

Analisi Matematica 2

Stella Vernier Piro - Universita' di Cagliari

Analisi Matematica 2

Gli argomenti che verranno trattati durante il corso sono:

1. Funzioni di due o piu' variabili.
2. Continuita', derivabilita' parziale, differenziabilita'.
3. Formula di Taylor e Mac-Laurin.
4. Massimi e minimi relativi ed assoluti.
5. Integrali doppi e tripli.
6. Integrali curvilinei e superficiali.
7. Forme differenziali lineari.
8. Formule di Green-Gauss e Teorema di Stokes.
9. Serie

Libri di testo consigliati:

Fusco-Marcellini-Sbordone: *Analisi matematica due*. Zanichelli,

Marcellini-Sbordone: *Esercizi di Analisi matematica 2*, Zanichelli.

Funzioni di due o piu' variabili. Lo spazio \mathbb{R}^3

Indichiamo con \mathbb{R} l'insieme dei numeri reali (che rappresentiamo su una retta); con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x_1, x_2) (che rappresentiamo su un piano), con $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'insieme delle terne ordinate di numeri reali (x_1, x_2, x_3) (che rappresentiamo nello spazio) In generale si indichera' con \mathbb{R}^N le n-uple di numeri reali (x_1, x_2, \dots, x_N) .

(grafici)

Definizione di distanza in \mathbb{R}^N .

Chiameremo per semplicità punti le n -uple di numeri reali.

Useremo il simbolo $P = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Dati due punti $P = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $Q = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ si definisce loro distanza

$$d(P, Q) = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proprietà' della distanza.

1. $d(P, Q) \geq 0$, and $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$;
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$;
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$, $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^N$.

Distanza dall'origine.

Indichiamo con

$$d(P, O) = \left(\sum_{i=1}^N (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

che nel caso $N = 1$ coincide con $|x|$ il modulo di x , nel caso $N = 2$ coincide con $\sqrt{x^2 + y^2}$, etc.

Definizione di intorno

L'insieme $B_\delta(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^N : |P - P_0| < \delta\}$

si definirà intorno circolare di centro P_0 e raggio δ .
Indicheremo con B^* l'intorno privo del centro.

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N

P_1 si definisce punto interno all'insieme A se $\exists B_\delta(P_1) \subset A$.

P_2 si definisce punto esterno all'insieme A se $\exists B_\delta(P_2) \subset \mathbb{R}^N \setminus A$.

Q si definisce punto di frontiera dell'insieme A se in $\forall B_\delta(Q)$ cadono punti di A e del suo complementare.

P si definisce punto di accumulazione per A se in $\forall B_\delta(P)$ cade almeno un punto di A diverso da P .

A e' aperto, se tutti i punti sono interni.

B e' chiuso se il complementare e' aperto.

Ci sono insiemi che non sono chiusi, ne' aperti.

D e' un insieme limitato se puo' essere incluso in un intorno circolare dell'origine.

Un insieme D si definisce connesso se presi ad arbitrio due suoi punti, esiste una poligonale interna all'insieme che li unisce.

Un insieme D si definisce semplicemente connesso se presa una qualunque curva chiusa interna, essa e' frontiera di un sottoinsieme di D .

Chiamiamo dominio un insieme non vuoto, aperto e connesso.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Indichiamo con $z = f(x, y)$ una funzione reale che ad un punto di D fa corrispondere un numero reale ($f : D \rightarrow \mathbb{R}$).

D si chiama insieme di definizione della f : al variare di (x, y) nell'insieme di definizione di f la z varia descrivendo una superficie cartesiana.

grafici

grafici

Definizione di Limite

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un aperto D e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di accumulazione di D .

Definizione 1

Il numero L si definisce limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ e scriveremo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in B_\delta^*(x_0, y_0) \cap D, \quad |f(x, y) - L| < \epsilon.$

Definizione 2

Si definisce limite infinito di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ e scriveremo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = +\infty,$$

se $\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in B_\delta^*(x_0, y_0) \cap D, \quad |f(x, y)| > M.$

Continuita'

Sia $(x_0, y_0) \in D$, se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

allora definiamo f continua in (x_0, y_0) .

Somme, prodotti di funzioni continue sono continue. Quozienti di funzioni continue sono continue eccetto che negli zeri del denominatore.

Componendo funzioni continue otteniamo funzioni continue.

Si estendono a funzioni di due variabili i teoremi noti per funzioni di una variabile.

Teorema di Weierstrass

Sia $f(x, y)$ continua in D e D sia un insieme chiuso e limitato (compatto). Allora f assume massimo e minimo su D .

Definizione di derivabilita' parziale

Sia D un insieme aperto di \mathbb{R}^2 e $f(x, y)$ definita in D . Consideriamo il punto $(x_0, y_0) \in D$ e un suo intorno $B_\delta(x_0, y_0) \subset D$. Consideriamo il punto $(x_0 + h, y_0)$, $h \in \mathbb{R}$. Costruiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Definizione di Derivata parziale rispetto a x .

Se esiste finito il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_x(x_0, y_0),$$

definiamo la funzione derivabile rispetto a x in (x_0, y_0) .

Una funzione e' derivabile rispetto a x in D se e' derivabile rispetto a x in tutti i punti di D .

Si estendono le regole di derivazione sia per le operazioni che per le funzioni elementari e composte.

Consideriamo ora il punto $(x_0, y_0 + k)$, $k \in \mathbb{R}$. Costruiamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Definizione di Derivata parziale rispetto a y .

Se esiste finito il

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0),$$

definiamo la funzione derivabile rispetto a y in (x_0, y_0) .

Si usano anche i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Esercizio

Calcolare $f_x(4, 1)$ con $f(x, y) = \log(x - y^2)$

$$f_x(4, 1) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\log(x - 1) - \log(3)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3} \frac{\log \frac{x-1}{3}}{\frac{x-4}{3}} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3} \frac{\log(1 + \frac{x-4}{3})}{\frac{x-4}{3}} = \frac{1}{3},$$

dove e' stato utilizzato il limite notevole $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$

Significato Geometrico delle derivate parziali prime.

Gradiente

Indichiamo con $\nabla f = (f_x, f_y)$, che chiamiamo gradiente di f , il vettore di componenti le derivate parziali prime.

Definizione di derivata parziale seconda

Sia D un insieme aperto di \mathbb{R}^2 e $f(x, y)$ definita in D e ivi dotata di derivate parziali prime. Indichiamo con $f_x(x, y)$ e con $f_y(x, y)$ le funzioni derivate parziali prime. Definiamo la funzione f derivabile due volte rispetto a x o rispetto a y in (x_0, y_0) se le funzioni derivate prime sono a loro volta derivabili e indicheremo (tralasciando l'indicazione del punto) con i simboli brevi

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}$$

oppure con i simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Matrice delle derivate seconde o matrice Hessiana.

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Teorema di Schwarz

Sia $f(x, y)$ definita nell'aperto D e $(x_0, y_0) \in D$. Se esistono continue in (x_0, y_0) le derivate seconde di f , allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Dim.

Sia (x, y) il generico punto di D con $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ e siano (x, y_0) , (x_0, y) gli altri due punti che con (x_0, y_0) formano un rettangolo dentro D .

Introduciamo le due funzioni fissato y

$$F(x) = f(x, y) - f(x_0, y),$$

fissato x

$$G(y) = f(x, y) - f(x, y_0).$$

Applichiamo ad entrambe il Teorema di Lagrange per funzioni di una variabile.

In particolare per la F , nell'intervallo (x_0, x) esisterà un punto x_1 tale che

$$F(x) - F(x_0) = F'(x_1)(x - x_0) = [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)](x - x_0).$$

Per la G , nell'intervallo (y_0, y) esisterà un punto y_1 tale che

$$G(y) - G(y_0) = G'(y_1)(y - y_0) = [f_y(x, y_1) - f_y(x_0, y_1)](y - y_0).$$

Riapplichiamo ora il Teorema di Lagrange nelle relazioni ottenute.

Si ha per la F in (y_0, y) , che esiste un $y_2 \in (y_0, y)$ tale che

$$F(x) - F(x_0) = f_{xy}(x_1, y_2) (x - x_0) (y - y_0).$$

$$G(y) - G(y_0) = f_{yx}(x_2, y_1) (x - x_0) (y - y_0).$$

Essendo

$$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$$

concludiamo che, tenuto conto della continuità delle derivate seconde, se facciamo tendere $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ si ha $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Consideriamo la funzione $f_{xx}(x, y)$, e sia D' il suo dominio. Se essa risulta derivabile rispetto a x o rispetto a y in (x_0, y_0) , diremo che la f ammette derivate terze $f_{xxx}(x_0, y_0)$ e $f_{xxy}(x_0, y_0)$

Analogamente a partire dalle altre derivate seconde, si definiscono derivate parziali terze (es. f_{yyx} , f_{yyy} , *etc*).

Consideriamo una $f(x, y)$ definita in D , un suo punto di accumulazione interno $P_0 = (x_0, y_0)$ e sia $B_\delta(P_0)$ un intorno di (x_0, y_0) contenuto in D . Sia $P = (x, y)$ un generico punto di $B_\delta(P_0)$ e sia $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$. Costruiamo l'incremento della f

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$

Definizione di funzione differenziabile.

f si definisce differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$ se esistono due costanti A, B tali che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = A h + B k + o(\sqrt{h^2 + k^2}),$$

dove $A h + B k$ è chiamata il differenziale di f (parte lineare) e si indica con $df(x_0, y_0)$, $o(\sqrt{h^2 + k^2})$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\sqrt{h^2 + k^2}$. La definizione si può riscrivere

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Legami tra differenziabilita', continuita' e derivabilita' parziale.

Differenziabilita' \rightarrow Continuita'

Teorema 1

Sia $f(x, y)$ differenziabile in un punto P_0 , allora e' ivi continua.

Dimostrazione.

Essendo f differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$, si puo' scrivere

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = A h + B k + o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$

Calcoliamo il limite per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$: i due addendi a destra convergono a zero, quindi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = 0$$

$$\implies \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) \quad (\text{continuita' in } P_0).$$

Differenziabilita' \rightarrow Derivabilita' parziale

Teorema 2

Sia $f(x, y)$ differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$, allora e' ivi derivabile parzialmente e

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Dimostrazione.

Consideriamo un incremento solo in x . Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|h|)}{h} = A$$

Analogamente si ottiene

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Condizioni sufficienti per differenziabilita'.

Condizioni sufficienti affinche' f sia differenziabile in un punto $P = (x, y)$ interno al suo dominio sono le seguenti:

- nell'intorno di $P = (x, y)$ esistano le derivate parziali prime,
- almeno una sia continua.

In particolare

$$f \in C^1 \rightarrow f \text{ differenziabile.}$$

Esempio.

Dimostrare che $f(x, y) = x^2 + y^2$ e' differenziabile in $P = (1, 1)$

La funzione $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, allora e' differenziabile.

Dimostriamolo anche con la definizione.

$$f(1, 1) = 2; f_x(1, 1) = 2, f_y(1, 1) = 2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{f(x, y) - f(1, 1) - 2(x - 1) - 2(y - 1)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + y^2 - 2 - 2x + 2 - 2y + 2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}}$$

= 0 (essendo l'infinitesimo a numeratore di ordine superiore rispetto al denominatore).

Piano tangente ad una superficie.

Sia $f(x, y)$ una funzione differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$, e sia $h = x - x_0$, l'incremento sull'asse x e $k = y - y_0$ l'incremento sull'asse y . Si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) (y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

La funzione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) (y - y_0)$$

rappresenta il piano tangente alla superficie nel punto (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Il differenziale secondo.

Consideriamo una funzione f differenziabile in D , f allora ammette derivate parziali prime $f_x(x, y), f_y(x, y)$, per tutti gli $(x, y) \in D$. Se le funzioni derivate parziali prime sono differenziabili, definiamo f differenziabile due volte o che ammette differenziale secondo, dato dalla formula ($h = dx, k = dy$)

$$d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx dy + f_{yy}dy^2,$$

(abbiamo applicato il Teorema di Schwarz).

Infatti

$$d^2f = (f_x h + f_y k)_x h + (f_x h + f_y k)_y k = \\ f_{xx} h^2 + f_{yx} kh + f_{xy} hk + f_{yy} k^2.$$

Formula di Taylor e Mac-Laurin

Consideriamo solo il caso di funzioni di due variabili .

Sia $f \in C^2(D)$, consideriamo un punto (x_0, y_0) interno a D e sia (x, y) un generico punto di un intorno $B_\delta(x_0, y_0)$. Definiamo Polinomio di Taylor del secondo ordine della f nel punto (x_0, y_0) il polinomio di secondo grado in x e y :

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$+ \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2).$$

Se il punto (x_0, y_0) coincide con l'origine, si chiama polinomio di Mac-Laurin.

Il polinomio di Taylor fornisce un' approssimazione della funzione nell'intorno del punto.

Teorema

Sia $f(x, y)$ una funzione di classe $C^2(B_\delta(P_0))$ con $P_0 = (x_0, y_0)$, interno al campo di definizione di f . Sia $P = (x_0 + h, y_0 + k) \in B_\delta(P_0)$. Allora esiste un $t \in (0, 1)$ tale che

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left[f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(x_0 + th, y_0 + tk)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0 + th, y_0 + tk)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ \left. + f_{yy}(x_0 + th, y_0 + tk)(y - y_0)^2 \right].$$

Siano $(x(t), y(t))$ due funzioni reali continue su un intervallo I : al variare di $t \in I$, la coppia (x, y) descrive una curva γ nel piano. Sia $f(x, y)$ una funzione definita in D e $\gamma \subset D$.

Definiamo funzione composta

$$F(t) = f(x(t), y(t)), \quad \forall t \in I.$$

Geometricamente la funzione composta rappresenta la curva intersezione con la superficie Σ di equazione $z = f(x, y)$ con la superficie cilindrica Σ' di equazione $(x = x(t), y = y(t))$

Teorema della derivata della funzione composta.

Supponiamo che le funzioni $(x(t), y(t))$ siano derivabili in I e che la $f(x, y)$ sia differenziabile nel punto $(x(t), y(t)) \in D$. Allora la $F(t)$ risulterà derivabile e

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t).$$

es. $z = x^2 + y^2$, composta con $y = 1 - x$

es.

Dim.

$$f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t), y(t)) + f_x(x(t), y(t)) [x(t+h) - x(t)] \\ + f_y(x(t), y(t)) [y(t+h) - y(t)] + o(\sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2})$$

Si deve trovare l'espressione della F' . Calcoliamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h}.$$

Facilmente si ottiene la tesi, utilizzando le ipotesi di differenziabilità di f e di derivabilità delle $(x(t), y(t))$.

I concetti introdotti (limiti, continuita', derivabilita' parziale, differenziabilita') si estendono a funzioni di N variabili

$$w = g(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

esempi per $N=3$.

Funzione composta in \mathbb{R}^3

$w = g(x, y, z)$ composta con $(x(t), y(t), z(t))$

$$G'(t) = g_x(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + g_y(x(t), y(t), z(t)) y'(t) \\ + g_z(x(t), y(t), z(t)) z'(t).$$

Massimi e minimi assoluti (globali).

Massimi e minimi relativi (o locali).

Massimi e minimi condizionati.

Definizione di massimo assoluto

Sia f definita in D . Il punto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ si definisce punto di massimo assoluto per la $f(x, y)$ se

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in D,$$

$f(P_0)$ e' il valore del massimo.

Definizione di minimo assoluto

Sia f definita in D . Il punto $P_1 \in D$ si definisce punto di minimo assoluto per la $f(x, y)$ se

$$f(P) \geq f(P_1), \quad \forall P \in D$$

$f(P_1)$ e' il valore del minimo.

Definizione di massimo e minimo relativo (locale)

Sia f definita in D . Il punto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ si definisce

- punto di massimo relativo per la $f(x, y)$ se $\exists B_\delta(P_0)$ tale che

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in B_\delta(P_0),$$

- punto di minimo relativo per la $f(x, y)$ se $\exists B_\delta(P_0)$ tale che

$$f(P) \geq f(P_0), \quad \forall P \in B_\delta(P_0),$$

es.

Teorema di Fermat.

Se P_0 e' un punto di max o min relativo e se $f(x, y)$ e' differenziabile nel punto P_0 ,

$$\nabla f(P_0) = 0.$$

Il teorema da' una condizione necessaria per l'esistenza di un max o un minimo, ma non sufficiente: esistono dei punti \bar{P} , detti critici, tali che $\nabla f(\bar{P}) = 0$ e possono essere sia massimi, che minimi relativi, che punti di sella, punti cioe', considerato un intorno, nell'interno la f puo' assumere valori maggiori e/o minori di $f(\bar{P})$. es: $z = y^2 - x^2$ con $\bar{P} = (0, 0)$.

Dimostrazione. Consideriamo una direzione generica uscente da P_0 . Sia v il vettore e sia

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

definita in un intorno di $t = 0$. La $F(t)$ avra' in un intorno di $t = 0$ un max o un min relativo, il che implica $F'(0) = 0$ e di conseguenza $D_v f(P_0) = 0$.
es.

Condizioni sufficienti per l'esistenza dei massimi e minimi relativi.

Una condizione sarà legata al segno della forma quadratica

$$d^2(f(P_0)).$$

Infatti, per la formula di Taylor per $f \in C^2$

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= df(P_0) + \frac{1}{2}d^2f(P_0) + o(d(P, P_0)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(d(P, P_0)) \end{aligned}$$

Condizioni sufficienti per un max o min rel. in \mathbb{R}^2

Sia $f \in C_D^2$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ interno a D . Se

$$\nabla f(P_0) = 0$$

e se

$$Hf(P_0) > 0 \text{ e } f_{xx}(P_0) > 0,$$

la $f(x, y)$ ha in P_0 un punto di minimo relativo.

Se

$$\nabla f(P_0) = 0$$

e se

$$Hf(P_0) > 0 \text{ e } f_{xx}(P_0) < 0,$$

la $f(x, y)$ ha in P_0 un punto di massimo relativo.

Se

$$\nabla f(P_0) = 0$$

e se

$$Hf(P_0) < 0,$$

la $f(x, y)$ ha in P_0 un punto di sella.

Infine se

$$\nabla f(P_0) = 0$$

e se

$$Hf(P_0) = 0,$$

abbiamo il "caso dubbio".

Massimi e minimi relativi per funzioni di tre variabili.

Sia $g(x, y, z)$ una funzione di tre variabili definita in un sottoinsieme $V \subset \mathbb{R}^3$.

Condizioni sufficienti per un max o min rel. in \mathbb{R}^2

Sia $g \in C_V^2$ e $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ interno a V . Se

$$\nabla f(Q_0) = 0$$

e se in Q_0

$$\det \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} > 0 \quad \det \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} > 0 \quad g_{xx} > 0,$$

(la forma quadratica d^2g definita positiva)

la $g(x, y, z)$ ha in Q_0 un punto di minimo relativo.

Se

$$\nabla f(Q_0) = 0$$

e se in Q_0

$$\det \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} < 0 \quad \det \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} > 0 \quad g_{xx} < 0,$$

(la forma quadratica d^2g definita negativa)

la $g(x, y, z)$ ha in Q_0 un punto di massimo relativo.

es.

Calcolare i massimi e minimi relativi della

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

Calcoliamo ∇f ed eguagliamolo a zero.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0 \\ f_y = 3y^2 - 12 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$P_1 = (1, 2), P_2 = (-1, -2), P_3 = (-1, 2), P_4 = (1, -2).$$

Calcoliamo il $\det(H_f)(P_i)$

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 12xy$$

$$\det(H_f)(1, 2) > 0, \quad \det(H_f)(-1, -2) > 0,$$

$\det(H_f)(-1, 2) < 0, \quad \det(H_f)(1, -2) < 0$. Calcoliamo ancora il segno di f_{xx} nei punti dove $\det(H_f) > 0$. $f_{xx}(1, 2) > 0$ $f_{xx}(-1, -2) < 0$. Allora in $P_1 = (1, 2)$ ci sarà un minimo rel, in $P_2 = (-1, -2)$ ci sarà un massimo rel.

Infine, poiché in P_3 e P_4 , risulta $\det(H_f) < 0$, questi sono punti di sella.

es.

Calcolare i massimi e minimi relativi della

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 5$$

Calcoliamo ∇g ed eguagliamolo a zero.

$$\begin{cases} g_x = 2x - 2 = 0 \\ g_y = 2y = 0, \\ g_z = 2z - 2 = 0, \end{cases} \quad Q_0 = (1, 0, 1) \quad (2)$$

Esaminiamo il $\det H_g$ e i suoi minori nord-ovest.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0 \quad g_{xx} = 2 > 0,$$

(la forma quadratica d^2g definita positiva), la $g(x, y, z)$ ha in Q_0 un punto di minimo relativo, $\min g = -7$.

Massimi e minimi assoluti.

Ricerca dei max e min assoluti:

1) *Relativi* $\nabla f = 0$

2) $\nexists \nabla f,$

3) *Frontiera del dominio (FD)*

Paragonando i valori della funzione in tutti questi punti, il piu' grande sara' il massimo assoluto, il piu' piccolo il minimo assoluto.

es.

Calcolare il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y) = x - x^2 - y^2$ in $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Massimi e minimi condizionati.

Funzioni di 2 variabili.

Sia $f(x, y) \in C^1(D)$ si vogliono determinare gli estremi di f (funzione obiettivo) sotto la condizione espressa da $g(x, y) = 0$, con $g(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (funzione vincolo).

Il primo metodo che consideriamo e' legato alla possibilita' di esplicitare il vincolo.

Se $g(x, y) = 0$ definisce una funzione $y = y(x)$, $x \in I$ (e si puo' esplicitare), il problema e' ricondotto allo studio di una funzione di una variabile.

$$F(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I.$$

Inoltre, se $y = y(x)$ ammette una rappresentazione parametrica $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, ancora il problema si trasforma nella ricerca di un massimo e minimo di funzione di una variabile

$$F(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Geometricamente, se chiamiamo con γ la curva piana data in forma cartesiana dall'equazione $y = y(x)$, o in forma parametrica dalle equazioni $\{x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]\}$, trovare il max e il minimo sotto la condizione $g(x, y) = 0$ significa calcolare il max e il minimo della curva intersezione della superficie di equazione $z = f(x, y)$ con la superficie cilindrica generata da γ .

es:

$z = x^2 + 9y$, sotto la condizione $x^2 + y^2 = 4$.

Riscriviamo la circonferenza in forma parametrica

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad (3)$$

Studiamo la funzione f sotto il vincolo, qui curva in forma parametrica.

$F(t) = 2(2\cos^2 t + 9\sin t)$, $F'(t) = 2\cos t (9 - 4\sin t) = 0$ per
 $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$.

$F(\frac{\pi}{2}) = 18$, $F(\frac{3\pi}{2}) = -18$

$F(0) = F(2\pi) = 4$.

Concludiamo che $\max z = 18$, e viene assunto nel punto $(0,2)$, il
 $\min z = -18$ che viene assunto nel punto $(0,-2)$.

Vincolo non esplicitabile.

Teorema dell'esistenza e unicità della funzione implicita.

Teorema del DINI

Sia $g(x, y)$ una funzione continua con la sua derivata rispetto a y in un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$. Se in $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ risulta

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esiste un intorno $I_\delta(x_0)$ e un intorno $J_\sigma(y_0)$ tali che ad ogni $x \in I_\delta(x_0)$ corrisponde un solo $y \in J_\sigma(y_0)$, cioè esiste un'unica funzione $y(x)$ tale che

$$g(x, y(x)) = 0, \quad \text{e} \quad y(x_0) = y_0.$$

Inoltre $y(x)$ è continua.

Il punto P_0 si chiama regolare.

Se supponiamo $g(x, y) \in C^1(D)$, allora la funzione implicita risulterà di classe C^1 in $I_\delta(x_0)$ e

$$y'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}.$$

es. $x^2 + y^2 = 1$ e $P_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Supponiamo di non poter esplicitare la $y(x)$ dal vincolo $g(x, y) = 0$ globalmente, ma solo nell'intorno di un punto regolare. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto regolare per l'insieme dei punti : $g(x, y) = 0$. Si avra' $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. Allora per il Teorema del DINI, $g(x, y) = 0$ definisce una funzione implicita $y = y(x)$ con $y(x_0) = y_0$

Supponiamo che x_0 sia un estremo relativo di $f(x, y(x)) \implies$

$$f_x + f_y y' = 0.$$

Ma

$$y' = -\frac{g_x}{g_y} \implies f_x + f_y \left(-\frac{g_x}{g_y}\right) = 0$$

Si pone

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y} = -\lambda.$$

Riscriviamo le relazioni :

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0, \\ f_y + \lambda g_y = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

λ si chiama moltiplicatore di Lagrange. Interpretiamo questi risultati affermando che i punti di massimo e minimo di f vincolati da $g(x, y) = 0$, sono i massimi e minimi (liberi) relativi della funzione

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

e annullano il $\nabla F = 0$.

Il metodo si può generalizzare a funzioni di tre variabili $f(x, y, z)$ con due vincoli $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$.

Si cercheranno i massimi e minimi liberi della

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g_1(x, y, z) + \mu g_2(x, y, z)$$

Esercizio.

Trovare i massimi e minimi della curva intersezione del piano $x + y + 2z = 0$ con l'iperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ La funzione della quale individuare gli estremi e'

$$z = -\frac{(x+y)}{2}$$

sotto il vincolo $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

$$F(x, y, \lambda) = -\frac{(x+y)}{2} + \lambda\left(x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{4}\right)$$

Si trova $M = (-1, -1, 1)$ e $m = (1, 1, -1)$ sono il massimo e il minimo vincolato.

es.

Data l'asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, si consideri il punto P del 1 quadrante. Determinare per quale posizione di P e' massima l'area del rettangolo di cui un vertice e' P e gli altri tre sono l'origine e le proiezioni di P sugli assi. La funzione area e' $f(x, y) = x y$, il vincolo e' dato dalla curva asteroide. Si usa il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e si costruisce la funzione

$$F(x, y, \lambda) = x y + \lambda(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}})$$

Si trova

$$x = y = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad \max f = \frac{a^2}{8}.$$

Integrali doppi su domini rettangolari.

Sia $f(x, y)$ una funzione limitata nel rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ e sia

$D_1 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_m = b\}$ una decomposizione di $[a, b]$ e

$D_2 = \{y_0 = c, y_1, \dots, y_n = d\}$ una decomposizione di $[c, d]$.

Il prodotto cartesiano $D = D_1 \times D_2$ e' una suddivisione di R . Chiamiamo con

$I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, m$ il generico subintervallo di D_1 ,

$J_h = [y_{h-1}, y_h]$, $h = 1, \dots, n$ il generico subintervallo di D_2

e sia $R_{k,h} = I_k \times J_h$ il generico rettangolo della suddivisione.

La f e' limitata, allora $m \leq f(x, y) \leq M$ in R .

Definizione di Somme superiori e somme inferiori.

Fissata una suddivisione D , definiamo

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n \inf_{R_{k,h}} f \delta_h \delta_k; \quad S(f, D) = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n \sup_{R_{k,h}} f \delta_h \delta_k$$

rispettivamente le somme inferiori e superiori della f relative alla decomposizione D .

Si ha

$$m(b-a)(d-c) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a)(d-c).$$

Inoltre $\sup s \leq \inf S$.

Definizione

Una funzione $f(x, y)$ definita limitata nel rettangolo R e' integrabile secondo Riemann se

$$\sup_D s = \inf_D S$$

e useremo il simbolo

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

$$f \in C^0(R) \implies f \text{ integrabile in } R$$

calcolo di un integrale doppio tramite due integrali semplici successivi.

Teorema di riduzione

Sia data una funzione $f(x, y)$ integrabile in R . Se fissato $y \in [c, d]$, esiste $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, allora $G(y)$ sarà integrabile in $[c, d]$ e

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Se fissato $x \in [a, b]$, esiste $H(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, allora $H(x)$ sarà integrabile in $[a, b]$ e

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Es.

Calcolare $\iint_R x(y + \sqrt{y}) \, dx dy$, dove $R = [0, 1] \times [1, 4]$.

Si ha

$$\int_0^1 dx \left(\int_1^4 x(y + \sqrt{y}) \, dy \right) = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 \right) dx$$

Integrali doppi su domini normali.

Dominio normale rispetto all'asse x .

Consideriamo due funzioni di una variabile $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$, continue su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e sia $\alpha(x) \leq \beta(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Definizione

Definiamo dominio normale rispetto all'asse x l'insieme del piano

$$A := \{x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

L'area di questo dominio si puo' calcolare mediante un integrale semplice

$$\text{area } A = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx.$$

Dominio normale rispetto all'asse y .

Consideriamo due funzioni di una variabile $x = \gamma(y)$, $x = \delta(y)$, continue su un intervallo chiuso e limitato $[c, d]$ e sia $\gamma(y) \leq \delta(y)$, $\forall y \in [c, d]$.

Definizione

Definiamo dominio normale rispetto all'asse y l'insieme del piano

$$B := \{y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

L'area di questo dominio si puo' calcolare mediante un integrale semplice

$$\text{area } B = \int_c^d (\delta(y) - \gamma(y)) dy.$$

Dominio normale: e' normale rispetto ad entrambi gli assi (quadrato, cerchio, etc.)

Integrali doppi su domini normali.

Sia $f(x, y)$ continua* in A. Se

$$A := \{x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \implies$$

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right).$$

Sia $f(x, y)$ continua* in B. Se

$$B := \{y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\} \implies$$

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_c^d dy \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) \, dx \right).$$

(*) la classe delle f integrabili e' piu' generale.

Proprietà' degli integrali doppi.

1. **Linearita'** : Se f_1 e f_2 sono integrabili in A e c_1 e c_2 sono costanti,

$$\iint_A c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \, dx dy = c_1 \iint_A f_1(x, y) \, dx dy + c_2 \iint_A f_2(x, y) \, dx dy$$

2. **Additivita'** : Sia $A = A_1 \cup A_2$ e f integrabile in A ,

$$\iint_{A_1 \cup A_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{A_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{A_2} f(x, y) \, dx dy$$

3. **Monotonia** : Siano f, g integrabili in A e $f \leq g$, allora

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy \leq \iint_A g(x, y) \, dx dy;$$

se $|f|$ e' integrabile in A ,

$$\left| \iint_A f(x, y) \, dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| \, dx dy;$$

se $M = \sup_A |f|$, e indichiamo $\text{area}(A) = |A|$,

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy \leq M |A|.$$

4. Teorema della media

Se $f \in C^0(A)$, allora esiste un $P_0 = ((x_0, y_0))$ tale che

$$\frac{1}{|A|} \iint_A f(x, y) \, dx dy = f(x_0, y_0)$$

Significato Geometrico.

Se $f \geq 0$ in A , allora $\iint_A f(x, y) \, dx dy$ rappresenta il volume del solido così definito

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Se la f ha segno qualunque, il volume della parte di spazio compresa tra la funzione f e il piano $z = 0$ è dato da

$$\iint_A |f(x, y)| \, dx dy.$$

Calcolare $\iint_D (x^4 + y^2) \, dx dy$, $D = \{1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq x^2\}$

Calcolare $\iint_D (\sqrt{x} y) \, dx dy$, $D = \{0 \leq x \leq 1; \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

Calcolare il volume del solido limitato da $z = x^2 + y^2 - 1$ che si proietta ortogonalmente sul trapezio rettangolo T di vertici $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(1, 1)$

$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| \, dx dy = \iint_{D^-} (1 - x^2 + y^2) + \iint_{D^+} (x^2 + y^2 - 1) \, dx dy.$$

Cambio di coordinate negli integrali doppi.

Sia A un dominio normale del piano (u, v) , consideriamo due funzioni di classe C_A^1

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in A. \quad (5)$$

Introduciamo il determinante Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

Teorema

Siano A e D due domini normali e l'applicazione (5) sia invertibile, di classe C^1 e $|J(u, v)| \neq 0$. Se $f(x, y)$ e' continua in D si ha

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du dv.$$

Quindi $|J(u, v)| \, du dv = dx \, dy$ rappresenta l'elemento d'area nelle nuove coordinate.

Coordinate polari.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi, & 0 < \rho < +\infty, \\ y = \rho \sin \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi, \end{cases} \quad |J(\rho, \phi)| = \rho. \quad (6)$$

calcolo del $|J|$

Vale la formula di trasformazione

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_A f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho \, d\rho d\phi$$

es: calcolare $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$, $D := \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy = \iint_D e^{-\rho^2} \rho \, d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi(1 - e^{-r^2})$$

Domini polarmente normali

Consideriamo due funzioni nel piano polare ρ, ϕ : $\rho = \rho_1(\phi), \rho = \rho_2(\phi)$, continue su un intervallo chiuso e limitato $[\phi_1, \phi_2]$ e sia $\rho_1(\phi) \leq \rho_2(\phi), \quad \forall \phi \in [\phi_1, \phi_2]$.

Definizione

Si definisce polarmente normale un dominio D che si puo' cosi' descrivere

$$D = \begin{cases} \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \\ \rho_1(\phi) \leq \rho \leq \rho_2(\phi) \end{cases} \quad (7)$$

es: Calcolare il volume della porzione di superficie $z = x^2$ che si proietta nel cerchio $C = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\iint_D x^2 \, dx dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho^2 \cos^2 \phi \, \rho d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi = \frac{\pi}{4}$$

Baricentro di una piastra omogenea D

$$x_0 = \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dx dy; \quad y_0 = \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dx dy$$

1. piastra rettangolare $D = \{0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 1\}$

$$x_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^1 x \, dx dy = 1; \quad y_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^1 y \, dx dy = \frac{1}{2}$$

2. piastra corona circolare $D = \{r \leq x^2 + y^2 \leq R\}, r < R.$

Dato il dominio

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 36 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 2y \geq 0, \end{cases} \quad (8)$$

calcolare la misura di D.

Useremo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \phi, & 0 < \rho < 1, \\ y = 2\rho \sin \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi, \end{cases} \quad |J(\rho, \phi)| = 6\rho. \quad (9)$$