

Analisi Matematica 2

Stella Vernier Piro - Università' di Cagliari

Analisi Matematica 2

seconda parte

Integrali tripli su domini normali.

Dominio normale rispetto al piano $z=0$.

Consideriamo due funzioni di due variabili $z_1 = \alpha(x, y)$, $z_2 = \beta(x, y)$, continue su un dominio D normale e sia $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$.

Definizione

Definiamo dominio normale rispetto al piano $z=0$ l'insieme dello spazio

$$V := \{(x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq \beta(x, y)\}.$$

Il volume di questo solido si puo' calcolare mediante un integrale doppio

$$\text{vol } V = \iint_D (\beta(x, y) - \alpha(x, y)) dx dy.$$

Analogamente si definiscono i domini normali rispetto ai piani $x = 0$, $y = 0$.

Sia $g(x, y, z)$ una funzione continua in V . A partire da una decomposizione di D in domini normali, si arriva alla definizione somme superiori e inferiori e quindi di integrale triplo, seguendo la definizione di integrale semplice e doppio.

Formula di riduzione: un integrale triplo si puo' ricondurre a tre integrali semplici successivi. In particolare

$$\iiint_V g(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} g(x, y, z) dz.$$

Si ottengono formule analoghe scambiando gli assi.

Se $g(x, y, z) = 1$, $\iiint_V dx dy dz = \text{volume di } V$.

Calcolare il volume del solido V così definito:

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

Cambio di coordinate negli integrali tripli.

Sia V un dominio normale del piano (u, v, w) , consideriamo tre funzioni di classe C_V^1

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \quad (u, v, w) \in V \quad (1)$$

Introduciamo il determinante Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

Teorema

Siano E e V due domini normali e l'applicazione (10) sia invertibile, di classe C^1 e $|J(u, v, w)| \neq 0$. Se $g(x, y, z)$ e' continua in E si ha

$$\begin{aligned} & \iiint_E g(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_V g(x(u, v, w), y(u, v, w), z(x, y, w)) |J(u, v, w)| \, dudvdw. \end{aligned}$$

Quindi $|J(u, v, w)| \, dudvdw = dx \, dy \, dz$ rappresenta l'elemento di volume nelle nuove coordinate.

Un esempio di cambio di coordinate che si utilizza molto spesso e' quello in coordinate dette "cilindriche".

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi, \\ y = \rho \sin\phi, \\ z = z. \end{cases} \quad |J| = \rho \quad (2)$$

Corrisponde a un cambio in coordinate polari nell'integrale doppio, lasciando inalterata la z .

es. Calcolare il volume della porzione di solido interno alla sfera di centro l'origine e raggio 2, che si proietta nel cerchio $x^2 + y^2 = 2y, z \geq 0$.

Consideriamo tre funzioni continue di una variabile

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I \quad (3)$$

Al variare di t in I , il punto $Q=(x(t),y(t),z(t))$ descrive una curva Γ .

Definizione

Si definisce curva in R^3 un insieme $\Gamma \subseteq R^3$ al quale e' associata una parametrizzazione $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subseteq R$.

es: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = kt$, $t > 0$ rappresenta l'elica circolare.

$x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = 2$ rappresenta una circonferenza nel piano
 $z = 2$

Una curva si definisce

- piana, se $z(t) = 0$.
- semplice se $\mathbf{r}(t)$ e' iniettiva.
- chiusa se con $I = [a, b]$ si ha $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$
- regolare se $\mathbf{r}(t) \in C_I^1$ e $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \in I$
- regolare a tratti se si puo' decomporre in un numero finito di curve regolari.

Una curva e' orientata nel verso positivo se segue l'orientamento dei numeri reali dell'intervallo I .

es. Consideriamo un quarto di ellisse nel primo quadrante

$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Rimane fissato il verso di percorrenza antiorario che da $t = 0$ va verso $t = \frac{\pi}{2}$

La curva e' semplice ma non e' chiusa.

Cambio di parametrizzazione nelle curve

Sia $\phi \in C^1_{[\alpha, \beta]}$, con $\phi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in [\alpha, \beta]$. Sia $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, 1-1, suriettiva. Si ottiene una nuova parametrizzazione di γ considerando la funzione composta $\tilde{r}(\tau) = r(\phi(\tau))$. Oss. Se $\phi'(\tau) \geq 0$ (crescente) il verso e' lo stesso,

$\phi'(\tau) \leq 0$ (decescente) il verso e' l'opposto.

nel primo caso le curve si dicono equivalenti e hanno ugual lunghezza.

es: $r(t) = (e^t, t), t \in [0, 1]$. Sia $t = \log \tau$ ($1 - 1, C^1$),

$\tilde{r}(\tau) = (\tau, \log \tau), \tau \in [1, e]$

Consideriamo una curva γ continua e sia $r(t)$ la sua parametrizzazione. Sia $\mathcal{L}(p)$ la lunghezza della poligonale relativa alla decomposizione D di $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Definizione

La curva γ si definisce rettificabile se

$$\sup_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(p) = L < +\infty.$$

dove il sup è preso al variare della decomposizione D . L si chiama la sua lunghezza.

Tutte le curve regolari sono rettificabili e

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Osservazione. Le curve regolari a tratti sono rettificabili e la loro lunghezza e' data dalla somma delle lunghezze dei tratti regolari.

Curve piane.

Se la curva e' data in forma parametrica, $(x(t), y(t)), \in [a, b]$

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

- in forma cartesiana: $y = f(x), x \in [a, b],$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

- in forma polare: $\rho = \rho(\phi)$

$$L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2(\phi) + [\rho'(\phi)]^2} d\phi.$$

calcolare la lunghezza della curva $\gamma : r(t) = (e^{2t}, 2e^t, t)$, $t \in [0, 1]$

calcolare la lunghezza della curva $\gamma : y = \log x, x \in [1, e]$

Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : \rho = 2 \cos\phi, \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Data la curva $\gamma = (e^t \sin t, e^t \cos t)$, $t \in [0, 1]$, calcolare la sua lunghezza.

Calcolare la lunghezza del tratto di elica circolare di equazione
 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$

Ascissa curvilinea.

Sia $\gamma : r = r(t) \in C^1_{[a,b]}$ introduciamo la funzione integrale

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} d\tau,$$

che sarà di classe C^1 . Se $\sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} \neq 0$, allora anche $s'(t) \neq 0$ per il teo Fondamentale. Questo implica che $s(t)$ è una corrispondenza biunivoca da $[a, b]$ in $[0, L]$. Si otterrà una nuova parametrizzazione di γ considerando la funzione inversa $t = t(s)$, tale che

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} > 0.$$

allora $\tilde{\gamma} : r(t(s))$ sarà equivalente a γ . s si chiama ascissa curvilinea o lunghezza d'arco.

Si scriverà

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Riscriviamo la formula della lunghezza di una curva

$$L = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Sia A un aperto connesso di R^3 e Γ un arco di curva semplice regolare o regolare a tratti

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b]$$

contenuta in A . Sia $g(x, y, z)$ una funzione continua in A ; f calcolata nei punti di Γ (funzione composta) vale

$$g(x(t), y(t), z(t)).$$

Se $A \subset R^2$ e sia $z = f(x, y)$ una funzione continua (e' una superficie,) sia γ una curva piana $\subset A$ e $f(x(t), y(t))$ la funzione calcolata sui punti di γ .

Definizione in R^3

Si definisce integrale curvilineo di $g(x, y, z)$ esteso all'arco di curva Γ l'integrale rettilineo

$$\int_{\Gamma} g(x, y, z) ds = \int_a^b g(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Definizione in R^2

Si definisce integrale curvilineo di $f(x, y)$ esteso all'arco di curva γ l'integrale rettilineo

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Significato geometrico di integrale curvilineo.

Proprietà'.
linearità'.

additività'

indipendenza dalla parametrizzazione o dall'orientazione

Esercizi.

Calcolare

$\int_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, con $\Gamma : \mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Γ e' la circonferenza intersezione della superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e il piano $y = x$

Calcoliamo

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 2\cos t), \quad ds = 2 dt.$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} \cdot 2 dt = 4 \int_0^{2\pi} dt = 8\pi.$$

Esercizi.

Calcolare

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2) ds, \text{ dove } \gamma : r(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

Superfici e Integrali superficiali.

Sia A un dominio connesso di \mathbb{R}^2 . Consideriamo un'applicazione $\mathbf{r} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe $C^1(A)$.

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

Al variare di (u, v) in A , il punto $Q = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ descrive una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ e' una parametrizzazione di Σ .

Definizione

Si definisce superficie in \mathbb{R}^3 una coppia (Σ, \mathbf{r}) dove $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{r}(u, v) \in C^0(A)$ e' una parametrizzazione di Σ , l'interno di A e' un aperto connesso di \mathbb{R}^2 , tali che $\mathbf{r}(A) = \Sigma$.

Una superficie si definisce

- semplice se $\mathbf{r}(u, v)$ e' iniettiva su A .
- regolare se $\mathbf{r}(u, v) \in C^1(\mathring{A})$ e la matrice

$$M = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$

ha rango 2, $\forall (u, v) \in A$.

- regolare a tratti se si puo' decomporre in un numero finito di superfici regolari,
- chiusa se e' limitata e il suo bordo

$$B\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \Sigma = \emptyset$$

Consideriamo una superficie cartesiana $\Sigma : z = f(x, y)$, definita in A , se $f \in C^1(A) \implies \Sigma$ e' regolare, Infatti riscrivendo la parametrizzazione $x = x, y = y, z = f(x, y)$, la matrice delle derivate parziali prime ha sempre rango 2.

Il bordo di una porzione di superficie definita in A e' l'insieme dei punti Q su Σ immagine dei punti $P \in FA$.

La superficie conica in forma cartesiana $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ in forma parametrica

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = k u, 0 \leq u \leq r, 0 \leq v \leq 2\pi, k > 0.$$

Linee coordinate e vettore tangente.

Sia $\mathbf{r}(u, v)$ l'equazione della superficie Σ e siano $\mathbf{r}(u_0, v)$, e $\mathbf{r}(u, v_0)$ le curve che si ottengono su Σ considerando $u = u_0$, $v = v_0$ nel piano (u, v) : si chiamano 'linee coordinate' sulla superficie, (u, v) si chiamano 'coordinate locali'. I vettori tangenti saranno

$$\begin{cases} \mathbf{r}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \\ \mathbf{r}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)) \end{cases} \quad (5)$$

Consideriamo il prodotto vettoriale

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(yz)}{\partial(u,v)} i + \frac{\partial(zx)}{\partial(u,v)} j + \frac{\partial(xy)}{\partial(u,v)} k.$$

Si ha

(superficie regolare) $\iff (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0})$

Questo implica che i vettori sono lin. indipendenti.

Equazione del piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Il vettore $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ e' perpendicolare alla superficie. Il versore normale e' dato da

$$\mathbf{n}_e = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

In forma cartesiana

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y),$$

$$\mathbf{n}_e = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

Riscriviamo l'equazione del piano tangente in (x_0, y_0, z_0)

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

Sia Σ una superficie regolare , si scelga il versore normale in modo che, variando con continuita' lungo una curva chiusa su Σ , possa ritornare alla posizione iniziale: si e' cosi' definita l'orientazione della superficie in conseguenza della scelta della normale.

Area di una Superficie

Sia Σ una porzione di superficie regolare e sia $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in A$ una sua parametrizzazione.

Definizione

Si definisce area della superficie Σ

$$\text{area}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma = \iint_A |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv.$$

Se Σ e' data in forma cartesiana : $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$

$$\text{area}(\Sigma) = \int_{\Sigma} d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

Sia $g(x, y, z) \in C_V^0$ e sia $\Sigma \subset V$ regolare.

Definizione

Si definisce integrale superficiale di g esteso a Σ

$$\int_{\Sigma} g(x, y, z) d\sigma = \iint_A g(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv.$$

Se Σ e' data in forma cartesiana : $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$

$$\int_{\Sigma} g(x, y, z) d\sigma = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

Esempi: Calcolare

$$\int_{\Sigma} (x + 2(y - 2) + z) \, d\sigma$$

dove $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x - y \text{ con } x^2 + y^2 \leq 1/16\}$

Calcolare

$$\int_{\Sigma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} d\sigma$$

dove $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ con } 1 \leq z \leq 4\}$

Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{d\sigma}{1+4z}$$

dove $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ con } x^2 + y^2 \leq 1\}$

Sia dato un campo vettoriale

$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \in C^1(V)$, $V \subset \mathbb{R}^3$,
aperto connesso.

Consideriamo la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y, z) = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Sia $\omega \in C^1(V)$ e sia γ una curva regolare contenuta in V di equazione

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b]$$

Definizione di integrale curvilineo di ω

Si definisce integrale curvilineo di ω esteso a γ

$$\int_{\gamma} F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz =$$
$$\int_a^b \left(F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \right.$$
$$\left. F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt$$

Data $\omega = -ydx + xdy$, calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma = \{x^2 + y^2 = 4\}$

Esso rappresenta il lavoro compiuto dal campo per spostare il punto di applicazione da $r(a)$ a $r(b)$ lungo la curva γ .

Proprietà'.

1. $\int_{\gamma} \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = \alpha \int_{\gamma} \omega_1 + \beta \int_{\gamma} \omega_2;$

2. $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega;$

3. Se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Ricordiamo che se una curva è piana semplice e chiusa (curva di Jordan) ed inoltre regolare, si può fissare l'orientazione positiva scegliendo in ogni punto la normale interna e il versore tangente in modo che la coppia (t, n_i) sia orientata come (x, y) .

Data una forma differenziale di classe $C^1(V)$, V aperto connesso, essa si definiva' esatta, se esiste una funzione differenziabile $f(x,y,z)$ tale che

$$df = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Questo equivale a dire che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = F_3 \quad (\nabla f = F).$$

f si chiama funzione potenziale (dalla fisica).

Osservazione. Se f e' una funzione potenziale, lo e' anche $f+c$, c cost.

Teorema 1

Se ω e' esatta in V e γ e' una curva regolare interna a V con parametrizzazione $r(t)$, $t \in [a, b]$

$$\int_{\gamma} \omega = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)).$$

Dim.

$$\int_{\gamma} F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) dt = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)).$$

Se la forma è esatta l'integrale curvilineo non dipende dalla curva, ma solo dagli estremi.

Il teorema si generalizza a curve regolari a tratti.

Teorema 2

Sia ω di classe $C^1(V)$, V aperto connesso, le seguenti 3 affermazioni sono vere:

- i) ω e' esatta in V ;
- ii) per OGNI curva chiusa $\gamma \subset V$, risulta

$$\oint_{\gamma} \omega = 0;$$

- iii) se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dimostriamo ad esempio $i) \rightarrow ii)$. Si utilizza il Teo.1, dopo aver spezzato la curva chiusa in due parti.

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = (f(P_2) - f(P_1)) + (f(P_1) - f(P_2)) = 0.$$

Condizione necessaria

Sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, con $\omega \in C^1(V)$. Condizione necessaria affinché ω sia esatta in V è che risulti

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

ovvero

$$\operatorname{rot} F = 0$$

La forma F nello spazio : $\operatorname{rot} F=0$ si chiama chiusa.

In \mathbb{R}^2 , se $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ è esatta, allora

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

La forma F nel piano: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ si chiama chiusa.

Dimostrazione in \mathbb{R}^2

Se ω e' esatta, esiste la funzione potenziale f tale che

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Deriviamo la F_1 rispetto a y e F_2 rispetto a x . Per la f vale il teo. di Schwarz (sull'invertibilita' dell'ordine di derivazione delle derivate seconde):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Ne consegue che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Dimostrazione in \mathbb{R}^3

Sia ω una forma differenziale esatta in \mathbb{R}^3 . Allora

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Data $F = (x^2, y, z^3)$, dimostrare che e' chiusa in \mathbb{R}^3

Osserviamo che, una volta dimostrato che ω e' esatta, l'integrale curvilineo e' indipendente dalla curva γ , possiamo allora sostituire γ con una curva di comodo, come ad esempio, una spezzata a lati paralleli agli assi.

Nel piano costruiamo la funzione potenziale $f(x, y)$ ponendo

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x F_1(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y F_2(x, \eta) d\eta.$$

Nello spazio si avra' (ad esempio):

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^x F_1(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_{y_0}^y F_1(x, \eta, z_0) d\eta + \int_{z_0}^z F_1(x, y, t) dt.$$

Condizione sufficiente affinché ω sia esatta.

Condizione sufficiente

Sia V un insieme semplicemente connesso ed F chiusa ($\text{rot } F = 0$), allora ω è esatta in V .

Data la forma differenziale $\omega = 2x^3 dx + (x^2 - y^2) dy$, integrarla lungo la spezzata che e' la frontiera del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$, percorsa in senso antiorario.

Data la forma differenziale

$$\omega = [\sin(x + y) + x \cos(x + y)]dx + [x \cos(x + y)]dy ,$$

1. dimostrare che e' esatta nel suo campo di definizione;
2. trovare la funzione potenziale;
3. integrarla lungo la spezzata che e' la frontiera del triangolo di vertici (0,0), (1,0) e (0,1), percorsa in senso antiorario.

$f(x, y)$ e' tale che $f_x = \sin(x + y) + x \cos(x + y)$, $f_y = x \cos(x + y)$

Dalla relazione $f_y = x \cos(x + y)$ si ricava, integrando a meno di una costante che dipende da x

$$f(x, y) = x \sin(x + y) + \phi(x).$$

Si trova $\phi(x)$ derivando la f rispetto a x ed eguagliandola alla f_x prima componente della forma. $f_x = \sin(x + y) + x \cos(x + y) + \phi'(x)$, si deduce $\phi'(x) = 0$, $\phi = \text{cost.}$ La funzione potenziale $f(x, y) = x \sin(x + y)$.

3. L'integrale vale zero perche' la curva e' chiusa e la forma e' esatta in \mathbb{R}^2 .

Osservazione. Se la forma non e' esatta, l'integrale su una curva chiusa puo' essere zero o diverso da zero.

Data $\omega = 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy$

1. dimostrare che e' esatta in \mathbb{R}^2 ;
2. calcolare la funzione potenziale. La forma e' chiusa in un aperto semplicemente connesso (\mathbb{R}^2). Si ha:

$$f(x, y) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y 3x^2\eta^2 d\eta = x^2 y^3.$$

Trasformazioni integrali.

Formule di Green Gauss

Trasformano nel piano un integrale doppio in un curvilineo
nello spazio un triplo in un superficiale.

Teorema della divergenza

Teorema di Stokes.

Trasforma un integrale superficiale in un curvilineo.

1 formula di Green-Gauss

Siano $f(x, y)$ continua con la sua derivata rispetto a x , e sia D un dominio normale rispetto all'asse y , con frontiera di D (FD) una curva regolare o regolare a tratti

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{+FD} f dy.$$

2 formula di Green-Gauss

Siano $g(x, y)$ continua con la sua derivata rispetto a y , e sia D un dominio normale rispetto all'asse x , con frontiera di D (FD) una curva regolare o regolare a tratti

$$\iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{+FD} g dx.$$

Teorema della divergenza

Siano $\vec{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \in C^1(D)$, e sia D un dominio normale rispetto ad entrambi gli assi, con frontiera di D (FD) una curva regolare o regolare a tratti

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{v} dx dy = \int_{+FD} (\vec{v} \cdot \vec{n}_e) ds.$$

Dimostrazione. Si ottiene sommando le due formule e ricordando che

$$\operatorname{div} \vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right); \quad FD = \{(x(t), y(t)), t \in [a, b]\}, \quad \vec{n}_e = \left(\frac{y'(t), -x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

Teorema della divergenza nello spazio

Siano $\vec{\mathbf{v}}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(V)$, e sia V un dominio normale rispetto a tutti gli assi, con frontiera (FV) una superficie regolare o regolare a tratti orientabile

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} dx dy dz = \iint_{+FV} (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_e) d\sigma.$$

Integrale triplo \implies *Integrale superficiale*

Dimostrazione della 1 formula.

Sia D normale rispetto all'asse y .

$$D = \{c \leq y \leq d; \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_c^d [f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)] dy.$$

Calcoliamo ora l'integrale su FD

$$\int_{+FD} f dy = \int_c^d f(\beta(y), y) dy + \int_d^c f(\alpha(y), y) dy.$$

I due integrali coincidono.

Le formule si estendono ad un dominio, unione di domini regolari.
La frontiera sarà l'unione di un numero finito di curve regolari a tratti.

Applicazione ai differenziali esatti.

Teorema

Sia $F = (F_1, F_2) \in C^0(D)$, e sia D un dominio semplicemente connesso.
Se internamente a D esistono continue $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, e $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ e sono uguali
 $\iff \omega = F_1 dx + F_2 dy$ sia un differenziale esatto in D .

Dim: 1a parte

In \mathbb{R}^2 , se $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ e' esatta, allora

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

2a parte.

Bastera' dimostrare che

$$\oint_{+\gamma} F_1 dx + F_2 dy = 0,$$

con γ una qualunque poligonale chiusa a lati paralleli agli assi, inclusa in D . Si ha

$$\oint_{+\gamma} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left[-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \right] dx dy = 0.$$

Applicazioni al calcolo delle aree di domini piani

Ricordiamo che

$$\text{mis } D = \iint_D dx \, dy.$$

Dalle formule di Green Gauss, ponendo nella prima $f(x, y) = x$ si ha

$$\text{mis } D = \int_{+FD} x \, dy.$$

Ponendo nella seconda $g(x, y) = y$ si ha

$$\text{mis } D = - \int_{+FD} y \, dx.$$

Sommando le due espressioni, si ha

$$\text{mis } D = \frac{1}{2} \int_{+FD} x \, dy - y \, dx.$$

Calcolare l'area dell'ellisse $\{x = a \cos t; y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) - (b \sin t)(-a \sin t)] dt = \pi a b.$$

Esercizi.

Formule di Green-Gauss. Enunciare le ipotesi di validita' e dimostrarne una a piacere. Utilizzandola calcolare l'integrale

$$a) \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

dove D e' il dominio definito dalle disequazioni:

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, \quad y \leq x; \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$b) \iint_D y \, dx dy,$$

dove D e' il dominio definito :

$$x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \quad y \geq x^2.$$

—

1) Prima formula di Green Gauss: Applicarla con $f(x,y)=\arctg y$, dove D e' il triangolo di vertici $(0,2)$, $(1,0)$ e $(0,-2)$ (calcolare entrambi gli integrali).

Teorema della divergenza

Teorema di Stokes

Sia $F(x, y, z) \in C^1(V)$, $V \subset \mathbb{R}^3$, e sia Σ una porzione di superficie regolare di classe $C^2(D)$, $\Sigma \subset V$, con bordo $(B\Sigma)$ una curva regolare o regolare a tratti orientata positivamente

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} F \cdot n_e) d\sigma = \int_{+B\Sigma} (F \cdot t) ds.$$

In forma scalare, ricordando che

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) := (H, L, M)$$

Se la superficie è data in forma cartesiana $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} F \cdot n_e) d\sigma &= \iint_D (H, L, M) \cdot (-f_x, -f_y, 1) dx dy = \\ &= \int_{+B\Sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \end{aligned}$$

Esercizio 1.

Teorema di Stokes: enunciarlo in forma vettoriale illustrando i simboli utilizzati. Utilizzandolo calcolare, $\int_{+\gamma} (F \cdot t) ds$, dove $F = (1 + 2z, y^2, xy)$ e γ e' la curva intersezione del piano $z=2-x-y$ con il cilindro $x^2 + y^2 \leq 1/16$. Si deve trasformare l'integrale curvilineo in un superficiale. Calcoliamo il

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 1 + 2z & y^2 & xy \end{vmatrix} = x \vec{i} + (2 - y) \vec{j}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma} (F \cdot t) ds &= \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} F \cdot n_e) d\sigma = \iint_D (x, 2 - y, 0)(1, 1, 1) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{1/4} \rho(\rho(\cos\phi - \sin\phi) + 2) d\rho = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Es.2

Seguendo lo svolgimento dell'esercizio precedente si puo' calcolare,

$$\int_{+B\Sigma} z \, dx - y \, dy + xy \, dz,$$

utilizzando il teorema, dove $B\Sigma$ e' la curva intersezione del piano $z=1-y$ con il cilindro $x^2 + y^2 = 1/9$.

Es. 3.

Calcolare,

$$\int_{+B\Sigma} F \cdot t \, ds,$$

utilizzando il teorema, dove $F = (1 - 3y, 1 - 3y, 2z^2)$ $B\Sigma$ e' il bordo della porzione di paraboloido $z = x^2 + y^2$ che si proietta sul dominio $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

Es.4.

Calcolare

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} F \cdot n_e) d\sigma$$

con $F = (1 - 3y, 1 - 3y, 2z^2)$ e $\Sigma = \{z = 2(x^2 + y^2), \text{ con } x^2 + y^2 \leq 1\}$.