)^2}{(s^3 + 4s^2 + (4 + K_C)s + 3K_C)} \right]_{s=0} = \frac{4}{3K_C}$$

Imponiamo che e_∞ soddisfi la disuguaglianza imposta dall'esercizio:

$$e_\infty = \frac{4}{3K_C} \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad K_C \geq \frac{4}{3 \cdot 0.1} = 13.33$$

L'esercizio è pertanto risolto dal controllore

$$C(s) = K_C \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2}{s} \quad K_C \geq 13.33$$

N.B. Il valore di regime e_∞ del segnale di errore in un sistema di controllo di tipo 1 soggetto ad un set-point a rampa $r(t) = \Sigma t$ può essere determinato ricorrendo alla seguente formula:

$$e_\infty = \frac{\Sigma}{\mu_R \mu_P}$$

In cui Σ è la pendenza della rampa di set-point, μ_R è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del regolatore, e μ_P è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del processo.

Nel sistema di controllo in esame:

$$\Sigma = 1 \quad \mu_R = K_C \quad \mu_P = P(0) = \frac{3}{4}$$

$$e_\infty = \frac{\Sigma}{\mu_R \mu_P} = \frac{1}{K_C \frac{3}{4}} = \frac{4}{3K_C}$$

Si riottiene quindi, ovviamente, lo stesso valore di e_∞ determinato in precedenza.

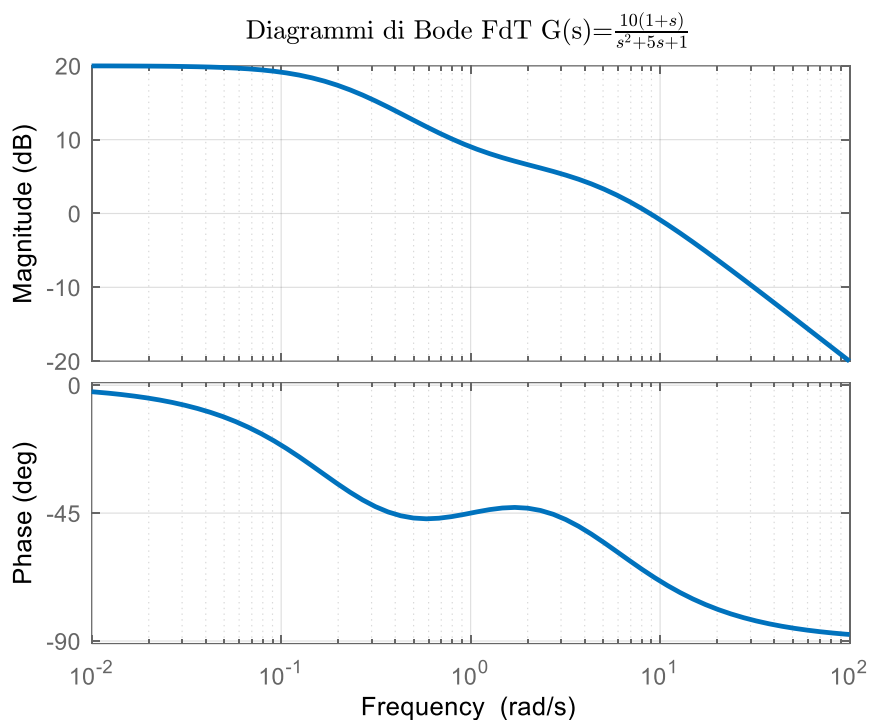
Es. 19

Dato un sistema dinamico con funzione di trasferimento $G(s)$, si enunci con precisione il teorema della risposta armonica (ossia il risultato che fornisce l'espressione dell'uscita a regime in risposta ad un segnale armonico ingresso), specificandone le ipotesi di applicabilità.

Posto quindi:

$$G(s) = 10 \frac{1 + s}{s^2 + 5s + 1}$$

si determini l'espressione dell'uscita, a transitorio esaurito, quando l'ingresso assume l'andamento $u(t) = 5 \sin(2t)$.



In un sistema dinamico $G(s)$ **asintoticamente stabile** soggetto ad un segnale di ingresso

$$u(t) = X \cos(\omega^* t + \phi)$$

L'evoluzione di regime è la seguente

$$y_{regime}(t) = X |G(j \omega^*)| \cos(\bar{\omega} t + \phi + \angle G(j \omega^*))$$

Nel caso in esame:

$$X = 5, \quad \omega^* = 2 \text{ rad/s} \quad \phi = 0$$

L'evoluzione di regime è pertanto:

$$y_{regime}(t) = 5 \cdot |G(j 2)| \cos(2t + \angle G(j 2))$$

Leggiamo i valori di $|G(j 2)|$ e $\angle G(j 2)$ nei diagrammi di Bode della F.R.A.

In corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega^* = 2 \text{ rad/s}$ il modulo espresso in decibel è pari a $|G(j2)|_{db} \approx 6.5$, mentre la fase, espressa in gradi, è $\angle G(j2)_{deg} \approx -43^\circ$

Prima di poter impiegare tali valori nella espressione della evoluzione di regime dell'uscita, questi debbono essere convertiti nel valore naturale (il modulo) e nel valore in radianti (la fase).

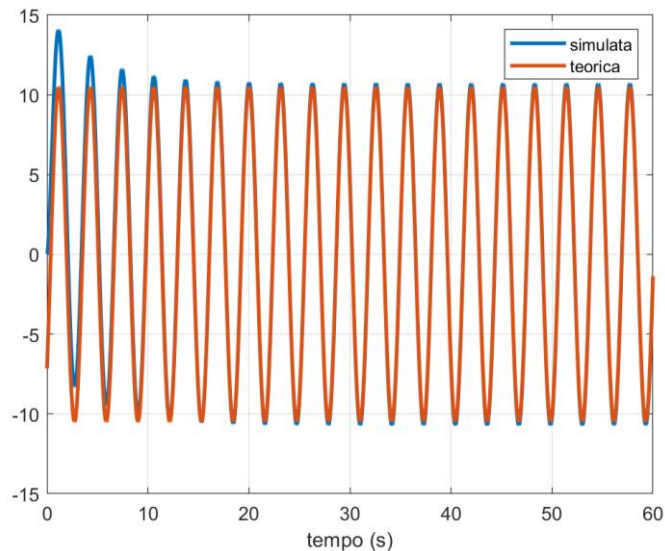
$$|G(j2)| = 10^{\frac{|G(j2)|_{db}}{20}} = 10^{\frac{6.5}{20}} \approx 2.1$$

$$\angle G(j2)_{rad} = \angle G(j2)_{deg} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx -0.75 \text{ rad}$$

Sostituendo i valori si ottiene

$$y_{regime}(t) = 5 \cdot 2.1 \cdot \cos(2t - 0.75) = 10.5 \cdot \cos(2t - 0.75)$$

La seguente Figura mostra, sovrapposte, l'evoluzione dell'uscita ottenuta mediante simulazione dinamica (linea blu) e quella ottenuta sulla base delle analisi teoriche (linea rossa).



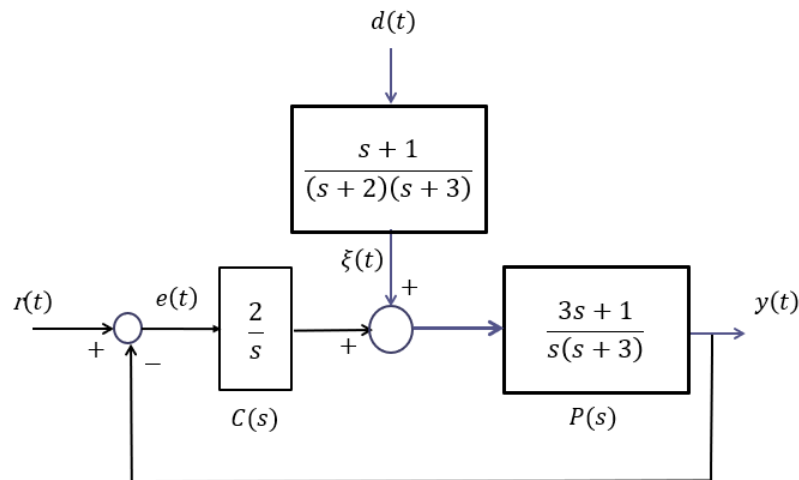
```
s=tf('s');
G=10*(1+s)/(s^2+5*s+1)

t=0:0.01:60;
u=5*sin(2*t);
y=lsim(G,u,t);
y_teorica=10.5*sin(2*t-0.75)

figure
plot(t,y,t,y_teorica,'LineWidth',2),grid
xlabel('tempo (s)')
legend('simulata','teorica')
```

Es. 20

Con riferimento al seguente sistema di controllo in retroazione



determinare l'espressione analitica della evoluzione di regime della variabile di uscita quando $r(t) = 3t + 0.5 \sin(t)$ e $d(t) = 1$.

Verifichiamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Il polinomio caratteristico si determina moltiplicando fra loro le FdT del regolatore $C(s) = \frac{2}{s}$ e del processo $P(s) = \frac{3s+1}{s(s+3)}$ e sommando successivamente fra loro il numeratore ed il denominatore della FdT "aggregata" $C(s)P(s)$.

$$C(s)P(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{3s+1}{s(s+3)} = \frac{6s+2}{s^2(s+3)}$$

$$P_{car}(s) = s^2(s+3) + 6s + 2 = s^3 + 3s^2 + 6s + 2$$

Il polinomio caratteristico di grado 3 ammette tutte le radici a parte reale negativa se vale che

$$3 \cdot 6 > 2$$

Il sistema di controllo è pertanto as. stabile a ciclo chiuso.

Analizziamo singolarmente il comportamento di regime dell'uscita $y(t)$ in risposta alle tre distinte aliquote del set-point e del disturbo.

$$\mathbf{r_1(t) = 3t}$$

In un sistema di controllo di tipo 2, un set point a rampa viene esattamente riprodotto a regime (in altri termini, il segnale di errore tende a zero). Quindi

$$y_{regime,1}(t) = 3t$$

$$\mathbf{r_2(t) = 0.5 \sin(t)}$$

$$y_{regime,2}(t) = 0.5 M \sin(t + \phi)$$

$$\text{In cui } M = |W_r^y(j\omega)|_{\omega=1} \quad \text{e} \quad \phi = \angle W_r^y(j\omega)|_{\omega=1}$$

Se fossero disponibili i Diagrammi di Bode della FdT $W_r^y(s)$ sarebbe possibile leggervi direttamente i valori di M e ϕ valutando il valore del modulo e della fase alla pulsazione $\omega = 1 \text{ rad/s}$, e convertendo successivamente il modulo in decibel nel suo valore naturale e la fase da gradi in radianti.

In assenza dei diagrammi esplicitiamo M e ϕ dopo aver determinato la FdT $W_r^y(s)$

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{2}{s} \cdot \frac{3s+1}{s(s+3)}}{1 + \frac{2}{s} \cdot \frac{3s+1}{s(s+3)}} = \frac{6s+2}{s^2(s+3) + 6s+2}$$

La relativa Funzione di Risposta Armonica (FRA) è:

$$W_r^y(j\omega) = \frac{6j\omega + 2}{-\omega^2(j\omega + 3) + 6j\omega + 2}$$

La FRA valutata alla pulsazione di 1 rad/sec risulta espressa dal seguente numero complesso

$$W(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{6j+2}{-(j+3) + 6j+2} = \frac{6j+2}{5j-1}$$

M e ϕ sono rispettivamente il modulo e la fase del numero complesso $\frac{6j+2}{5j-1}$

$$M = \left| \frac{6j+2}{5j-1} \right| \quad \phi = \angle \left\{ \frac{6j+2}{5j-1} \right\}$$

Quindi:

$$y_{regime,2}(t) = 0.5 \left| \frac{6j+2}{5j-1} \right| \sin \left(t + \angle \left\{ \frac{6j+2}{5j-1} \right\} \right)$$

$$d(t) = 1$$

L'uscita del sistema dinamico $\frac{s+1}{(s+1)(s+3)}$ soggetto ad un ingresso costante unitario converge asintoticamente verso un valore costante. Tale segnale viene completamente compensato a regime per effetto del polo nell'origine del regolatore (CNES per la reiezione di un disturbo costante). Pertanto:

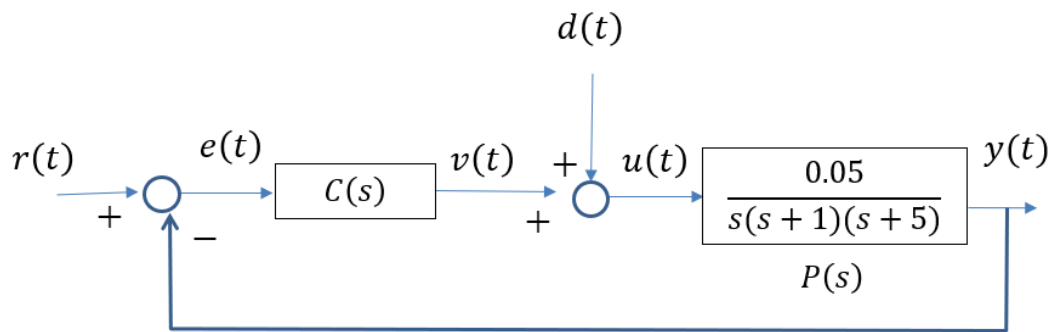
$$y_{regime,3}(t) = 0$$

Applicando il Principio di Sovrapposizione degli Effetti:

$$\begin{aligned} y_{regime}(t) &= y_{regime,1}(t) + y_{regime,2}(t) + y_{regime,3}(t) = \\ &= 3t + 0.5 \left| \frac{6j+2}{5j-1} \right| \sin \left(t + \angle \left\{ \frac{6j+2}{5j-1} \right\} \right) \end{aligned}$$

Es. 21

Si consideri il sistema di controllo in Figura



Figura

con un regolatore proporzionale $C(s) = K_C$.

Definire, se esiste, un intervallo di valori per il guadagno K_C che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

S1) Precisione statica.

S2) Attenuazione di un disturbo costante in misura almeno pari al 99%

Il polinomio caratteristico del sistema di controllo con regolatore proporzionale $C(s) = K_C$ è

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+5) + 0.05 K_C = s^3 + 6s^2 + 5s + 0.05K_C$$

Il polinomio caratteristico di grado 3 ammette tutte le radici a parte reale negativa se

$$6 \cdot 5 > 0.05K_C \Rightarrow K_C < 600$$

Quindi, il guadagno critico per il sistema di controllo oggetto dell'esercizio è $K_C^{cr} = 600$.

La specifica S1 è garantita da qualunque valore del guadagno K_C che garantisca la stabilità asintotica a ciclo chiuso del sistema di controllo.

La specifica S2 richiede che

$$W_d^y(0) < 0.01.$$

In un sistema di controllo di tipo 1 in cui il polo nell'origine si trova nel processo si ha

$$W_d^y(0) = \frac{1}{K_C}$$

Quindi:

$$W_d^y(0) = \frac{1}{K_C} < 0.01 \Rightarrow K_C > 100$$

La relazione $W_d^y(0) = \frac{1}{K_C}$ può ovviamente essere dedotta senza ricorrere alla formula preconfezionata partendo dalla espressione della FdT a ciclo chiuso fra il disturbo d e l'uscita y :

$$W_d^y(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{0.05}{s(s+1)(s+5)}}{1 + K_C \cdot \frac{0.05}{s(s+1)(s+5)}} = \frac{0.05}{s^3 + 6s^2 + 5s + 0.05K_C}$$

e valutandone successivamente il guadagno statico:

$$W_a^y(0) = \frac{0.05}{0.05K_C} = \frac{1}{K_C}$$

L'intervallo di valori ammissibili per il guadagno K_C che garantisce il soddisfacimento delle specifiche S1 e S2 è pertanto:

$$100 \leq K_C < 600$$

GLOSSARIO

FdT Funzione di Trasferimento

TdL Trasformata di Laplace

T.F.R.G. Teorema fondamentale della risposta al gradino