

# Controlli automatici

Sintesi per tentativi mediante il Luogo delle Radici

**Prof. Alessandro Pisano**  
**apisano@unica.it**

La sintesi per tentativi mediante LdR consente di progettare regolatori sulla base di un approccio «polinomiale» basato sull'uso del luogo delle radici.

Tale metodo ha come elemento fondamentale l'individuazione, sulla base delle specifiche del problema di controllo, di una **regione ammissibile** per i poli del sistema a ciclo chiuso.

La sintesi del regolatore ha come obiettivo ultimo quello di garantire che i poli del sistema a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.

Viene denominata «per tentativi» in quanto in taluni casi può richiedere varie iterazioni

Vediamo attraverso quali passi si sviluppa.

A ciascun problema di controllo sono associate due tipologie di specifiche:

Le specifiche sul comportamento a regime

Le specifiche sul comportamento transitorio

Come **primo passo** nella sintesi mediante LdR si analizzano le specifiche sul comportamento a **regime**, e sulla base di queste si determinano due parametri:

**Il tipo di sistema di controllo che si deve realizzare** (tipo 0, tipo 1, ...) ed in particolare il numero di poli nell'origine che devono **eventualmente** essere inseriti nel controllore.

Una **eventuale soglia minima per il guadagno statico** (eventualmente generalizzato) **del controllore**

In generale, **nell'ambito di questa metodologia di progetto si va a ricercare un controllore espresso nella forma seguente:**

$$C(s) = \frac{K_C}{s^\nu} C'(s) \quad C'(0) = 1$$

Come detto, l'analisi delle specifiche sul comportamento a regime ci consente di determinare il **valore di  $\nu$**  ( $\nu = 0, \nu = 1, \dots$ ) (cioè il numero di poli nell'origine che devono essere inseriti nel controllore) ed un eventuale **vincolo sul guadagno  $K_C$**  del tipo:

$$K_C \geq K_C^*$$



**Quando risulta necessario inserire un polo nell'origine nel controllore, è fortemente consigliato inserire contestualmente anche uno zero. Una scelta di primo tentativo per la posizione dello zero può essere quella di sovrapporlo ad uno dei poli del processo (se la relativa cancellazione è consentita, cioè se il polo del processo ha parte reale negativa).**

In questa situazione è in genere conveniente sovrapporre lo zero del regolatore al polo del processo a parte reale negativa situato **più in bassa frequenza**.

**In generale un regolatore ben progettato ha sempre grado relativo nullo, cioè tanti zeri quanti poli.**

$$C(s) = \frac{K_C}{s^v} C'(s)$$

$$C'(0) = 1$$

Dopo avere determinato (sulla base delle specifiche sul comportamento a regime) il parametro  $v$  e gli eventuali vincoli sul guadagno  $K_C$ , si analizzano le specifiche sul transitorio e si determina la **regione ammissibile**.

Le specifiche inerenti il comportamento transitorio di un sistema di controllo sono soddisfatte se i poli della FdT a ciclo chiuso ricadono all'interno di una determinata regione del piano, denominata **regione ammissibile** (e se nel contempo non vi sono nella FdT a ciclo chiuso degli zeri che alterino le caratteristiche della risposta al gradino)

## Determinazione della **regione ammissibile**

Studiamo **due tipologie di specifiche sul comportamento transitorio**, entrambe formulate con riferimento alla risposta a ciclo chiuso ad un set-point costante:

- Una specifica sulla **massima sovraelongazione** percentuale tollerata  $S_{\%} \leq S^*$
- Una specifica sul **massimo tempo di assestamento** consentito  $T_a \leq T^*$

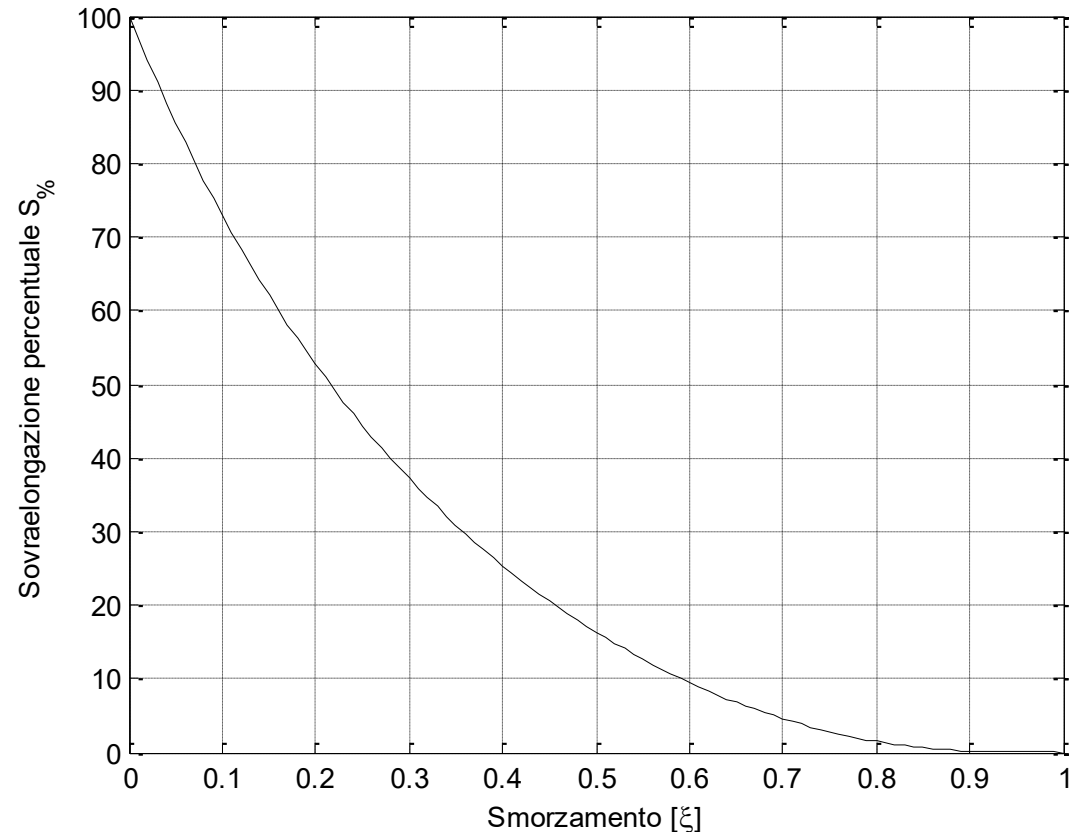
Descriviamo in termini generali la procedura per l'individuazione della regione ammissibile in funzione delle due tipologie di specifiche sul comportamento transitorio

## Specifica sulla sovraelongazione

$$S_{\%} \leq S^*$$

La regione ammissibile per i poli si determina sulla base del diagramma che mette in relazione la sovraelongazione con lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

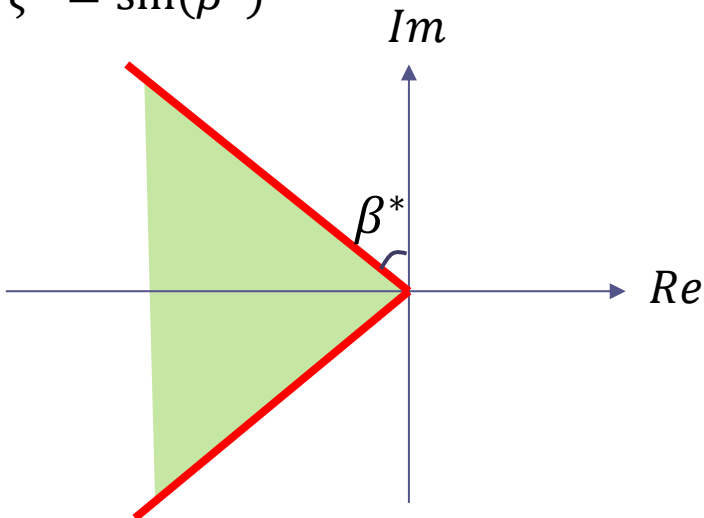


$$S_{0\%} \leq S^* \quad \Rightarrow \quad \xi \geq \xi^*$$

Per fare in modo che in un sistema di controllo la sovraelongazione percentuale sia minore o uguale di una certa soglia  $S^*$  è sufficiente garantire che gli eventuali **poli complessi coniugati abbiano uno smorzamento maggiore o uguale di  $\xi^*$** , dove  $\xi^*$  può essere letto sul grafico o determinato analiticamente:

$$\xi^* = \sin(\beta^*) \quad \Rightarrow \quad \beta \geq \beta^* = \arcsin(\xi^*)$$

$$\xi^* = \sin(\beta^*)$$



In termini grafici, ciò corrisponde a garantire che i poli ricadano all'interno di una **regione ammissibile** come quella riportata nella figura a lato

## Specifica sul tempo di assestamento

$$T_a \leq T^*$$

La regione ammissibile per i poli a ciclo chiuso si determina sulla base delle relazioni che intercorrono fra i tempi di assestamento e la costante di tempo (eventualmente equivalente) dei poli della FdT a ciclo chiuso

	$T_a$
$W(s) = \frac{\mu}{Ts + 1}$	$4.6 T$
$W(s) = \frac{\mu}{(Ts + 1)^2}$	$6.6 T$
$W(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	$4.6T_{eq}$

$$T_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

«costante di tempo  
equivalente»

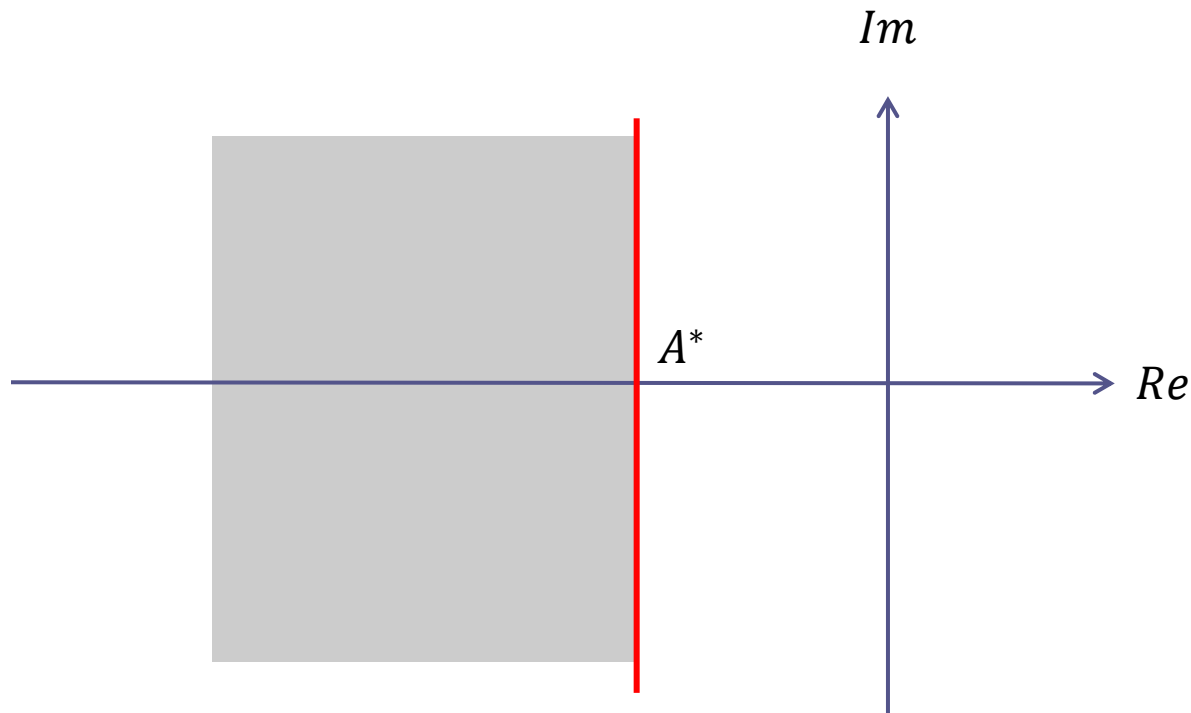
## Tabelle approssimate

Le relazioni inserite nelle seguenti tabelle approssimate sono conservative rispetto a quelle delle tabelle più accurate presenti nella slide precedente, e quindi possono essere convenientemente impiegate in alternativa per semplicità e per avere un margine di tolleranza verso eventuali fattori di incertezza.

	$T_a$
$W(s) = \frac{\mu}{Ts + 1}$	$5 T$
$W(s) = \frac{\mu}{(Ts + 1)^2}$	$7 T$
$W(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	$5T_{eq}$

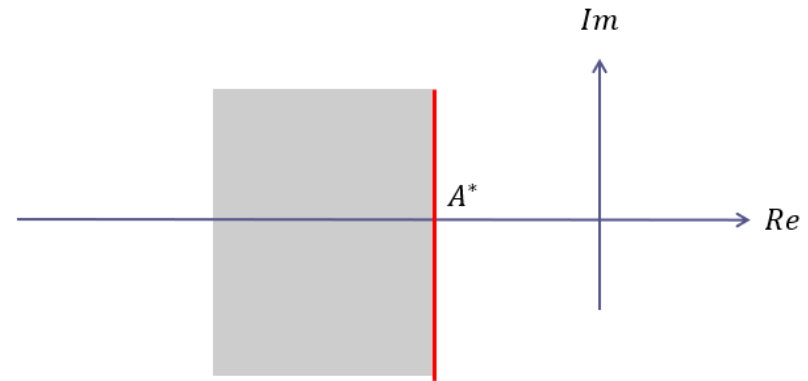
$$T_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n} \quad \text{«costante di tempo equivalente»}$$

Nel vincolare le costanti di tempo (eventualmente equivalenti) dei poli a ciclo chiuso ad essere inferiori ad una soglia prefissata, si ottiene una regione ammissibile come quella mostrata in figura, ed i poli a ciclo chiuso dovranno pertanto essere collocati alla sinistra di una retta verticale che intercetta il semiasse reale negativo in un punto che chiamiamo  $A^*$



## Determinazione di $A^*$

Formulazione «rigorosa»

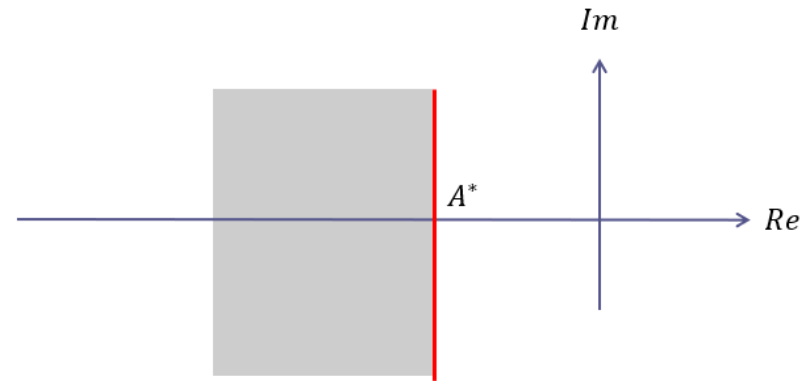


$$T_a \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} \text{4.6} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale o con una coppia di poli dominanti CC} \\ -\frac{T^*}{T^*} & \\ \text{6.6} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti reali} \\ -\frac{T^*}{T^*} & \end{cases}$$

Talvolta non si ha modo di sapere a priori se i poli a ciclo chiuso saranno reali o complessi coniugati, e se taluni di questi potranno essere considerati dominanti.

Nella sintesi, risulta quindi utile riferirsi alla procedura approssimata e conservativa illustrata nella slide seguente

## Criterio approssimato utile per la sintesi



$$T_a \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore al primo} \end{cases}$$

Nell'anno accademico 2025-26 è stato unicamente considerato il tempo di assestamento all'1%. Per consentire la comprensione delle soluzioni degli esercizi sviluppati nei precedenti anni accademici, si riportano nel seguito le relazioni che esprimono (in via approssimata) i tempi di assestamento al 2% ed al 5%.

$$T_{eq} = \frac{1}{\xi \omega_n}$$

«costante di tempo equivalente»

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$W(s) = \frac{\mu}{Ts + 1}$	$3 T$	$4 T$	$5 T$
$W(s) = \frac{\mu}{(Ts + 1)^2}$	$5 T$	$6 T$	$7 T$
$W(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$	$3 T_{eq}$	$4 T_{eq}$	$5 T_{eq}$

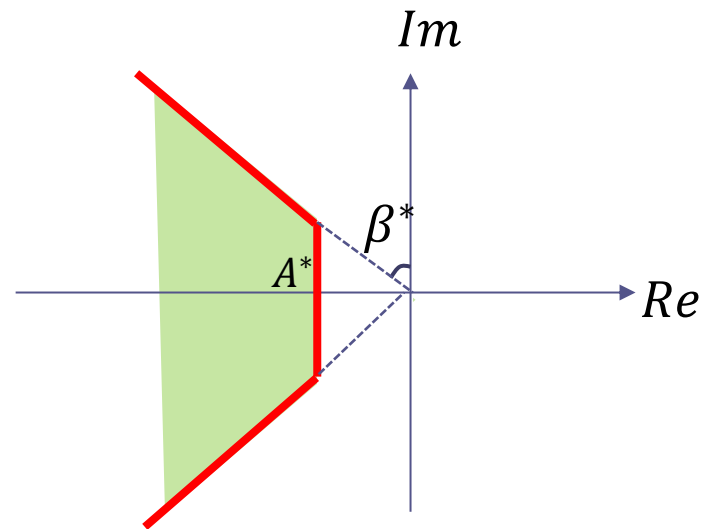
Le formule per il calcolo di  $A^*$  nei 3 casi sono pertanto le seguenti:

$$T_{a5\%} \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{3}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

$$T_{a2\%} \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{4}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{6}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

$$T_{a1\%} \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

In un problema di controllo in cui sia presente una specifica sulla sovravelazione ed una specifica sul tempo di assestamento, la regione ammissibile sarà pertanto complessivamente del tipo



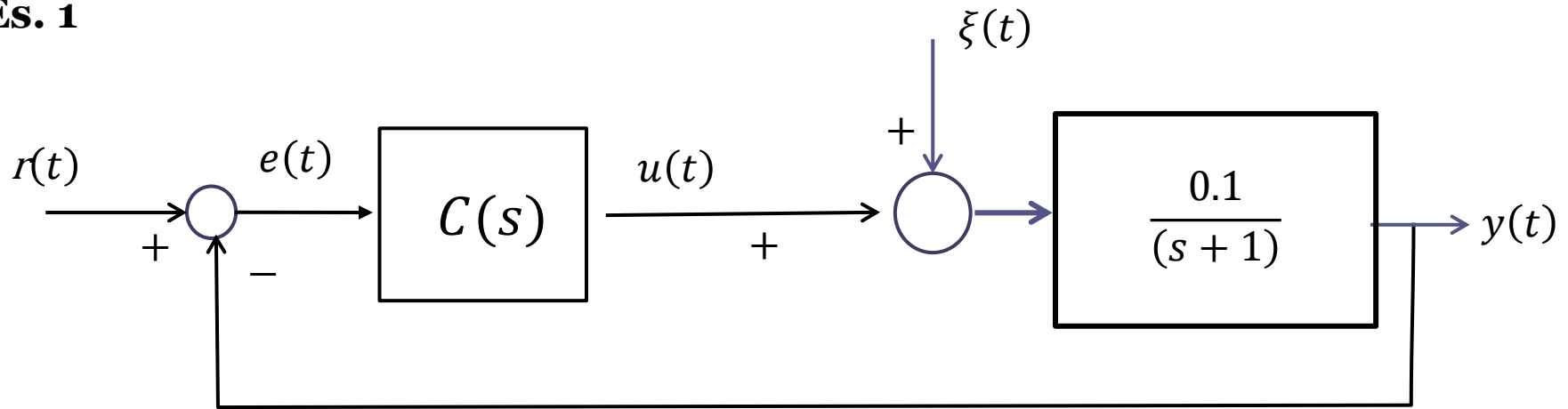
$$C(s) = \frac{K_C}{s^v} C'(s)$$

$$C'(0) = 1$$

Una volta individuata la regione ammissibile, si verifica se il controllore ipotizzato a valle della analisi delle specifiche sul comportamento a regime è in grado di fare in modo che i poli del sistema a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile, e se si in corrispondenza di quale intervallo di valori per  $K_C$ . Tale analisi si svolge mediante il tracciamento del LdR ed il «confronto» fra il LdR e la regione ammissibile.

Se il controllore ipotizzato a valle della analisi delle specifiche sul comportamento a regime non è in grado di vincolare i poli del sistema a ciclo chiuso all'interno della regione ammissibile bisogna apportare ulteriori modifiche alla sua struttura attraverso la parte  $C'(s)$ , in particolare **aggiungere una o più coppie polo-zero** in modo da avere sempre un regolatore a grande relativo nullo.

L'individuazione della/delle particolari coppie polo-zero che sia opportuno inserire per giungere ad una soluzione soddisfacente del problema si svolge sempre impiegando il LdR.

**Es. 1**

Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere completamente compensato a regime
- S3. Risposta a ciclo chiuso esente da oscillazioni
- S4. Tempo di assestamento non superiore a 2 secondi

## Soluzione es. 1 (passi preliminari)

L'analisi congiunta delle specifiche S1 ed S2 comporta **l'obbligatorio inserimento nel controllore di un polo nell'origine.**

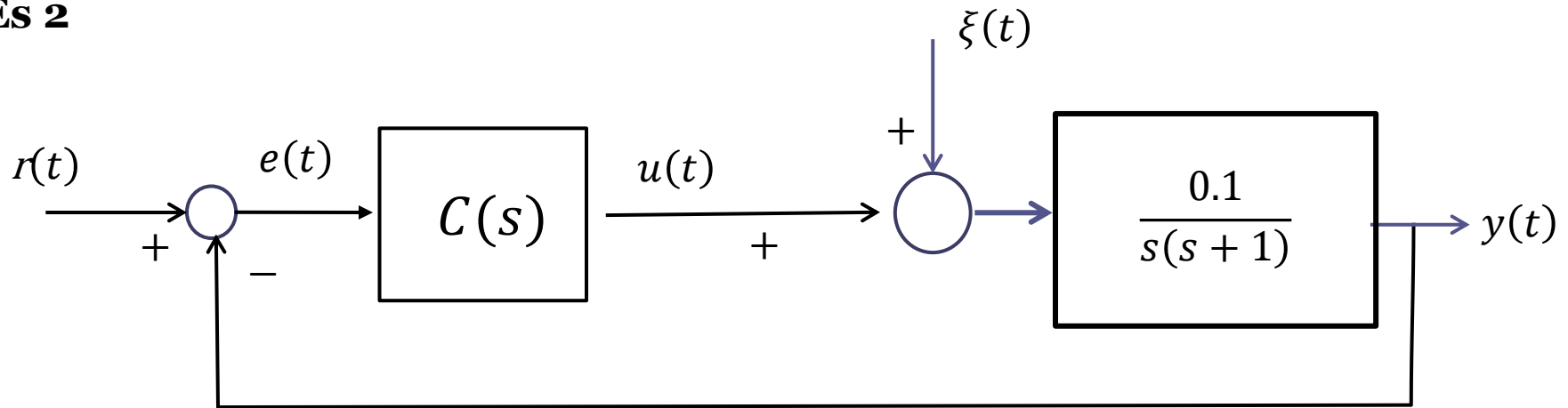
Si svolga il presente esercizio secondo due approcci distinti.

**Approccio 1:** inseriamo nel controllore il polo nell'origine ma ignoriamo la «buona pratica» di inserire contestualmente anche uno zero sovrapposto al polo più in bassa frequenza del processo

$$C(s) = C_1(s) = \frac{K_C}{s} C'_1(s) \quad C'_1(0) = 1$$

**Approccio 2:** inseriamo da subito nel controllore, oltre al polo nell'origine, anche uno zero in -1, sovrapposto al polo del processo

$$C(s) = C_2(s) = \frac{K_C (s + 1)}{s} C'_2(s) \quad C'_2(0) = 1$$

**Es 2**

Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%
- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%
- S4. Tempo di assestamento non superiore a 1.5 secondi

Analizziamo le specifiche sul comportamento a regime.

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

La specifica S1 **sarebbe** compatibile con un sistema di controllo di tipo zero. In realtà il processo possiede un polo nell'origine quindi il sistema di controllo sarà sempre almeno di tipo 1, quindi (anche sulla base della CNES per la precisione statica) la specifica S1 viene garantita **con errore nullo** da qualunque controllore  $C(s)$  che renda asintoticamente stabile il sistema a ciclo chiuso.

La specifica S2 è compatibile con un sistema di controllo in cui il regolatore non possiede poli nell'origine ( $\nu = 0$ ). Sia  $K_C$  il guadagno statico del regolatore. Per garantire la specifica S2 si deve imporre che il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita sia inferiore a **0.02**.

$$W_{\zeta}^y(0) = \frac{1}{K_C} \leq 0.02 \quad \Rightarrow \quad K_C \geq 50$$

N.B. La relazione  $W_{\zeta}^y(0) = \frac{1}{K_C}$  può essere dedotta facilmente considerando un generico controllore con  $\nu = 0$ , cioè  $C(s) = K_C C'(s)$  con  $C'(0) = 1$ , e sviluppando i calcoli necessari

Desumiamo pertanto con riferimento all'esempio di sintesi in esame che **non devono essere inseriti dei poli nell'origine nel controllore** ( $\nu = 0$ ) e ricercheremo pertanto un controllore della forma

$$C(s) = K_C C'(s) \quad C'(0) = 1$$

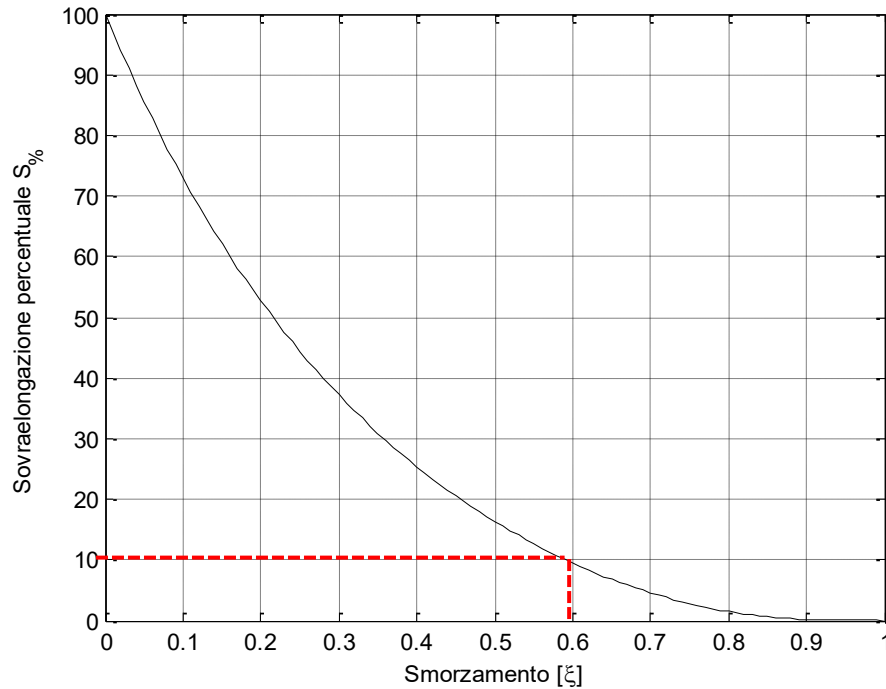
tenendo a mente che il guadagno statico  $K_C$  dovrà essere maggiore o uguale a 50

$$K_C \geq 50$$

La «parte dinamica»  $C'(s)$  del regolatore, cioè una eventuale aggiunta di poli e zeri, va progettata per garantire il soddisfacimento delle specifiche sul comportamento transitorio avendo ovviamente cura di continuare a garantire la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo.

Le specifiche sul comportamento transitorio vengono «convertite» in una **regione ammissibile** del piano all'interno della quale devono essere vincolati i poli del sistema a ciclo chiuso.

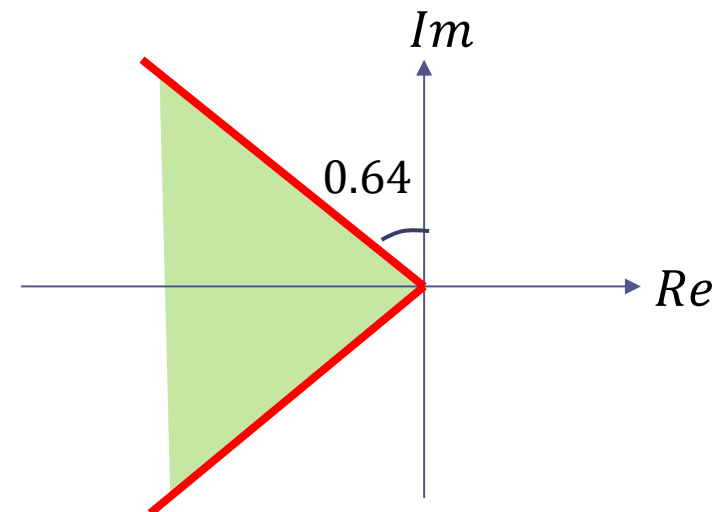
- S<sub>3</sub>. Sovraelongazione non superiore al 10%



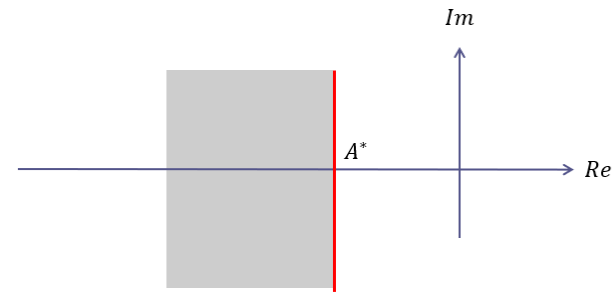
$$S_{\%} \leq 10 \quad \rightarrow \quad \xi \geq 0.6$$



$$\beta \geq \beta^* = \arcsin(0.6) = 0.64 \text{ rad}$$



- S4. Tempo di assestamento non superiore a 1.5 secondi

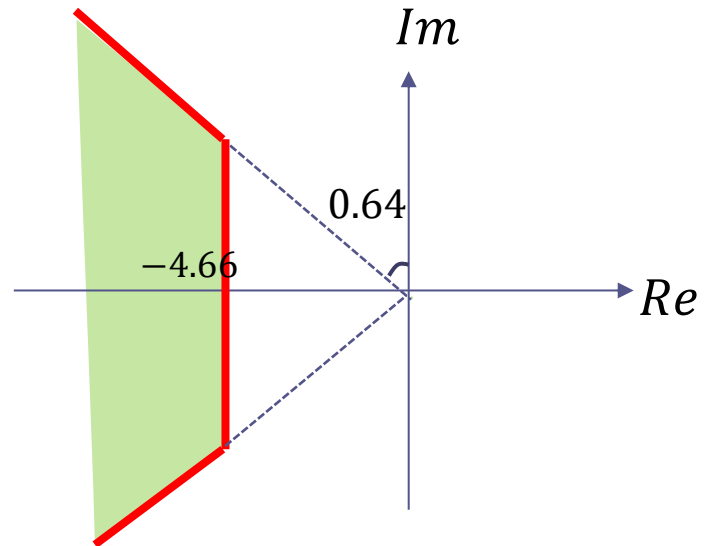


$$T_a \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

Poiché il processo è del secondo ordine, il sistema a ciclo chiuso sarà sicuramente di grado superiore al primo. Si deve pertanto far riferimento alla formula:

$$A^* = -\frac{7}{T^*} = -4.66$$

La regione ammissibile è complessivamente la seguente



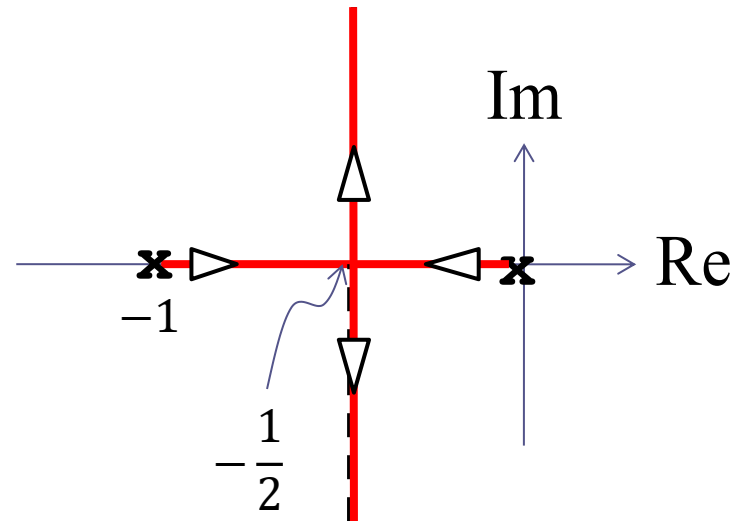
Iniziamo dal controllore più semplice,

Verifichiamo se un **controllore proporzionale**  $C(s) = K_C$  con guadagno  $K_C \geq 50$  è in grado di soddisfare le specifiche sul transitorio.

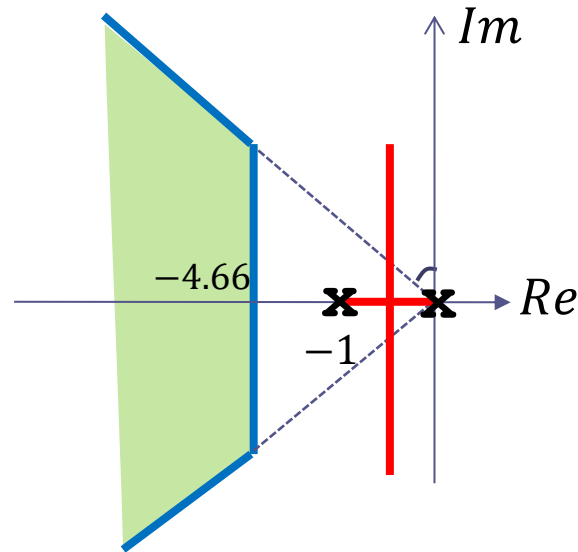
Tracciamo il LdR:

$$L(s) = \frac{0.1}{s(s+1)}$$

A ciclo chiuso sono presenti **due poli** che possono essere reali negativi o complessi coniugati



**Sovrapponendo la regione ammissibile ed il LdR** appare chiaro come impiegando un controllore proporzionale risulta impossibile fare in modo che i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.



Dobbiamo indagare una **struttura alternativa per il controllore**.

$$C(s) = K_C C'(s) \quad C'(0) = 1$$

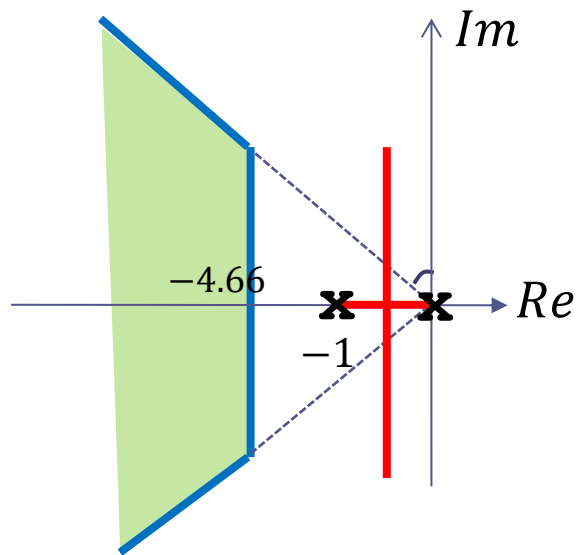
Una scelta frequente nell'ambito della sintesi mediante LdR prevede l'inserimento nella parte dinamica  $C'(s)$  del regolatore di una o più **coppie polo-zero**

$$C(s) = K_C \cdot \frac{p}{z} \cdot \frac{s - z}{s - p} \quad C'(s) = \frac{p}{z} \cdot \frac{s - z}{s - p} \quad C'(0) = 1$$

Se non inserissimo il fattore  $\frac{p}{z}$  nella definizione del controllore il suo guadagno statico non sarebbe più pari a  $K_C$ .

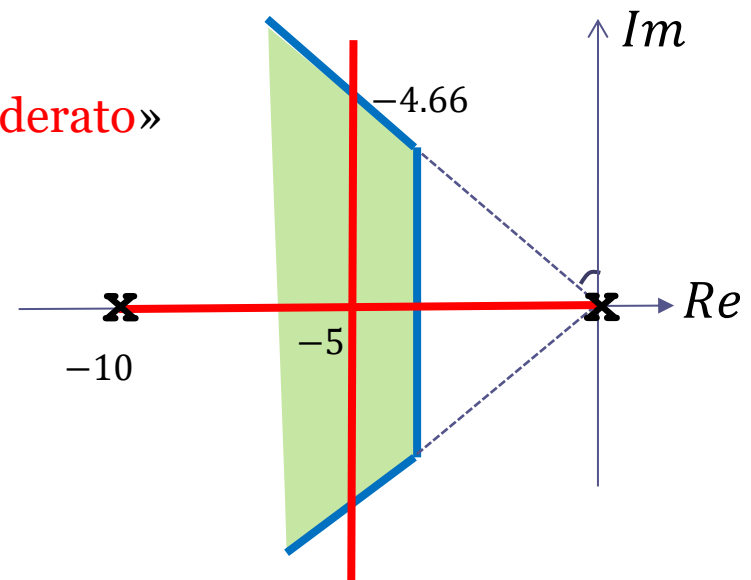
Una scelta altrettanto frequente prevede che **lo zero del regolatore venga sovrapposto ad uno dei poli del processo a parte reale negativa in modo da «cancellarlo» e «sostituirlo» con un polo che abbia una collocazione maggiormente vantaggiosa per quanto concerne l'andamento del LdR**. Cancellare mediante uno zero del controllore uno dei poli (**a parte reale negativa**) del processo è in generale sempre una scelta conveniente in quanto riduce anche l'ordine della FdT a ciclo aperto  $L(s)$ , quindi riduce il numero dei poli a ciclo chiuso e semplifica l'analisi

Riguardando il LdR e la regione ammissibile appare chiaro che il principale fattore limitante sia dovuto alla presenza del polo in  $-1$ , per effetto del quale il punto doppio va a collocarsi nel punto  $-0.5$  (a metà strada fra i due poli)



Se il polo in  $-1$  fosse collocato più in alta frequenza, in particolare in  $-10$ , si avrebbe un punto doppio in  $-5$ , e quindi i rami del luogo verrebbero «attratti» all'interno della regione ammissibile

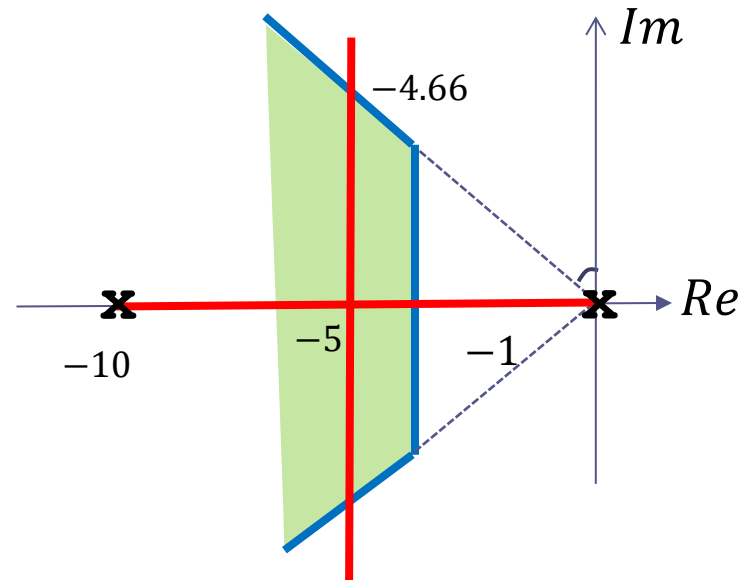
LdR «**desiderato**»



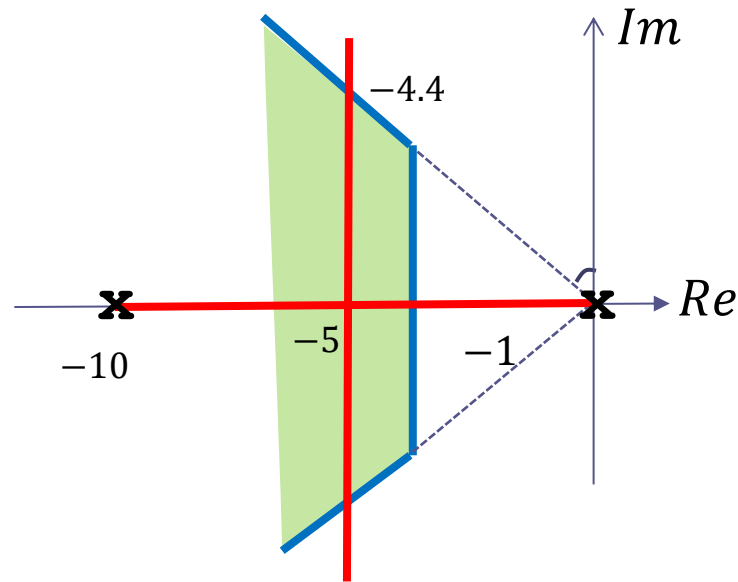
E' possibile ottenere il LdR «desiderato» **cancellando con uno zero del regolatore il polo del processo in  $-1$  e inserendo un polo in  $-10$  ( $z = -1, p = -10$ )**

$$C(s) = K_C 10 \frac{s+1}{s+10} \quad C'(s) = 10 \frac{s+1}{s+10} \quad C'(0) = 1$$

$$L(s) = 10 \frac{\cancel{s+1}}{s+10} \frac{0.1}{s(\cancel{s+1})} = \frac{1}{s(s+10)} \quad \text{Cancellazione polo-zero}$$



Utilizzando un regolatore  $C(s) = K_C 10 \frac{s+1}{s+10}$  il LdR diventa coincidente con quello desiderato, e i poli a ciclo chiuso possono essere collocati, mediante una opportuna scelta di  $K_C$ , sulle traiettorie dei rami del LdR desiderato

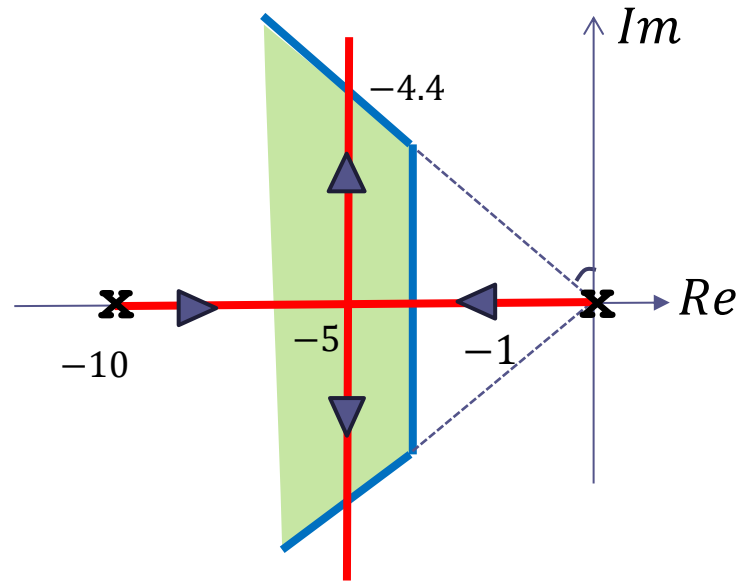


Il valore del guadagno  $K_C$  associato al punto doppio in  $-5$  si determina facilmente operando la taratura del punto doppio, e vale **20** (*fatelo come esercizio*). Tale valore non è compatibile con il vincolo sul guadagno statico del controllore derivante dalle specifiche a regime. Dobbiamo pertanto utilizzare un valore più elevato, nella fattispecie un valore  $\geq 50$ , che inevitabilmente condurrà alla presenza nella FdT a ciclo chiuso di poli complessi coniugati.

**Possiamo scegliere  $K_C = 50$  e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?**

**Possiamo scegliere  $K_C = 50$  e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?**

**No**



Vi è difatti il rischio che in corrispondenza del minimo valore consentito per il guadagno statico del controllore, pari a 50, i due rami del luogo delle radici siano già fuoriusciti dalla regione ammissibile.

Per verificare se ciò avvenga o meno, calcoliamo i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore  $K_C = 50$  (sappiamo già che sono complessi coniugati, e che la loro parte reale è pari a  $-5$ ) e verifichiamo se il valore del loro smorzamento risulti maggiore di 0.6

$$P_{car}(s) = s(s + 10) + K_C = s^2 + 10s + K_C \quad K_C = 50$$

$$P_{car}(s) = s^2 + 10s + 50$$

$$p_{1,2} = -5 \pm j 5 = a \pm jb \quad \xi = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 5^2}} = 0.7071$$

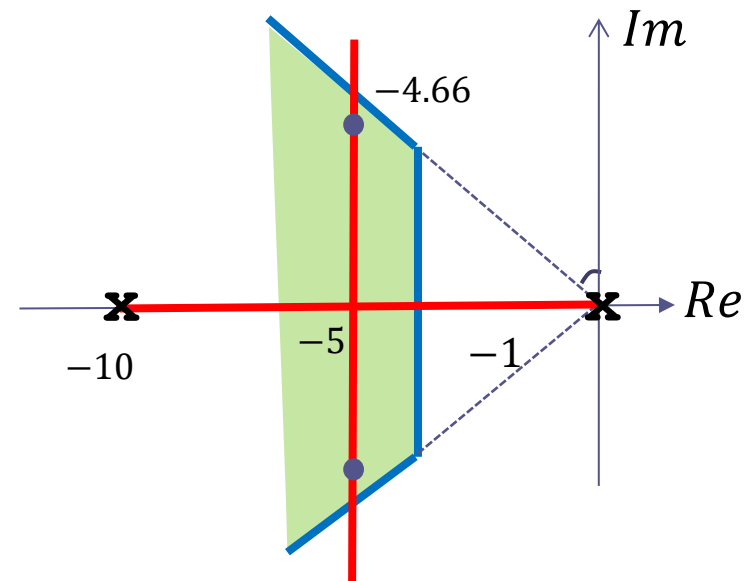
$$\xi > 0.6$$



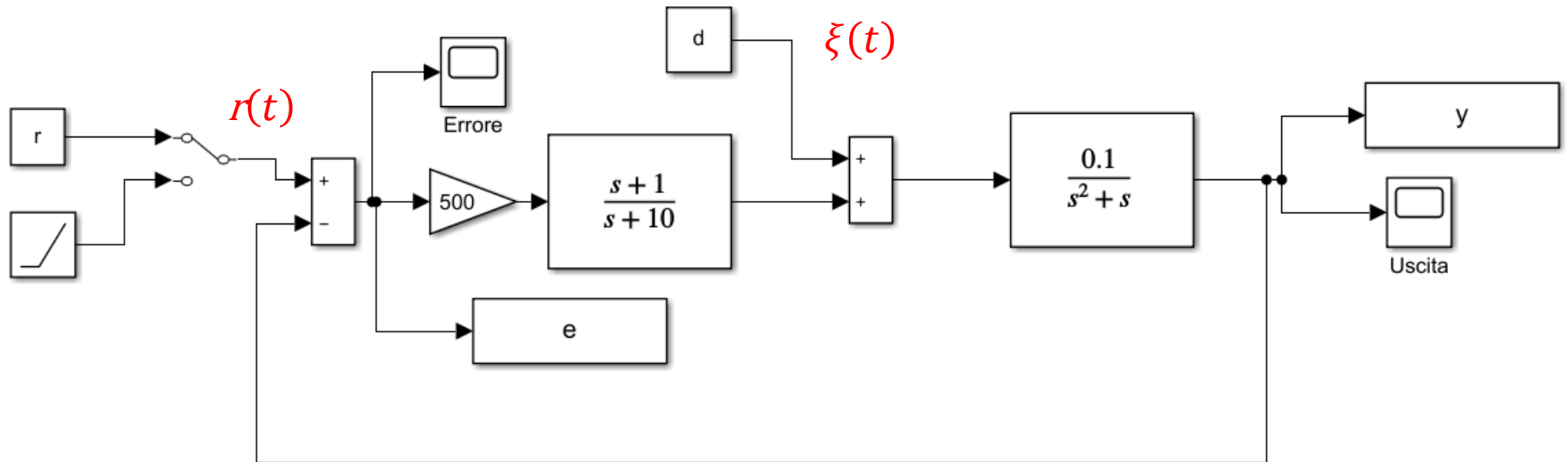
Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati conseguente alla scelta  $K_C = 50$  rientra all'interno della regione ammissibile.

**Quindi il seguente regolatore risolve il problema di progetto**

$$C(s) = 500 \frac{s + 1}{s + 10}$$

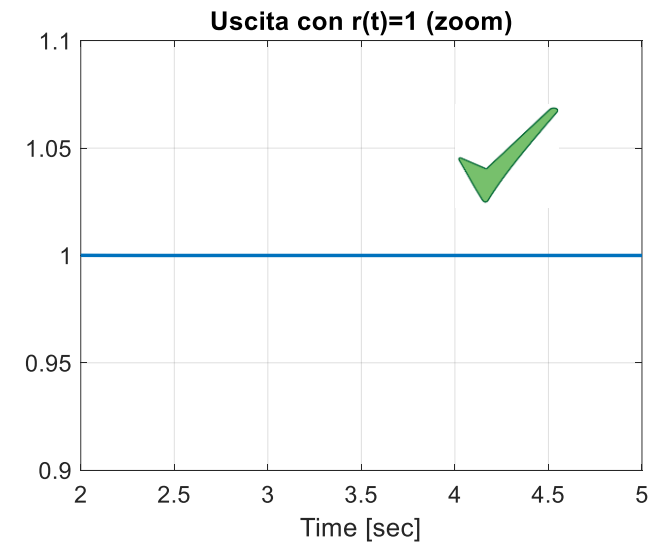
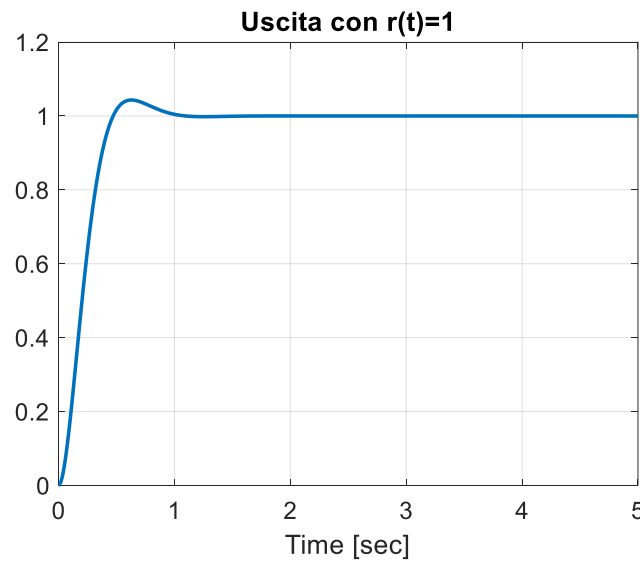


File: SintesiLdR01.slx



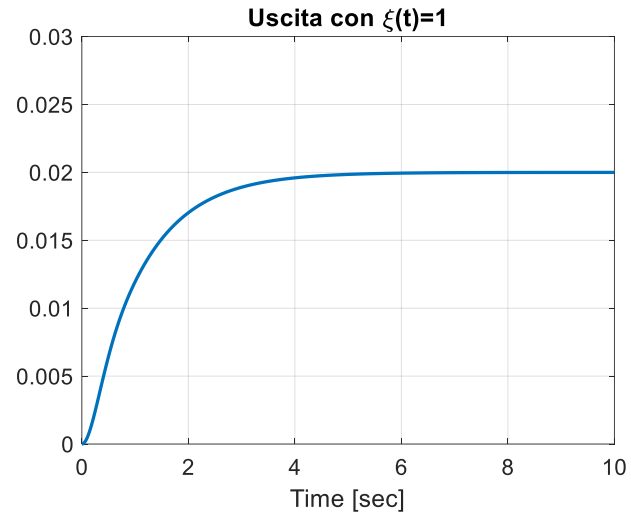
- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %

$$r(t) = 1$$



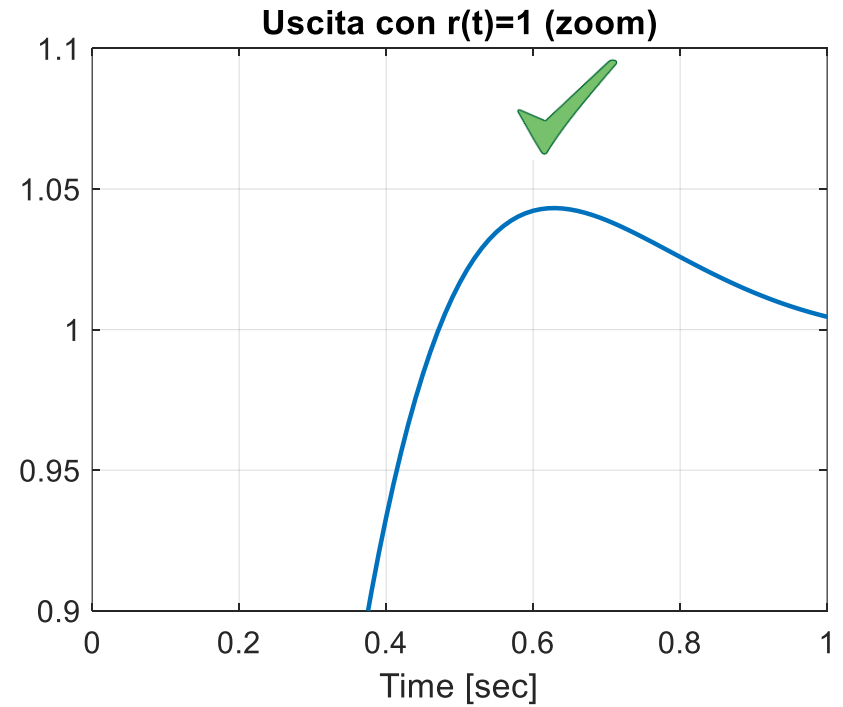
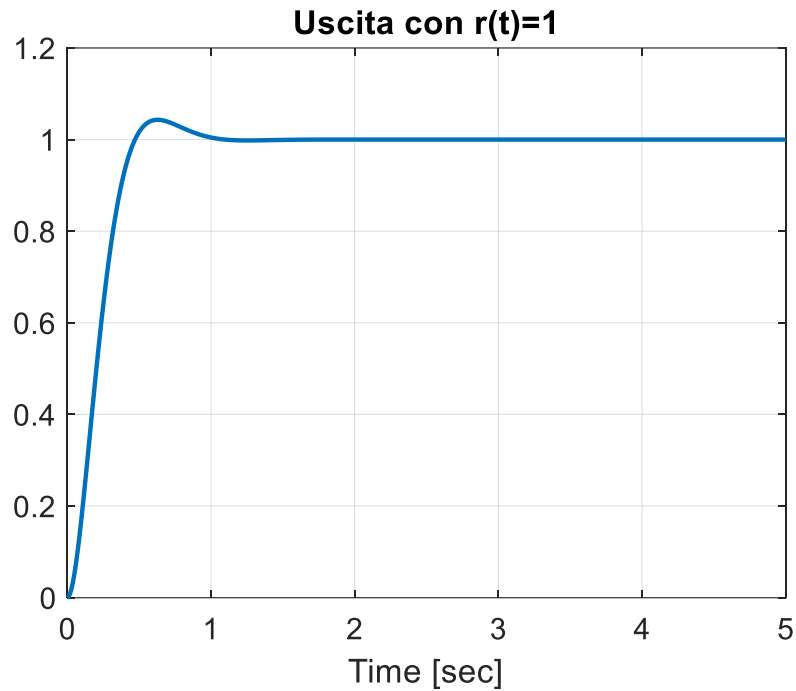
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

$$\xi(t) = 1$$



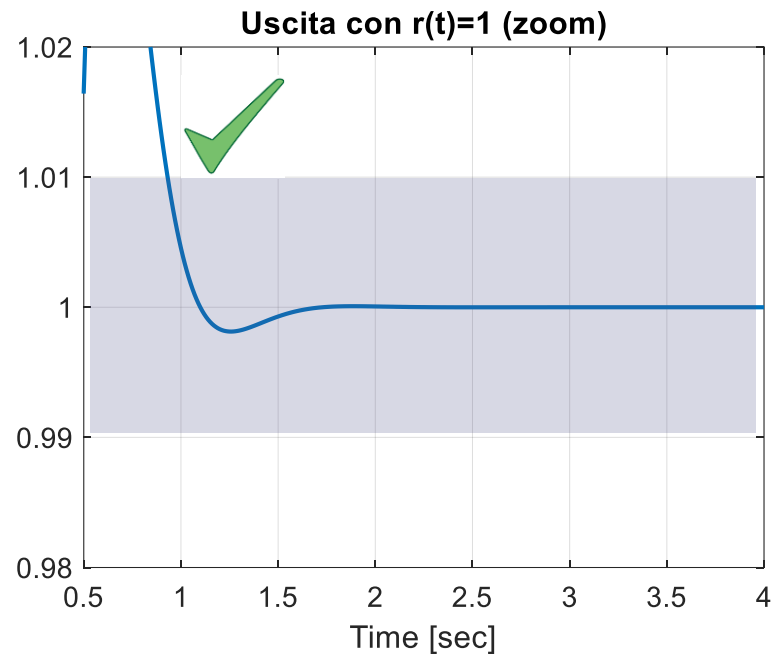
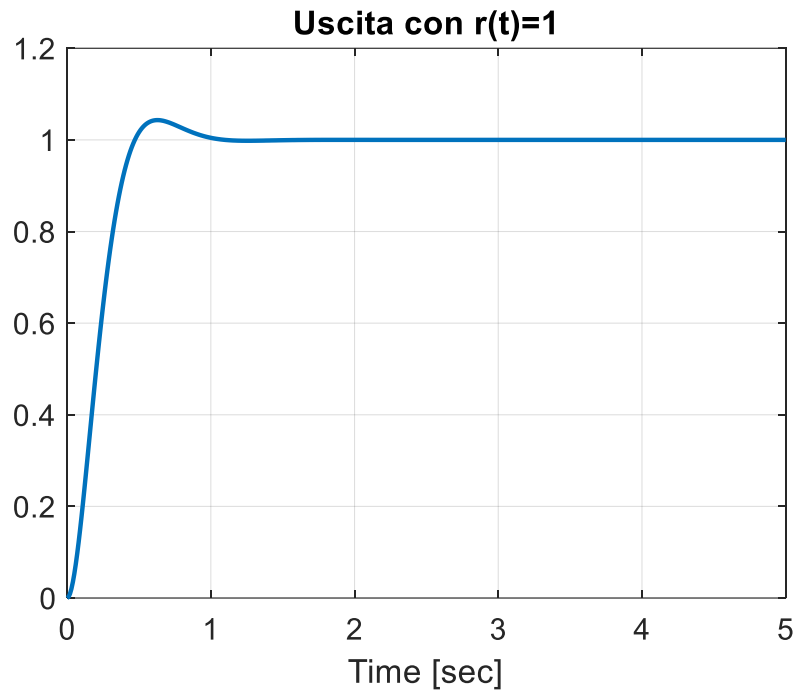
- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%

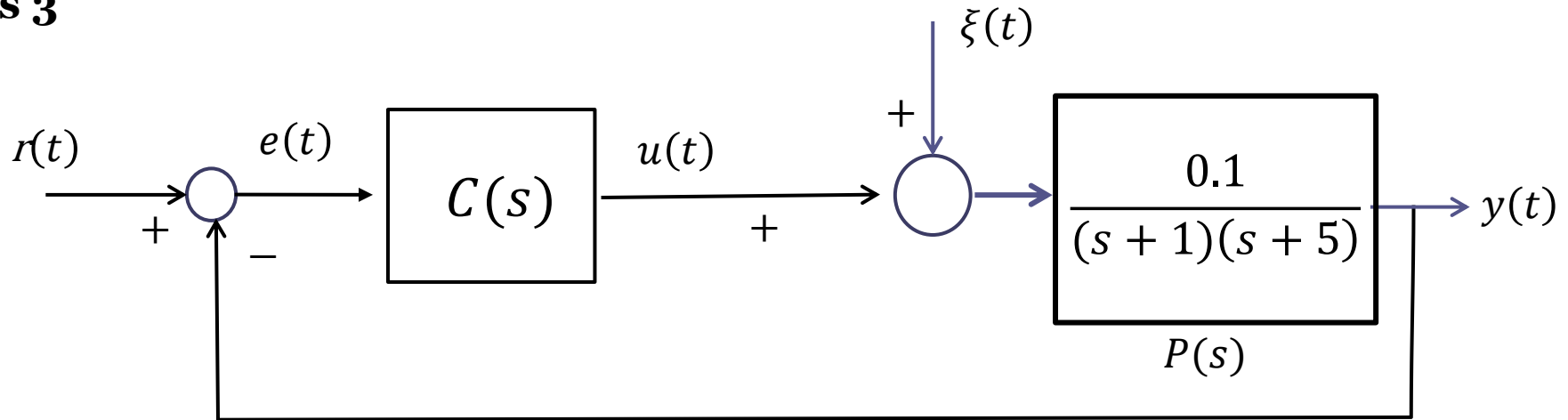
$$r(t) = 1$$



- S4. Tempo di assestamento non superiore a 1.5 secondi

$$r(t) = 1$$



**Es 3**

Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Precisione statica
- S2. Attenuazione di un disturbo costante almeno del 95%
- S3. Errore a regime per un set point  $r(t) = 2t$  (rampa con pendenza pari a 2) non superiore ad 1
- S4. Tempo di assestamento non superiore a 2.05 secondi
- S5. Sovraelongazione percentuale non superiore al 5%

## Soluzione es. 3

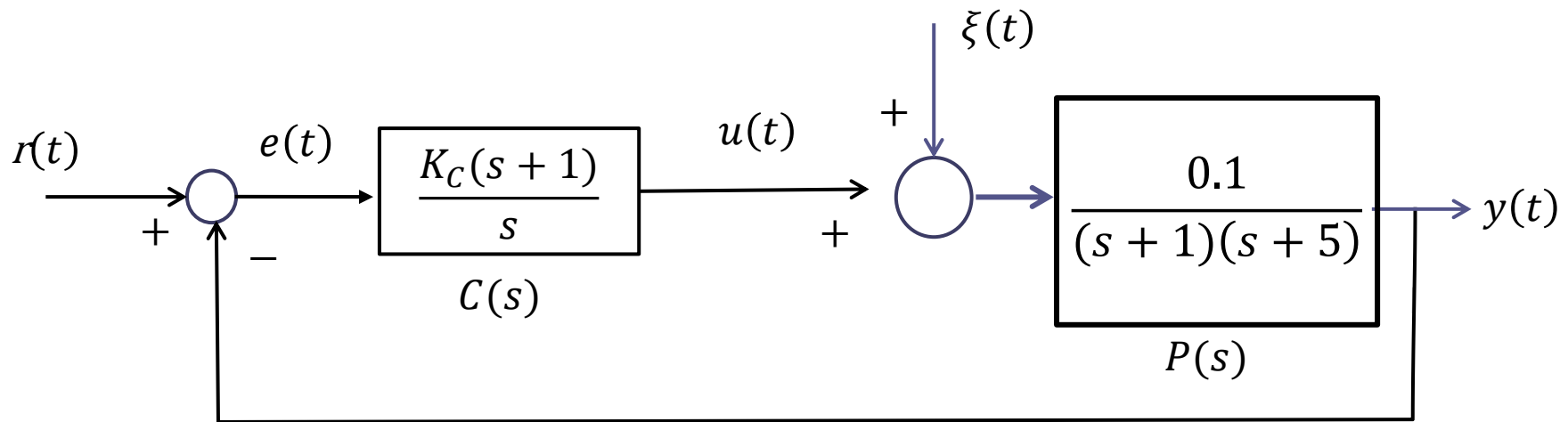
La specifica **S1** (precisione statica) implica la realizzazione di un sistema di controllo di tipo 1. Poiché il processo non contiene poli nell'origine sarà necessario progettare un regolatore contenente un polo nell'origine ( $\nu = 1$ )

Includiamo da subito nel regolatore anche uno zero in modo da avere un regolatore a grado relativo nullo. Come da prassi operativa, sovrapponiamo lo zero del controllore al polo del processo a parte reale negativa collocato più in bassa frequenza

Struttura di tentativo:

$$C(s) = \frac{K_C(s + 1)}{s} \quad \text{Ovviamente } K_C \text{ dovrà essere tale da garantire che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile.}$$

Verifichiamo se tale scelta per il controllore è tale da garantire la stabilità a ciclo chiuso per qualunque valore di  $K_C$  o se invece sussistono dei vincoli



Vi è un modo rapido per determinare il polinomio caratteristico associato ad un sistema di controllo a retroazione unitaria. E' sufficiente moltiplicare fra loro le FdT del controllore e del processo, e sommare i relativi polinomi a denominatore e a numeratore

$$C(s)P(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} \cdot \frac{0.1}{(s+1)(s+5)} = \frac{0.1K_C}{s(s+5)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+5) + 0.1K_C = s^2 + 5s + 0.1K_C$$

Il sistema di controllo è sempre asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di  $K_C > 0$  (regola di Cartesio)



- **S2**. Attenuazione di un disturbo costante almeno del 95%

La specifica **S2** cela un piccolo «tranello». Essa è *compatibile* con un sistema di controllo in cui il controllore non contiene poli nell'origine ed abbia un guadagno **statico**  $\mu_C \geq \frac{1}{0.05} = 20$ , ma poiché nel contesto del presente esercizio siamo in ogni caso «costretti» (dalla specifica S1) ad inserire nel controllore un polo nell'origine ecco che la specifica S2 diventa «ridondante». La CNES per la reiezione di un disturbo costante ci dice difatti, alla luce della obbligatoria presenza nel controllore di un polo nell'origine, che la specifica S2 sarà garantita con un livello di attenuazione completo, pari quindi al 100% (purché il controllore, nel contempo, garantisca la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo).

Non è quindi prevista, almeno per il momento, nessuna soglia inferiore per il guadagno del controllore, la cui struttura di tentativo resta la seguente:

$$C(s) = \frac{K_C(s + 1)}{s} \quad K_C > 0$$

- **S3**. Errore a regime per un set point  $r(t) = 2t$  (rampa con pendenza pari a 2) non superiore ad 1

Ora vediamo se la specifica **S3** implica dei vincoli sul guadagno del controllore.

Abbiamo visto in precedenza che un sistema di controllo di tipo 1 è tale da rispondere ad un set point a rampa con un segnale di errore che tende ad un valore costante.

Calcoliamo il valore a regime del segnale di errore nel caso in cui sia impiegato un set-point a rampa  $r(t) = 2t$

FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'errore

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_C(s+1)}{s} \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}} = \frac{s(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C}$$

TdL dell'errore 
$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \cdot \frac{2}{s}$$

$E(s)$  soddisfa i requisiti di applicabilità del Teorema del valore finale in quanto i suoi poli coincidono con le radici del polinomio caratteristico (e avranno quindi obbligatoriamente parte reale negativa) più un ulteriore polo semplice nell'origine. Ciò conferma, come già sapevamo, che il segnale di errore tende a un valore costante.

Applichiamo il Teorema del valore finale

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = E^* &= [sE(s)]_{s=0} = \left[ s \cdot \frac{(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \cdot \frac{2}{s} \right]_{s=0} \\ &= \left[ \frac{2(s+5)}{s(s+5) + 0.1K_C} \right]_{s=0} = \frac{10}{0.1K_C} = \frac{100}{K_C} \end{aligned}$$

Imponiamo che il valore di regime dell'errore soddisfi la specifica S3. Ciò comporterà un vincolo sul valore minimo del guadagno  $K_C$

$$E^* = \frac{100}{K_C} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad K_C \geq 100$$

L'imposizione della specifica S3 ha comportato un vincolo sul minimo valore del guadagno  $K_C$

$$C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} \quad K_C \geq 100$$

**N.B.**  $K_C$  non è il guadagno statico del controllore. Se difatti si sostituisce  $s = 0$  nella FdT del controllore non si ottiene  $K_C$  ma bensì infinito, per effetto del fatto che il controllore possiede un polo nell'origine.  $K_C$  viene invece detto «guadagno statico **generalizzato**»

Il **guadagno statico generalizzato** è una estensione del concetto di guadagno statico per sistemi dinamici che possiedono poli nell'origine.

Esso si determina secondo la seguente formula:

$$\mu_{GEN} = [s^{\nu} F(s)]_{s=0} \quad \nu = \text{numero di poli nell'origine di } F(s)$$

cioè, rimuovendo dalla FdT i poli nell'origine e successivamente valutandone il valore in  $s = 0$

Se una FdT non possiede poli nell'origine ( $\nu = 0$ ) le definizioni di guadagno statico generalizzato e di guadagno statico standard coincidono.

Mostriamo che  $K_C$  è il guadagno statico generalizzato del controllore  $C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s}$

$$C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} \quad \nu = 1$$

$$\mu_{GEN} = [s C(s)]_{s=0} = [K_C(s+1)]_{s=0} = K_C$$

Riserviamoci la possibilità di modificare successivamente la struttura del regolatore, se risulterà necessario alla luce della analisi delle specifiche sul transitorio, aggiungendo ulteriori poli e zeri ma sempre impiegando una forma tale che il **guadagno statico generalizzato** del controllore sia pari a  $K_C$ , cioè:

$$C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} C'(s) \quad K_C \geq 100 \quad C'(0) = 1$$

Si verifica facilmente che il controllore così modificato continua ad avere guadagno statico generalizzato pari a  $K_C$ .

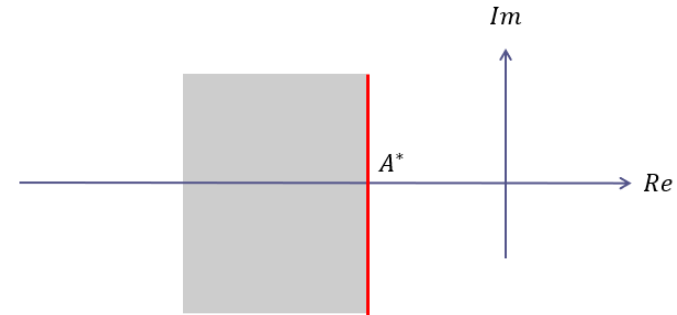
$$\mu_{GEN} = [s C(s)]_{s=0} = [K_C(s+1)C'(s)]_{s=0} = K_C C'(0) = K_C$$

Ciò ci garantisce che il controllore eventualmente modificato continuerà a garantire il soddisfacimento delle specifiche sul comportamento a regime (purché, ovviamente, continui a garantire la stabilità a ciclo chiuso, cosa che andrà verificata)

Si può infatti verificare come eseguendo l'analisi della specifica S3 considerando il controllore modificato  $C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s} C'(s)$  con  $C'(0) = 1$  si ottenga il medesimo vincolo su  $K_C$ , ricavato in precedenza per  $C'(s) = 1$ , cioè  $K_C \geq 100$

Passiamo alla analisi delle specifiche sul transitorio. Determiniamo la regione ammissibile per i poli del sistema a ciclo chiuso.

- **S4.** Tempo di **assestamento** non superiore a **2.05 secondi**

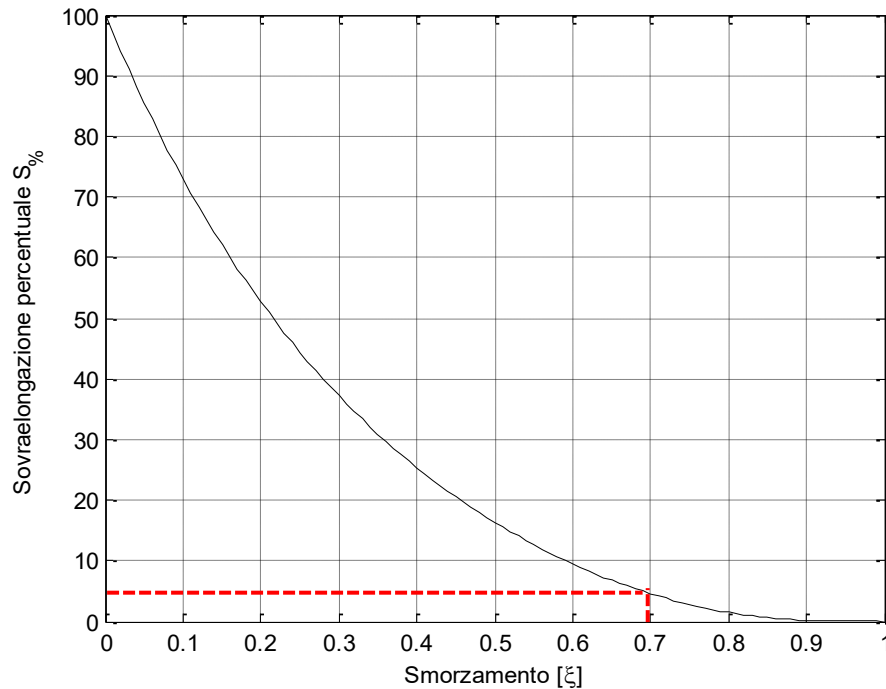


$$T_a \leq T^* \quad \rightarrow \quad A^* = \begin{cases} -\frac{5}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso del primo ordine} \\ -\frac{7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso di ordine superiore} \end{cases}$$

Poiché il processo è del secondo ordine il sistema a ciclo chiuso sarà sicuramente di grado superiore al primo. Si deve pertanto far riferimento alla formula:

$$A^* = -\frac{7}{T^*} = -3.41$$

- **S5. Sovraelongazione non superiore al 5%**

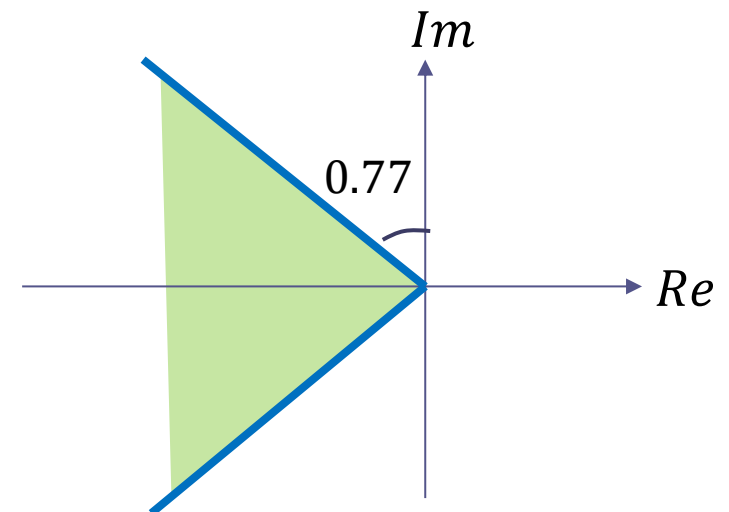


$$S_{\%} \leq 5 \quad \rightarrow \quad \xi \geq 0.7$$

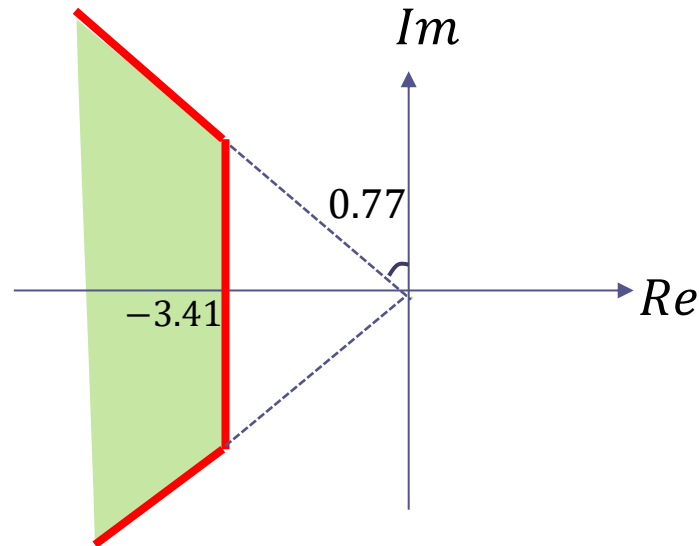
$$\beta \geq \beta^* = \arcsin(0.7) = 0.77 \text{ rad}$$

Ovviamente:

$$\sin(0.77) = 0.7$$

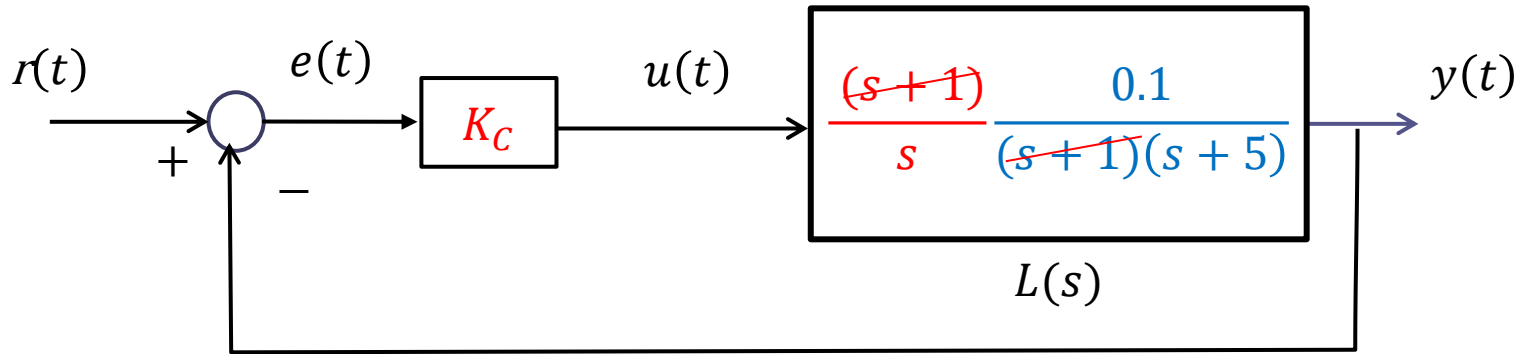


La regione ammissibile derivante dalle specifiche S4 ed S5 è complessivamente la seguente (area verde in figura)



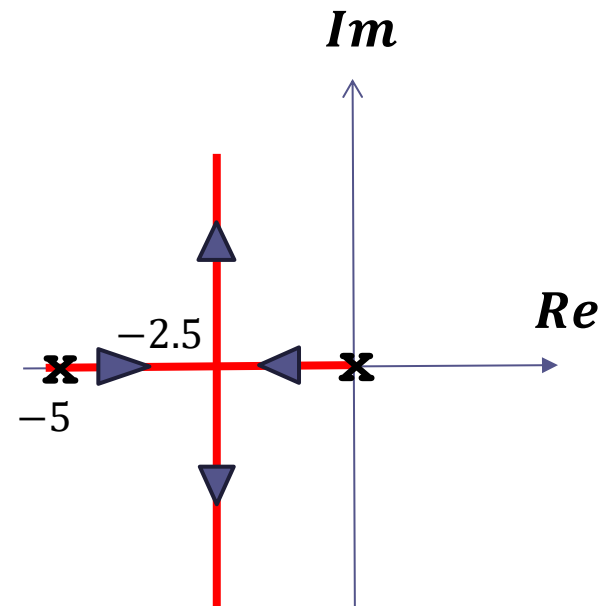
Ora, sulla base della struttura che è stata ipotizzata per il regolatore in esito alla imposizione delle specifiche S1, S2 e S3 sul comportamento a regime dobbiamo tracciare il relativo LdR e «sovrapporlo» alla regione ammissibile per vedere se scegliendo in maniera adeguata il guadagno del regolatore si può garantire che tutti poli a ciclo chiuso ricadano al suo interno

Rappresentiamo lo schema a blocchi del sistema di controllo secondo lo schema standard per il tracciamento del LdR, cioè isolando il guadagno del controllore in un blocco a se stante ed «accorpendo» nel blocco  $L(s)$  la parte dinamica del controllore (in rosso) e la FdT del processo (in blu). Il disturbo può essere rimosso da questo schema.

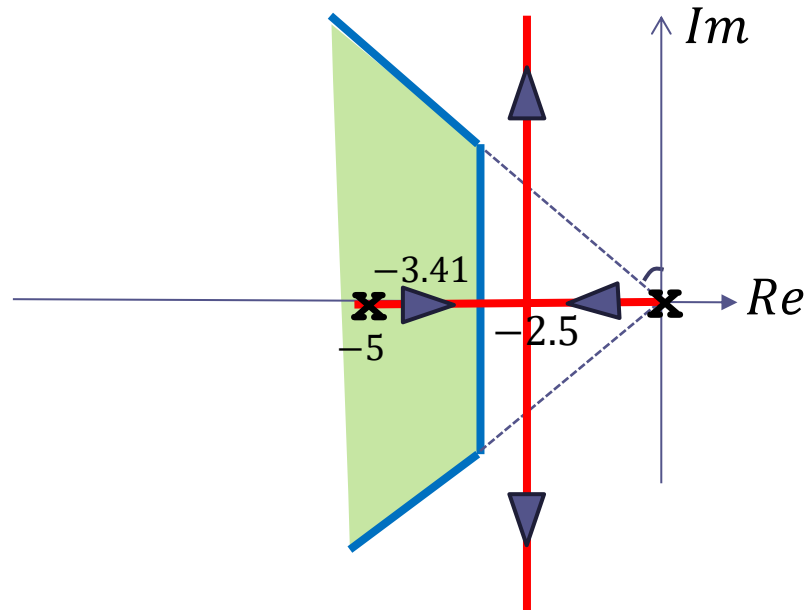


$$L(s) = \frac{\cancel{(s+1)}}{s} \cdot \frac{0.1}{\cancel{(s+1)}(s+5)} = \frac{0.1}{s(s+5)}$$

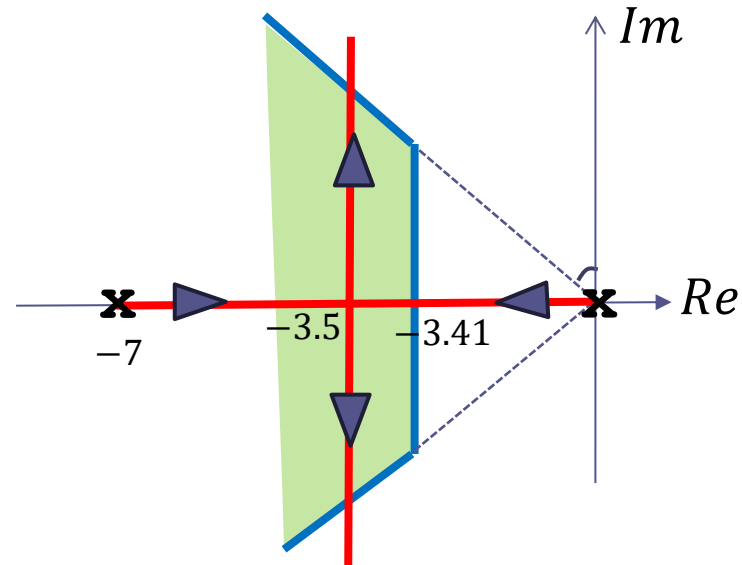
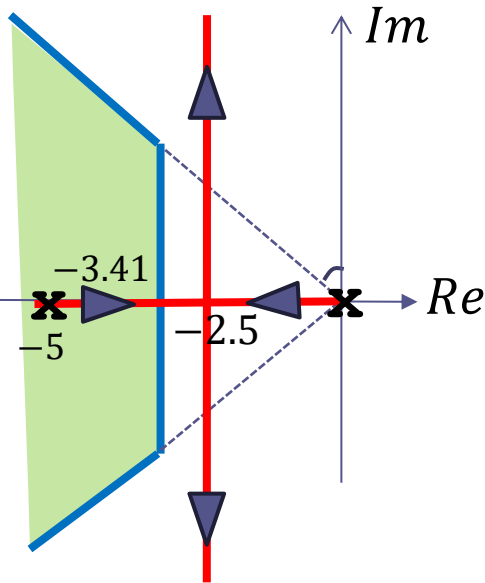
Il LdR risultante è mostrato sulla destra



Sovrapponendo la regione ammissibile ed il LdR appare chiaro come impiegando il controllore  $C(s) = \frac{K_C(s+1)}{s}$  risulta **impossibile** fare in modo che entrambi i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.



Il principale fattore limitante è dovuto alla presenza nella  $L(s)$  del polo in  $-5$ , per effetto del quale il punto doppio va a collocarsi nel punto  $-2.5$  (a metà strada fra i due poli di  $L(s)$ ). Se il polo in  $-5$  fosse collocato più in alta frequenza, in particolare in  $-7$ , si avrebbe un punto doppio in  $-3.5$ , e quindi i rami del luogo verrebbero «attratti», almeno in un intervallo di valori del guadagno  $K_C$ , all'interno della regione ammissibile



E' possibile ottenere il LdR «desiderato» inserendo nel controllore una ulteriore coppia polo-zero, in cui lo zero del controllore cancella il polo del processo in  $-5$  e lo «sostituisce» con un polo in  $-7$

$$C(s) = K_C \frac{s+1}{s} C'(s)$$

$$C'(s) = \frac{7}{5} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

$$C'(0) = 1$$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

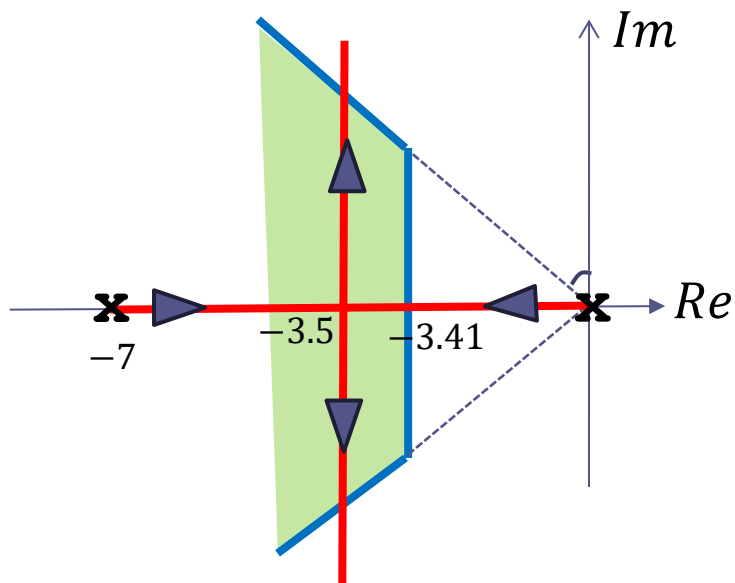
N.B. Avendo inserito nella  $C'(s)$  il guadagno  $7/5$  (per fare in modo che il guadagno statico generalizzato di  $C(s)$  non sia alterato e continui ad essere pari a  $K_C$ ) abbiamo garanzia che la specifica  $S_3$  sarà soddisfatta se  $K_C \geq 100$ , così come precedentemente ricavato prima di inserire anche  $C'(s)$ .

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

$$P(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}$$

$$L(s) = \frac{7}{5} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s} \cdot \frac{\cancel{s+5}}{s+7} \frac{0.1}{(\cancel{s+1})(\cancel{s+5})} = \frac{0.1 \cdot \frac{7}{5}}{s(s+7)}$$

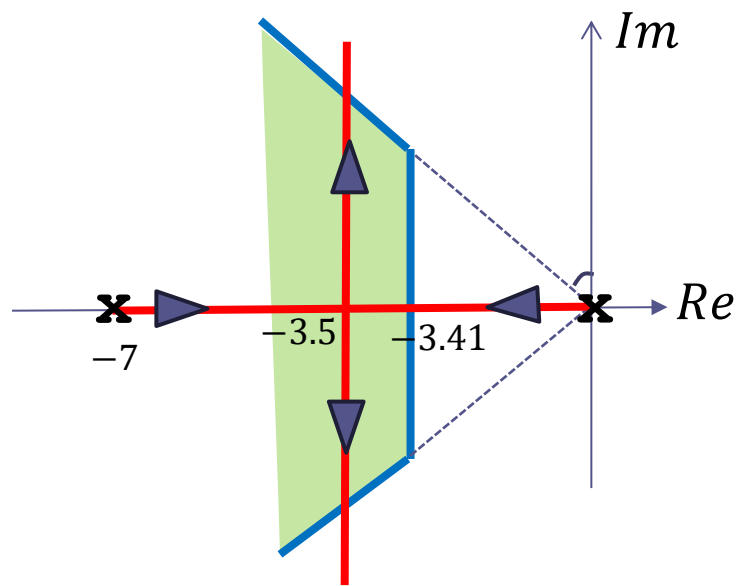
Doppia cancellazione  
polo-zero



Il «nuovo» LdR, che coincide con quello desiderato, rende superflua l'analisi della stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo con il «nuovo» controllore

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

I due rami sono interamente contenuti nel semipiano sinistro quindi il sistema di controllo sarà asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di  $K_C$ . Poiché le cancellazioni polo-zero fra controllore e processo avvengono nel semipiano sinistro è garantita anche la stabilità interna



Si deve verificare che in corrispondenza del minimo valore consentito per  $K_C$ , pari a 100, i poli si trovino all'interno della regione ammissibile, cioè che la loro parte reale sia minore o uguale a  $-3.41$  ed il loro smorzamento (se fossero complessi coniugati) sia maggiore o uguale di 0.7.

Calcoliamo il polinomio caratteristico sommando fra loro il denominatore ed il numeratore di  $C(s)P(s)$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

$$P(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}$$

$$C(s)P(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7} \frac{0.1}{(s+1)(s+5)} = \frac{K_C \cdot 0.1 \cdot \frac{7}{5}}{s(s+7)} = \frac{K_C \cdot 0.14}{s(s+7)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+7) + K_C \cdot 0.1 \cdot \frac{7}{5} = s^2 + 7s + 0.14K_C$$

Valutiamo il polinomio caratteristico per  $K_C = 100$

$$P_{car}(s) = s^2 + 7s + 0.14K_C = s^2 + 7s + 14$$

Le radici del polinomio  $s^2 + 7s + 14$  sono complesse coniugate perchè il  $\Delta$  dell'equazione di secondo grado è negativo ( $\Delta = 49 - 4 \cdot 14 = -7$ )

Uguagliamo membro a membro il polinomio caratteristico con la forma standard del termine trinomio:

$$s^2 + 7s + 14 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 14$$

$$\omega_n = \sqrt{14} \approx 3.74$$

$$2\xi\omega_n = 7$$

$$\xi = \frac{7}{2\omega_n} \approx 0.93$$



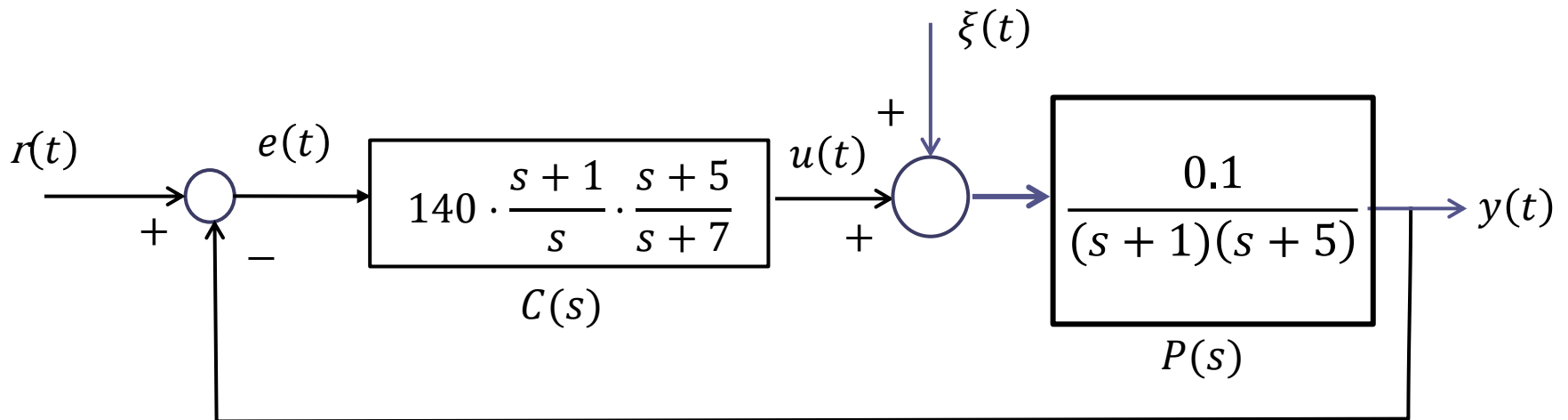
Altra procedura di calcolo: calcoliamo le radici del polinomio con la formula risolutiva dei polinomi di secondo grado (sappiamo già che solo complesse coniugate e che la loro parte reale è  $-3.5$ ), e poi ricaviamo lo smorzamento in funzione della parte reale e immaginaria

$$p_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -3.5 \pm j 1.32 = a \pm jb$$

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3.5}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.32)^2}} \approx 0.93$$

Quindi il seguente regolatore risolve il problema di progetto

$$C(s) = 100 \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7} = 140 \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$



Poiché un **valore più elevato di  $K_C$  migliora le proprietà di precisione a regime** è lecito porsi il problema di determinare il massimo valore di  $K_C$  tale da garantire la permanenza dei poli all'interno della regione ammissibile. Sviluppiamo questo calcolo:

$$P_{car}(s) = s^2 + 7s + 0.14K_C = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 0.14K_C$$

$$\omega_n = \sqrt{0.14K_C} \approx 0.374\sqrt{K_C}$$

$$2\xi\omega_n = 7$$

$$\xi = \frac{7}{2\omega_n} = \frac{7}{2 \cdot 0.374\sqrt{K_C}} = \frac{9.35}{\sqrt{K_C}} \geq 0.7$$

$$\xi \geq 0.7 \quad \sqrt{K_C} \leq \frac{9.35}{0.7} = 13.36 \quad K_C \leq (13.36)^2 = 178.7$$

Abbiamo mostrato che la seguente **famiglia di regolatori** garantisce il soddisfacimento di tutte le specifiche del problema in esame

$$C(s) = K_C \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+7}$$

$$100 \leq K_C \leq 178.7$$



## Sviluppiamo un ulteriore ragionamento:

Se la specifica S3 fosse stata maggiormente stringente, si sarebbe ottenuto un valore minimo per  $K_C$  più grande di 100 che avrebbe potuto pregiudicare la verifica sulla appartenenza dei poli a ciclo chiuso alla regione ammissibile.

Vediamo come si sarebbe potuto procedere.

Consideriamo un esercizio totalmente identico eccetto la specifica S3 che viene resa maggiormente stringente dimezzando l'errore a regime massimo tollerato

- **S3. Errore a regime per un set point  $r(t) = 2t$  (rampa con pendenza pari a 2) non superiore a 0.5**

L'analisi della specifica S3 fornirebbe il seguente esito

$$E^* = \frac{100}{K_C} \leq 0.5 \quad \Rightarrow \quad K_C \geq 200$$

Valutiamo il polinomio caratteristico per  $K_C = 200$

$$P_{car}(s) = s^2 + 7s + 0.14K_C = s^2 + 7s + 28$$

Le radici del polinomio  $s^2 + 7s + 28$  sono complesse coniugate perchè il  $\Delta$  dell'equazione di secondo grado è negativo ( $\Delta = 49 - 4 \cdot 28 = -63$ )

Seguiamo il medesimo procedimento adottato in precedenza: eguagliamo membro a membro il polinomio caratteristico con la forma standard del termine trinomio:

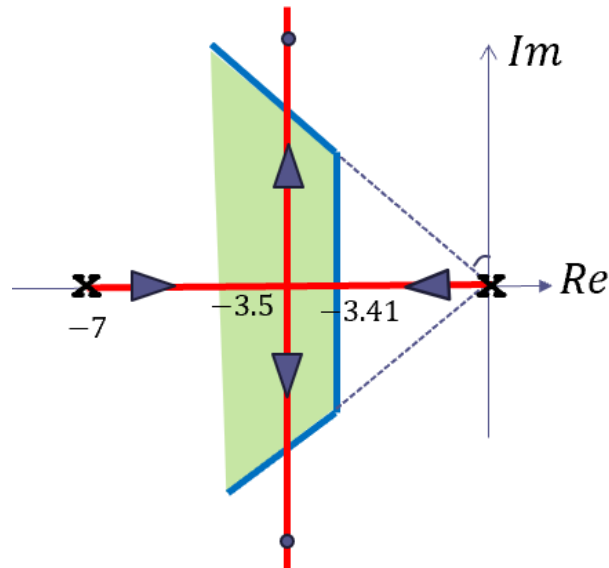
$$s^2 + 7s + 28 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 28$$

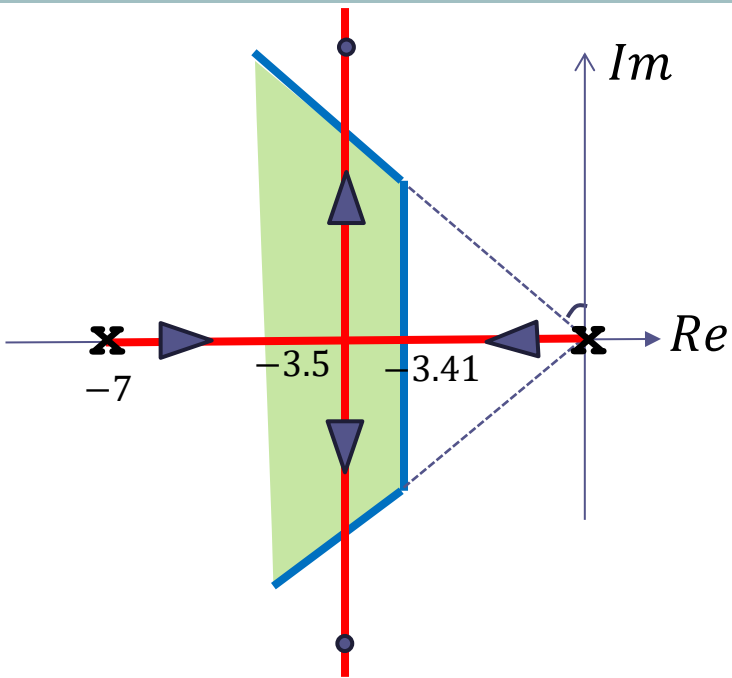
$$\omega_n = \sqrt{28} \approx 5.29$$

$$2\xi\omega_n = 7$$

$$\xi = \frac{7}{2\omega_n} \approx 0.66$$

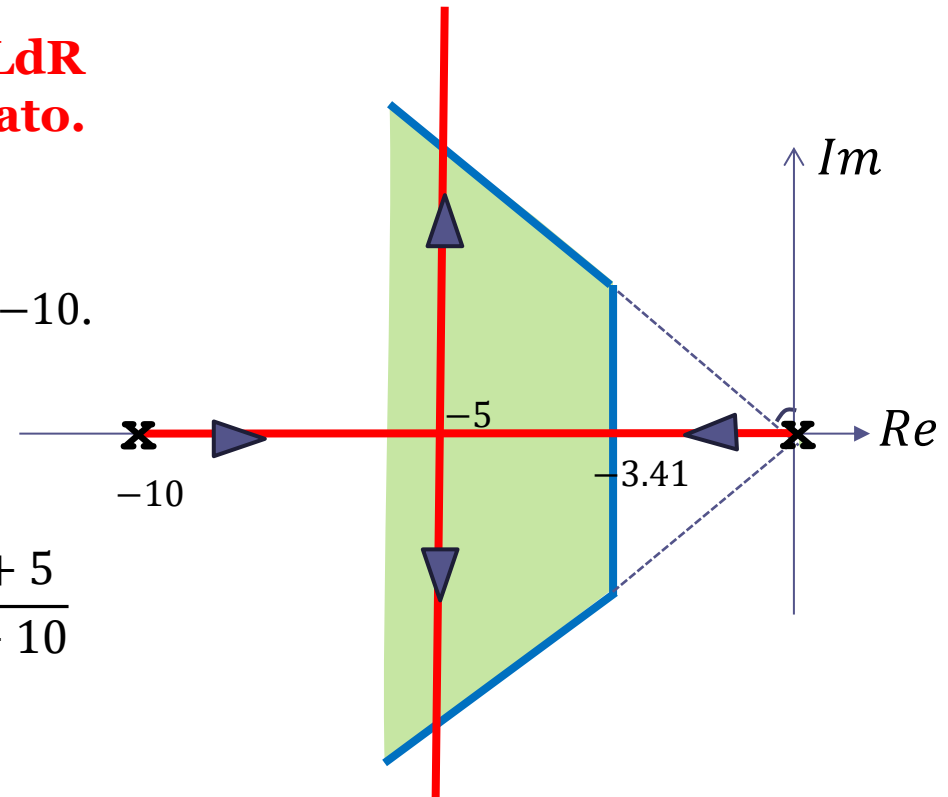


Siamo andati «troppo in la» lungo i rami verticali del luogo delle radici, e i poli sono fuoriusciti dalla regione ammissibile. In realtà potevamo già predire questo risultato in quanto abbiamo calcolato poche slides fa come il massimo valore consentito per  $K_C$  tale da garantire la permanenza all'interno della regione ammissibile fosse pari a 178.7



La soluzione è spostare ulteriormente a sinistra il polo in  $-7$  in modo da avere più margine sulla traslazione verticale dei poli prima che si fuoriesca dalla regione ammissibile

Nuovo LdR desiderato.



Proviamo a collocare il polo del regolatore in  $-10$ .  
 Il nuovo punto doppio risulta collocato in  $-5$ .  
 Il regolatore deve pertanto essere modificato come segue:

$$C(s) = K_C \frac{s + 1}{s} C'(s) \quad C'(s) = \frac{10}{5} \cdot \frac{s + 5}{s + 10}$$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s + 1}{s} \cdot \frac{s + 5}{s + 10}$$

Ora verifichiamo la collocazione dei poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore  $K_C = 200$

Calcoliamo il polinomio caratteristico sommando fra loro il denominatore ed il numeratore di  $C(s)P(s)$

$$C(s) = K_C \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10} \quad P(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+5)}$$

$$C(s)P(s) = K_C \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10} \cdot \frac{0.1}{(s+1)(s+5)} = \frac{K_C \cdot 0.1 \cdot \frac{10}{5}}{s(s+10)} = \frac{K_C \cdot 0.2}{s(s+10)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+10) + K_C \cdot 0.2 = s^2 + 10s + 0.2K_C$$

Valutiamo il polinomio caratteristico per  $K_C = 200$

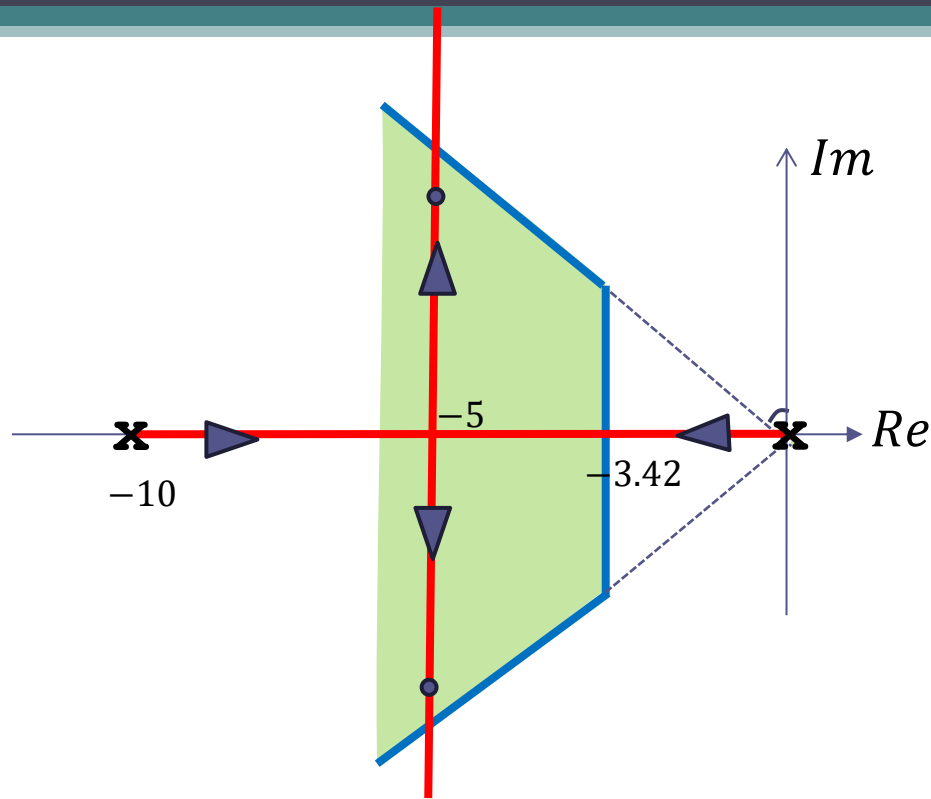
$$P_{car}(s) = s^2 + 10s + 0.2K_C = s^2 + 10s + 40$$

$$s^2 + 10s + 40 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 40 \quad \omega_n = \sqrt{40} \approx 6.32$$

$$2\xi\omega_n = 10 \quad \xi = \frac{10}{2\omega_n} \approx 0.79$$





In corrispondenza del valore  $K_C = 200$  per il guadagno statico generalizzato del regolatore i poli a ciclo chiuso sono interni alla regione ammissibile

Quindi il seguente regolatore risolve l'esercizio di progetto in presenza di una specifica  $S_3$  più stringente rispetto alla formulazione originaria

$$C(s) = 200 \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10} = 400 \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+10)}$$

Determinare, come fatto in precedenza, la soglia massima per il guadagno  $K_C$  tale da garantire la permanenza nella regione ammissibile (cioè lo smorzamento  $\geq 0.7$ )

**(Soluzione:** 263.53.    passaggi nella slide successiva)

$$P_{car}(s) = s^2 + 10s + 0.2K_C$$

$$s^2 + 10s + 0.2K_C = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = 0.2K_C$$

$$2\xi\omega_n = 10$$

$$\omega_n = \sqrt{0.2K_C} \approx 0.44\sqrt{K_C}$$

$$\xi = \frac{10}{2 \cdot 0.44\sqrt{K_C}} \approx \frac{11.36}{\sqrt{K_C}} \geq 0.7$$

$$\sqrt{K_C} \leq \frac{11.36}{0.7} = 16.23$$

$$K_C \leq (16.23)^2 = 263.53$$

Soglia massima per  $K_C$ ,  
oltre la quale lo  
smorzamento dei poli CC  
diventa minore di 0.7

**Pertanto, la seguente famiglia di controllori garantisce il soddisfacimento di tutte le specifiche del problema in esame, inclusa la specifica S3 più stringente:**

$$C(s) = 2K_C \cdot \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+10}$$

$$200 \leq K_C \leq 263.53$$