

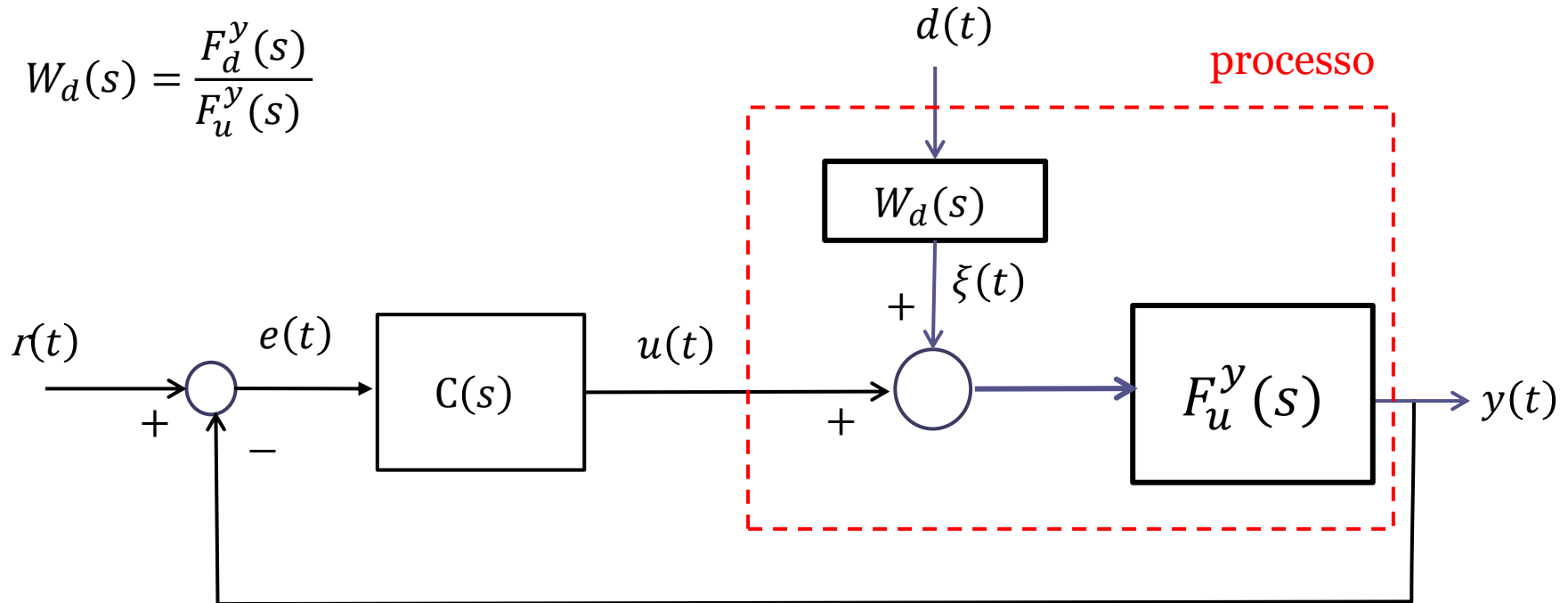
Controlli automatici

Comportamento a regime dei sistemi di controllo

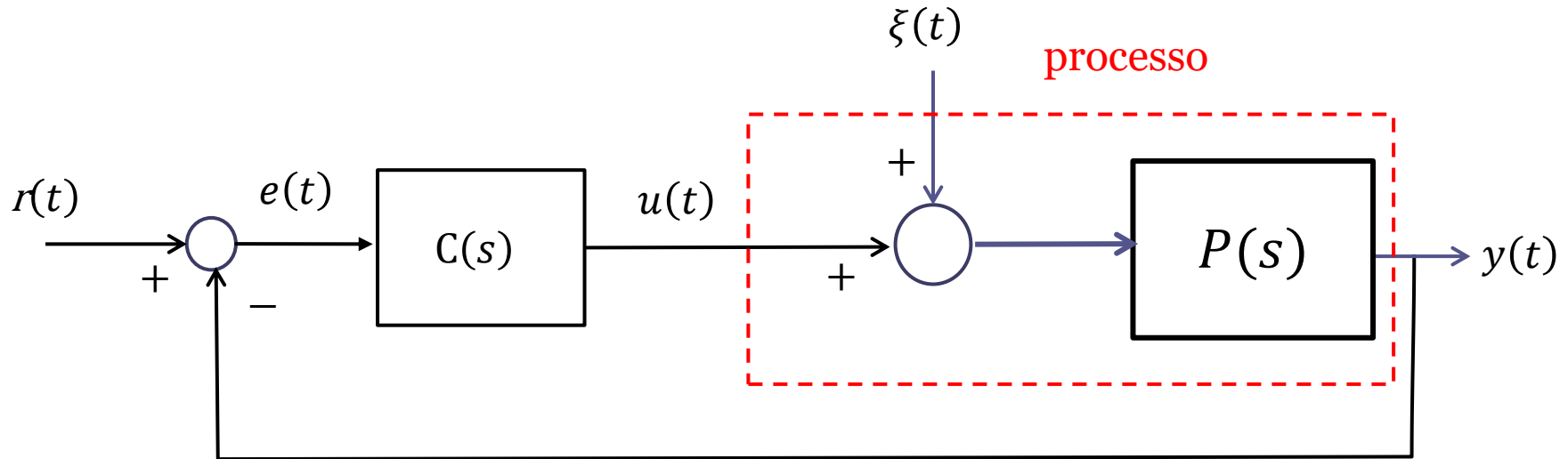
Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Il comportamento a regime dei sistemi di controllo si riferisce alla analisi degli effetti **a transitorio esaurito** di **ingressi esterni (set-point e disturbi)** polinomiali (segnali costanti, a rampa, etc., detti anche “**canonici**”) oppure ingressi esterni avente andamento **sinusoidale**.

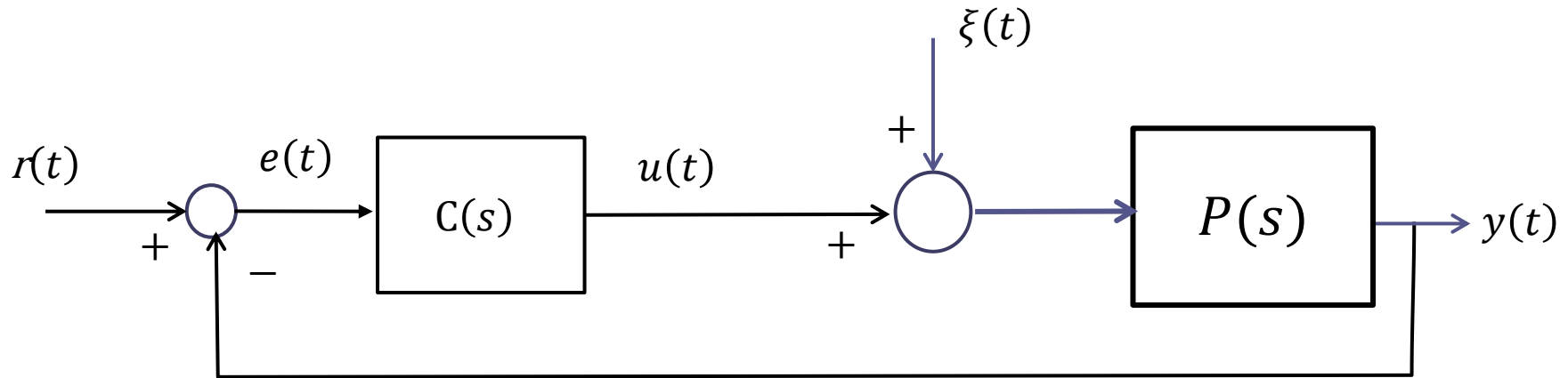
Faremo riferimento a sistemi di controllo a retroazione unitaria



Per semplicità di analisi, consideriamo come segnale disturbante di ingresso al sistema di controllo direttamente il segnale $\xi(t)$ che si somma all'uscita del regolatore $C(s)$

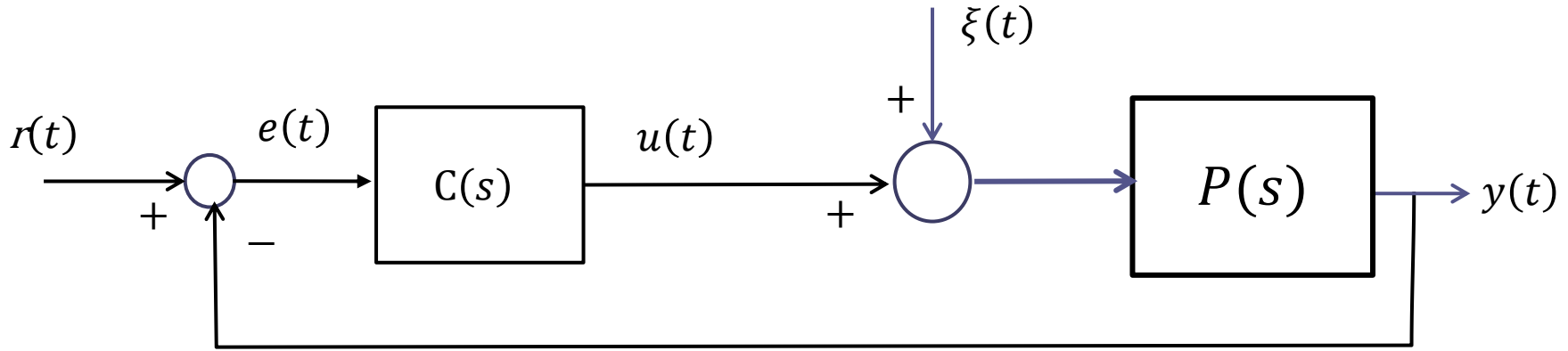


Il **segnale disturbante** $\xi(t)$ influenza il comportamento del sistema di controllo ma la sua evoluzione temporale non è influenzabile dal progettista. Compito del sistema di controllo è pertanto non solo di garantire il comportamento desiderato per l'uscita in condizioni nominali (cioè, senza disturbo) ma anche quello di fare in modo che ove intervengano disturbi appartenenti a determinate classi di segnali (ci riferiremo in prevalenza, ma non esclusivamente, a disturbi costanti di ampiezza sconosciuta) il loro effetto a regime sulla variabile di uscita sia completamente compensato, o almeno **attenuato** in misura sufficiente.



Per quanto concerne il comportamento a regime per ingressi e disturbi canonici risulta di estremo rilievo la presenza di **poli nell'origine** nel controllore e/o nel processo

E' importante sia il numero complessivo di poli nell'origine che la loro "ripartizione" tra controllore e processo



Definiamo o richiamiamo alcune utili Funzioni di Trasferimento (FdT) a ciclo chiuso e relazioni aggiuntive associate al SdC (sistema di controllo) in esame

FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita (**già vista**)

$$W_r^y(s) = \left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{\xi=0} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita (**già vista**)

$$W_\xi^y(s) = \left. \frac{Y(s)}{\Xi(s)} \right|_{r=0} = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

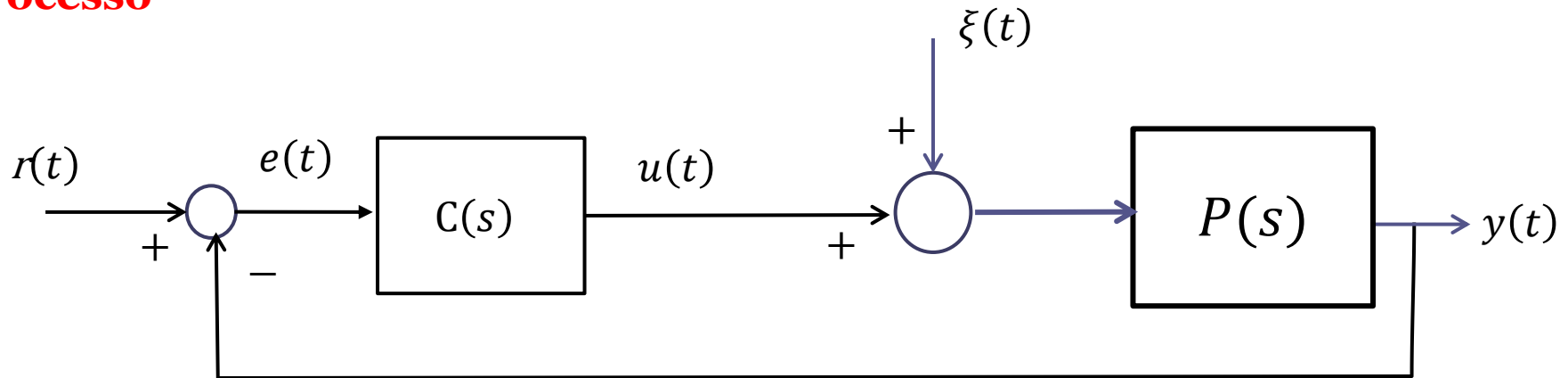
FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'errore

$$W_r^e(s) = \left. \frac{E(s)}{R(s)} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

Tutte le considerazioni che svilupperemo in merito al comportamento a regime hanno come prerequisito essenziale che il sistema di controllo sia **asintoticamente stabile a ciclo chiuso sia esternamente che internamente.**

Definizione 1 - Tipo di un sistema di controllo

Con riferimento al sistema di controllo in Figura, si definisce **tipo del sistema** il **numero complessivo di poli nell'origine presenti nel controllore e nel processo**

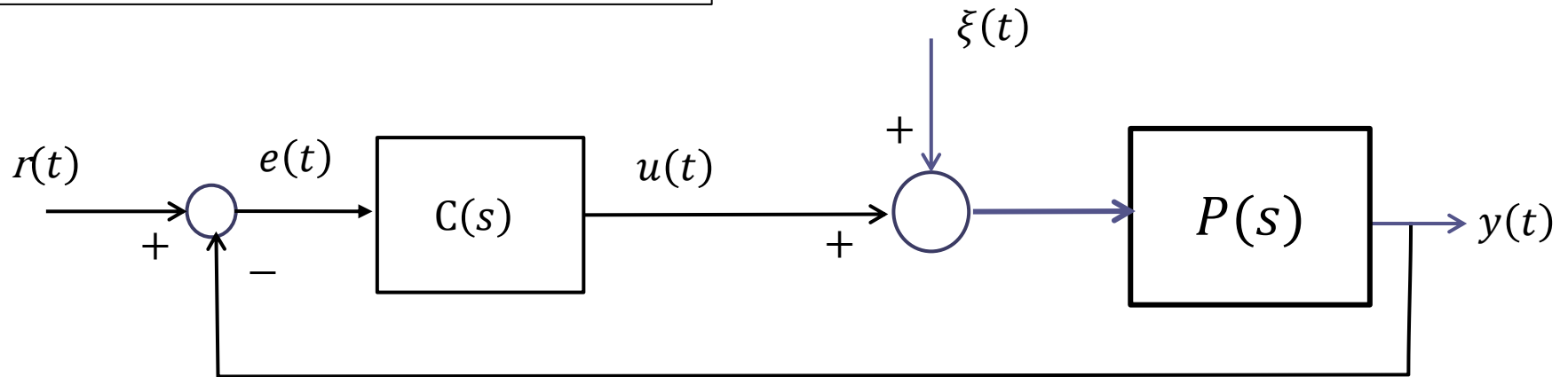


Un sistema di controllo potrà pertanto essere di **tipo zero**, di **tipo uno**, di **tipo due**, etc.

Nella pratica quasi mai si eccede il tipo due.

I sistemi di controllo di tipo uno sono quelli largamente più diffusi.

Sistemi di controllo di tipo zero



Né il controllore né il processo possiedono poli nell'origine.

Siano μ_C e μ_P i **guadagni statici** di controllore e processo

$$\mu_C = C(0)$$

$$\mu_P = P(0)$$

Sistemi di controllo di tipo zero

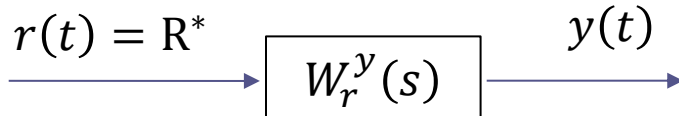
Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point costante** (e disturbo nullo).

$$r(t) = R^* = \text{cost.}$$

$$\xi(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Dimostrazione



$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$W_r^y(0) = \frac{C(0)P(0)}{1 + C(0)P(0)} = \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Possiamo far riferimento al T.F.R.G. in quanto la FdT a ciclo chiuso $W_r^y(s)$ è per ipotesi asintoticamente stabile e quindi la sua risposta ad un gradino di ampiezza R^* converge a regime al valore costante pari al prodotto fra il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso (che vale $\frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$) e l'ampiezza R^* del gradino in ingresso.

Si ha quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \cdot \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

QED

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Commenti

In un sistema di controllo di tipo zero, l'uscita non converge al valore costante del set-point. E' sempre presente (**anche in assenza di disturbi**) un errore a regime che dipende dai guadagni statici di regolatore e processo (in realtà dipende in maniera aggregata dal loro prodotto).

Incrementando il guadagno statico μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si riduce la differenza fra il valore di regime dell'uscita ed il valore del set-point (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$ tende ad 1 al crescere di μ_C)

Si presti attenzione al fatto che **il guadagno del controllore non può essere aumentato a piacere**, in quanto **deve sempre essere garantita la stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo**. Il LdR ci permette di determinare se sussista o meno il rischio che valori eccessivamente elevati del guadagno del controllore possano destabilizzare il sistema a ciclo chiuso.

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **disturbo costante** (e set point nullo).

$$\xi(t) = \Delta = \text{cost.} \qquad r(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

Dimostrazione (seguiamo una strada differente dalla applicazione del T.F.R.G. impiegando stavolta il Teorema del valore finale)

Calcoliamo la TdL dell'uscita moltiplicando fra loro la FdT a ciclo chiuso $W_{\xi}^y(s)$ fra il disturbo e l'uscita e la TdL $\Xi(s)$ del disturbo:

$$Y(s) = W_{\xi}^y(s) \Xi(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} \cdot \frac{\Delta}{s}$$

Ora applichiamo il Teorema del valore finale. La condizione di applicabilità del teorema del valore finale è soddisfatta in conseguenza del fatto che il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile e quindi le soluzioni dell'equazione caratteristica $1 + C(s)P(s) = 0$ hanno certamente parte reale negativa.

Quindi, l'uscita converge asintoticamente ad un valore costante, che può essere calcolato nella maniera seguente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = [sY(s)]_{s=0} = \left[\Delta \cdot \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} \right]_{s=0} = \Delta \cdot \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} \quad \text{Q.E.D.}$$

Commenti

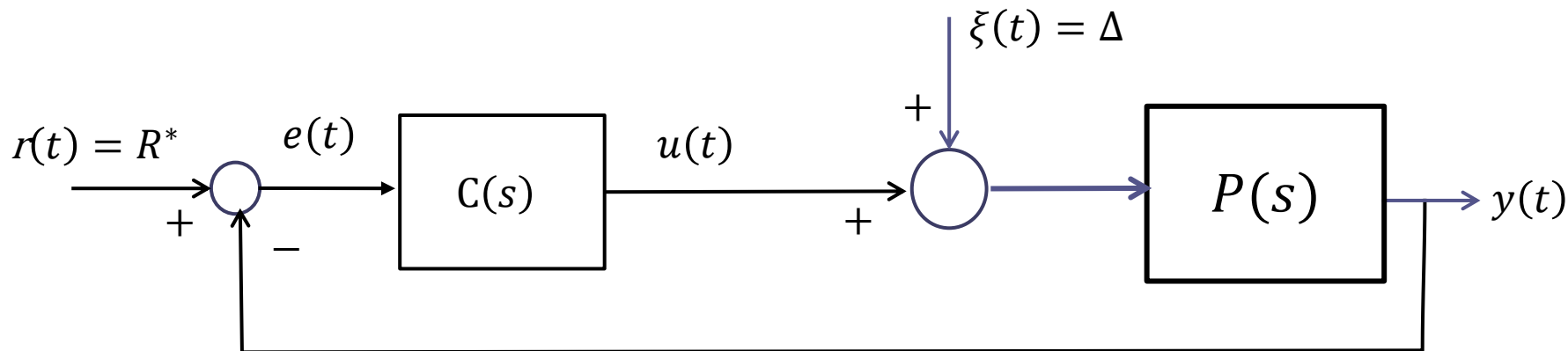
In un sistema di controllo di tipo zero, un disturbo costante altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende (oltre che dalla ampiezza del disturbo) dai guadagni statici di regolatore e processo.

Incrementando il guadagno μ_C del controllore la precisione a regime migliora, nel senso che si attenua l'effetto del disturbo sul valore di regime dell'uscita (ciò in conseguenza del fatto che il termine $\frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$ tende a zero al crescere di μ_C)

L'incremento del guadagno del controllore si rileva lo strumento progettuale utile a garantire determinate specifiche sul comportamento a regime in presenza di disturbi (ad esempio, sulla **attenuazione minima richiesta** per il disturbo sull'uscita)

Sistemi di controllo di tipo zero

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point costante e disturbo costante che intervengono simultaneamente**



Il **principio di sovrapposizione degli effetti** ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo zero soggetto simultaneamente ad un set point costante di ampiezza R^* e ad un disturbo costante di ampiezza Δ il valore di regime dell'uscita sarà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

μ_C e μ_P sono i guadagni statici del controllore e del processo

La formula soprariportata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y^* = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

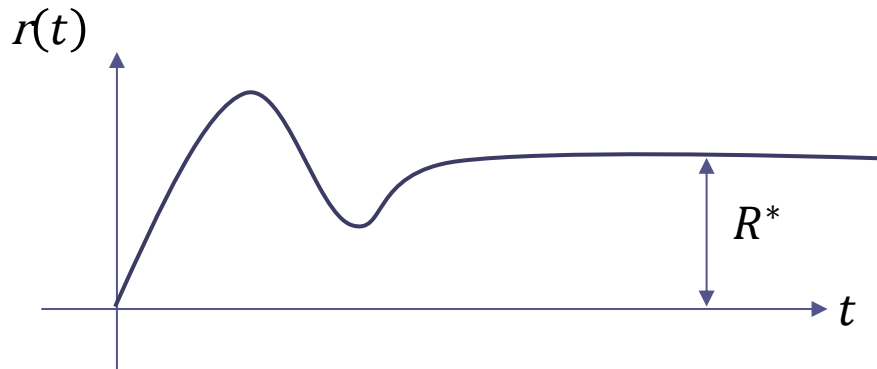
All'aumentare di μ_C si realizza, con precisione progressivamente crescente, la relazione «desiderata»

$$Y^* \approx R^*$$

che in ogni caso in un sistema di controllo di tipo zero non è **mai ottenibile**, nemmeno in assenza di disturbi.

Considerazioni aggiuntive

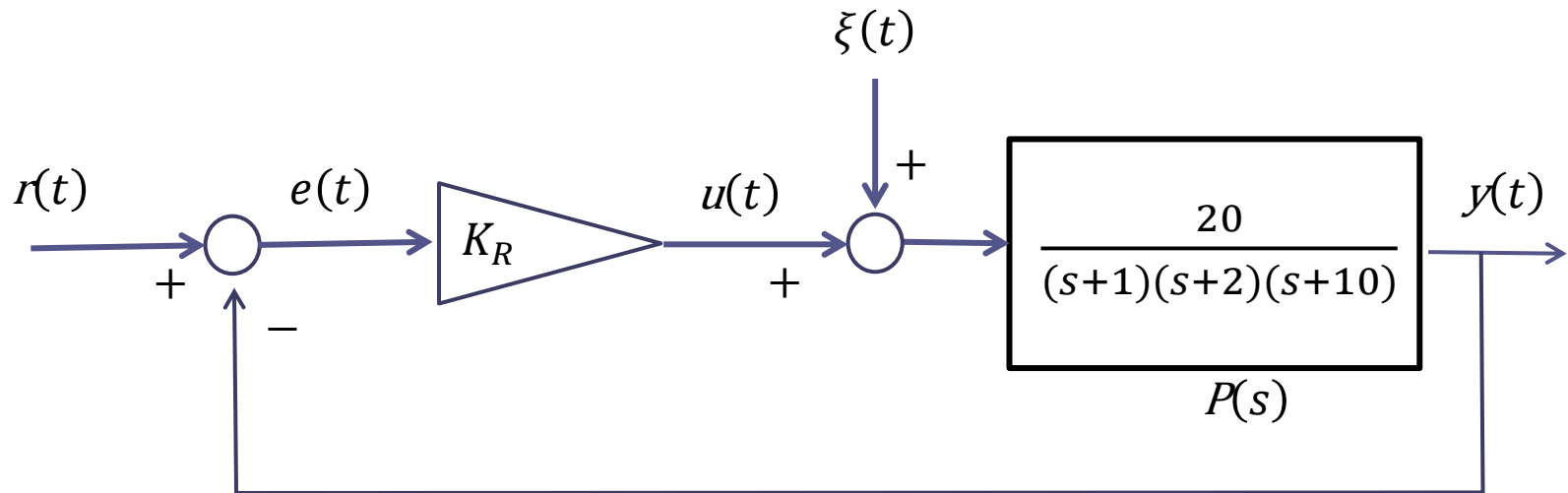
Le considerazioni sviluppate valgono anche in casi più generali in cui il set-point o il disturbo siano tempo varianti ma tendano ad un valore costante per t tendente all'infinito



L'evoluzione transitoria dell'uscita può risultare, naturalmente, completamente differente rispetto all'applicazione di set-point e disturbi costanti, ma il valore di regime è comunque lo stesso

Per sistemi di controllo di **tipo zero** soggetti a set point o disturbi costanti abbiamo visto quindi come **le uniche grandezze che intervengono nella determinazione del valore di regime dell'uscita siano** (oltre ovviamente all'ampiezza del set point e del disturbo) **il guadagno statico del processo ed il guadagno statico del regolatore**

Esempio



Determinare l'intervallo di valori di K_R in corrispondenza dei quali il sistema di controllo risulta essere asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

Assumendo per il guadagno K_R un valore pari alla metà del massimo guadagno ammissibile (guadagno critico) valutare quindi il comportamento dell'uscita a regime per

$$r(t) = 5$$

$$\xi(t) = 0.5(1 - e^{-2t})$$



$$P_{car}(s) = D_C(s)D_P(s) + N_C(s)N_P(s)$$

Quando non vi sono cancellazioni fra controllore e processo, il polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso è la somma dei prodotti fra numeratori ed i denominatori del controllore e del processo

Il polinomio caratteristico risulta pertanto essere il seguente

$$P_{car}(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 10) + 20K_R = s^3 + 13s^2 + 32s + 20 + 20K_R$$

Abbiamo visto come un polinomio di **terzo grado** risulti essere un polinomio di Hurwitz (cioè un polinomio avente tutte le radici a parte reale negativa) se e solo se tutti i suoi coefficienti hanno lo stesso segno e in aggiunta il prodotto fra i coefficienti dei termini lineare e quadratico risulta essere strettamente maggiore del prodotto fra il coefficiente del termine cubico ed il termine noto

Si ricava pertanto la seguente disequaglianza che fissa il massimo valore ammissibile per il guadagno del controllore e **ci evita di dover applicare il Criterio di Routh-Hurwitz**

$$13 \cdot 32 > 20 + 20K_R$$



$$K_R < 19.8$$

Consideriamo pertanto nel prosieguo dell'esercizio il valore $K_R = 9.9$

Poiché in corrispondenza di tale valore il sistema di controllo a ciclo chiuso risulta essere asintoticamente stabile possiamo fare riferimento alle formule viste per il comportamento dei sistemi di controllo di tipo zero.

Il controllore ha guadagno statico $\mu_C = K_R = 9.9$.

Il processo $P(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ ha guadagno statico $\mu_P = P(0) = 1$

Il disturbo $\xi(t)$ è tempo-variante ma converge verso il valore costante di regime 0.5

Pertanto le analisi inerenti il comportamento a regime possono far riferimento ad un disturbo costante $\xi(t) = \Delta = 0.5$

Nei sistemi di controllo di tipo zero con set-point e disturbo costante si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\mu_C = 9.9$$

$$\mu_P = 1$$

$$R^* = 5$$

$$\Delta = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* \frac{\mu_C \mu_P}{1 + \mu_C \mu_P} + \Delta \frac{\mu_P}{1 + \mu_C \mu_P}$$

$$\mu_C = 9.9$$

$$\mu_P = 1$$

$$R^* = 5$$

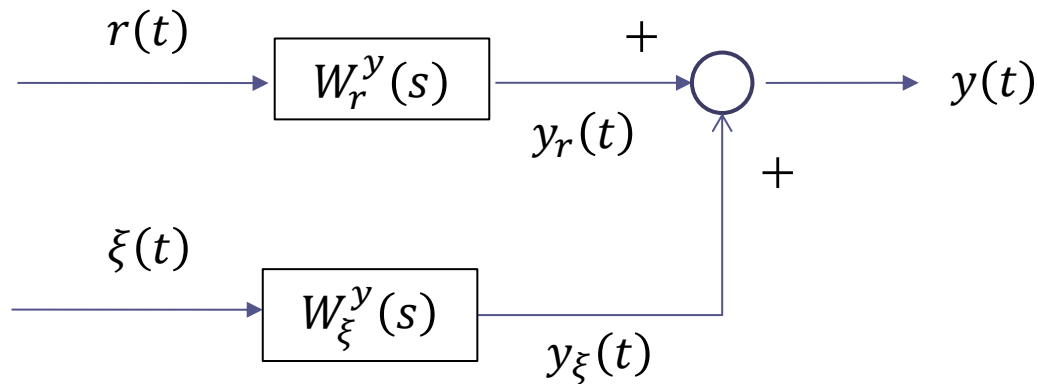
$$\Delta = 0.5$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 4.541 + 0.045 = 4.586$$

↓
Componente dovuta al disturbo

↓
Componente dovuta al set-point

Il principio di sovrapposizione degli effetti stabilisce come la risposta complessiva $y(t)$ sia la somma fra la risposta $y_r(t)$ dovuta al solo set point e la risposta $y_\xi(t)$ dovuta al solo disturbo



$$W_r^y(s) = \frac{\frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}}{1 + \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}} = \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10) + 20K_R} \stackrel{K_R = 9.9}{=} \frac{198}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}}{1 + \frac{20K_R}{(s+1)(s+2)(s+10)}} = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10) + 20K_R} \stackrel{K_R = 9.9}{=} \frac{20}{s^3 + 13s^2 + 32s + 218}$$

Ricaviamo per altra via il valore di regime dell'uscita, senza ricorrere alla formula preconfezionata ma basandoci unicamente sul T.F.R.G.

Valutiamo separatamente i contributi al valore di regime dell'uscita introdotti dal set-point e dal disturbo.

Contributo del set-point

Moltiplichiamo il guadagno statico $W_r^y(0)$ della FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita per l'ampiezza $R^* = 5$ del set-point

T.F.R.G.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5 \cdot W_r^y(0) = 5 \cdot 0.9083 = 4.541$$

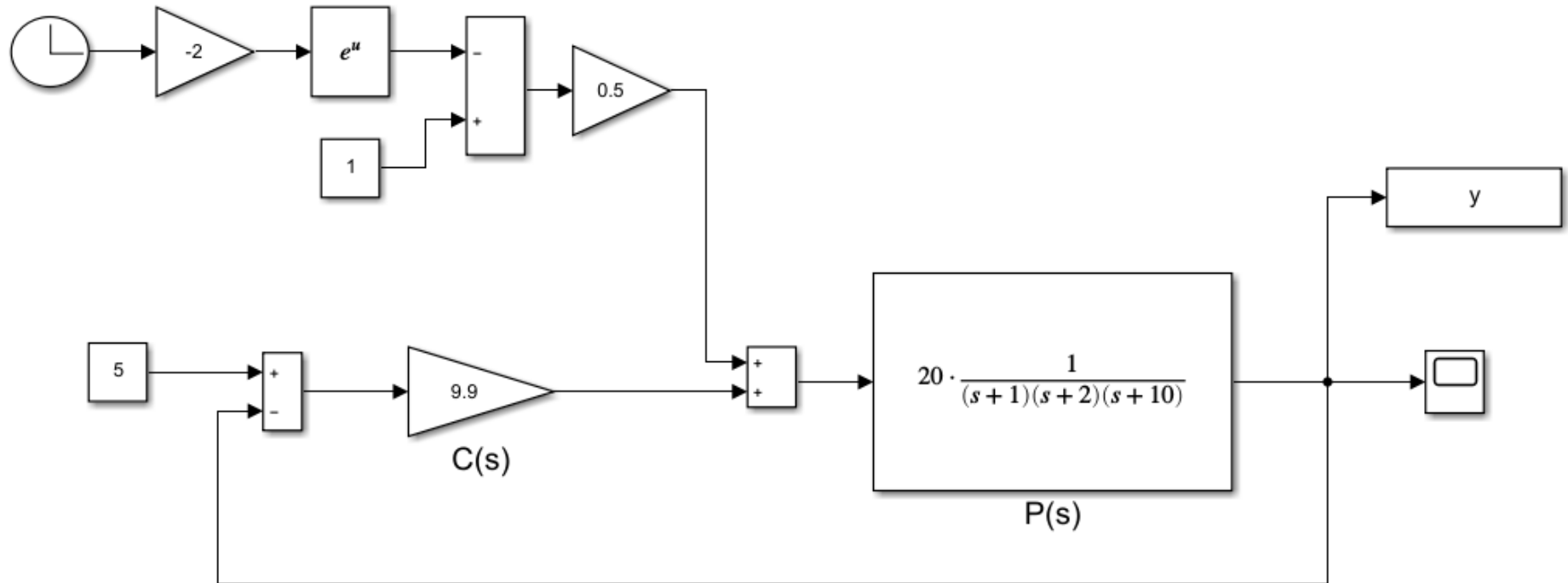
Contributo del disturbo

Moltiplichiamo il guadagno statico $W_\xi^y(0)$ della FdT a ciclo chiuso fra il disturbo e l'uscita per l'ampiezza $\Delta = 0.5$ del disturbo:

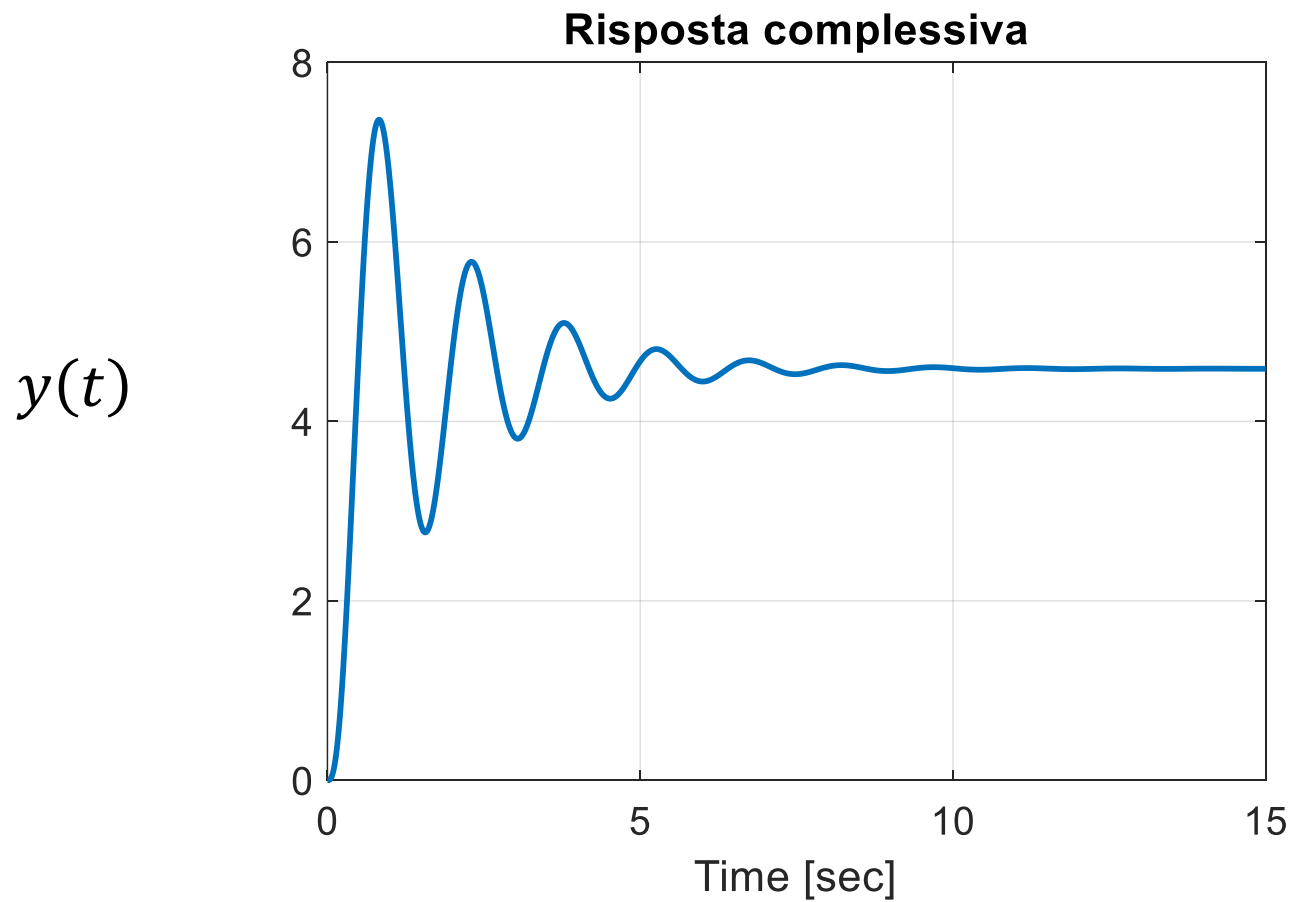
T.F.R.G.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_\xi(t) = 0.5 \cdot W_\xi^y(0) = 0.5 \cdot 0.091 = 0.045$$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti

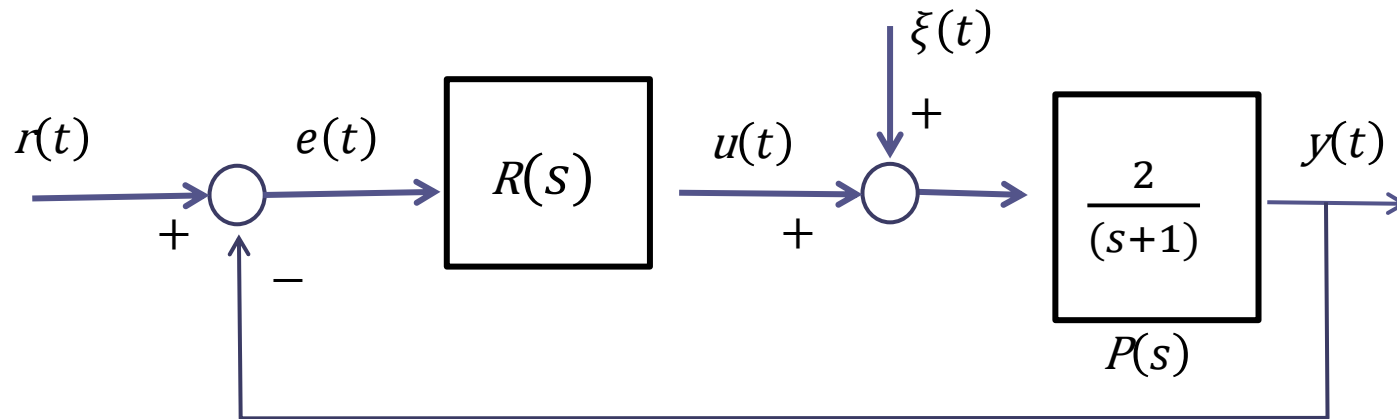


Uscita complessiva (in presenza sia del set-point che del disturbo)



Esempio

Si consideri il sistema di controllo in retroazione in Figura, con un processo del primo ordine asintoticamente stabile e un regolatore $R(s)$ da progettare



Le specifiche di controllo sono le seguenti

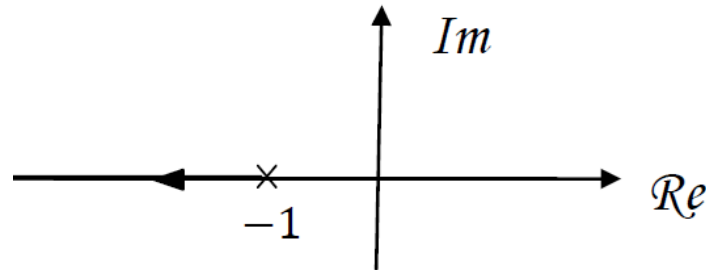
- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un **errore massimo del 2 %**
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al **95%**
- S3. Risposta ad un set point a gradino monotona esponenziale
- S4. Tempo di assestamento della risposta al gradino non superiore a **0.06** secondi

Le specifiche sul comportamento a regime sono **compatibili con le prestazioni di un sistema di controllo di tipo zero**. **Ipotizziamo** quindi l'impiego di un regolatore proporzionale $R(s) = K_R$

Valutiamo le relative proprietà di stabilità a ciclo chiuso.

L'analisi mediante LdR indica come il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile per qualunque valore, anche arbitrariamente grande, del guadagno K_R

$$L(s) = \frac{2}{s+1}$$



Le specifiche S1 ed S2 potranno quindi essere garantite da un valore di guadagno sufficientemente grande opportunamente scelto.

Per soddisfare la specifica S3 si deve fare in modo che i poli a ciclo chiuso siano tutti **reali negativi** e che non sia presente uno zero più in bassa frequenza rispetto a tutti i poli o a parte reale positiva.

Per soddisfare la specifica S4 si deve fare in modo che il polo a ciclo chiuso sia collocato **sufficientemente in alta frequenza** in modo che la costante di tempo associata sia sufficientemente piccola.

Abbiamo ora la **certezza** che un regolatore proporzionale, opportunamente tarato, risolve il problema di controllo.

Il sistema a ciclo chiuso è rappresentato dalle **FdT set-point uscita**

$$W_r^y(s) = \frac{2K_R}{s + 1 + 2K_R} = \frac{\mu_1}{1 + sT_1} \quad \mu_1 = W_r^y(0) = \frac{2K_R}{1 + 2K_R} \quad T_1 = \frac{1}{1 + 2K_R}$$

e **disturbo-uscita**

$$W_\xi^y(s) = \frac{2}{s + 1 + 2K_R} = \frac{\mu_2}{1 + sT_1} \quad \mu_2 = W_\xi^y(0) = \frac{2}{1 + 2K_R}$$

Polinomio caratteristico del sistema a ciclo chiuso con regolatore proporzionale

$$P_{car}(s) = s + 1 + 2K_R$$

Il polo p_{cc} a ciclo chiuso assume il seguente valore in dipendenza dal guadagno K_R

$$p_{cc} = -(1 + 2K_R)$$

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo dell'2%
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 95%

Le specifica **S1** corrisponde al soddisfacimento della relazione:

$$W_r^y(0) \geq 0.98 \quad \Rightarrow \quad \frac{2K_R}{1 + 2K_R} \geq 0.98 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 24.5$$

Le specifica **S2** corrisponde al soddisfacimento della relazione:

$$W_\xi^y(0) \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1 + 2K_R} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 19.5$$

Il vincolo più stringente deriva dalla specifica S1

E' consigliabile scegliere un valore incrementato di una certa percentuale per compensare possibili variazioni parametriche sfavorevoli

- S3. Risposta ad un set point a gradino monotona esponenziale
- S4. Tempo di assestamento della risposta al gradino non superiore a 0.06 secondi

La specifica S3 è soddisfatta da qualunque valore del guadagno K_R perché il polo a ciclo chiuso è sempre reale negativo

La valutazione della specifica S4 richiede l'impiego della relazione che lega il Tempo di assestamento della risposta al gradino con la costante di tempo del polo a ciclo chiuso. Poiché con un regolatore proporzionale abbiamo un **unico polo a ciclo chiuso**, la relazione da impiegare è:

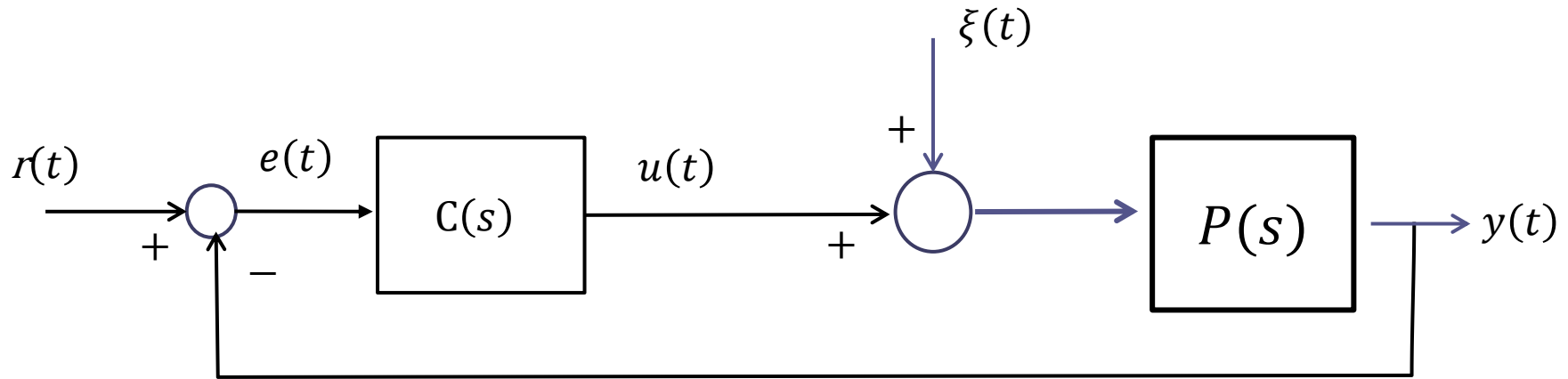
$$W(s) = \frac{\mu}{1 + Ts} \quad \Rightarrow \quad T_a = 4.6T < 0.06$$

La costante di tempo della FdT $W_r^y(s)$ a ciclo chiuso è $T = T_1 = \frac{1}{1+2K_R}$

$$4.6T_1 = \frac{4.6}{1 + 2K_R} \leq 0.06 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 37.8$$

L'esercizio è pertanto risolto mediante un controllore proporzionale $R(s) = K_R$ con guadagno $K_R \geq 37.8$

Sistemi di controllo di tipo uno



Lo schema in retroazione in Figura viene detto di **tipo 1** se **nel regolatore, oppure nel processo, è presente un polo nell'origine**

I due scenari sono equivalenti per quanto concerne la risposta al set-point, ma conducono a **comportamenti differenti per quanto concerne la risposta al disturbo**, e pertanto in tale ambito verranno trattati separatamente.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime in risposta ad un set-point costante $r(t) = R^*$
(con disturbo nullo)

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un set-point costante $r(t) = R^* = \text{cost.}$ vale, in assenza di disturbo ($\xi(t) = 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

Precisione statica

La formula sopraripotata vale unicamente nel caso in cui il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.

Il valore di regime dell'uscita coincide con il valore del set-point costante indipendentemente dai guadagni di regolatore e processo.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime in risposta ad un disturbo costante $\xi(t) = \Delta$

In un sistema di controllo di tipo 1 sottoposto ad un disturbo costante $\xi(t) = \Delta = \text{cost.}$ valgono, in assenza di set point, le seguenti proprietà:

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Se invece il polo in $s = 0$ è contenuto nel processo si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{\Delta}{\mu_C}$$

in cui:

$$\mu_C = C(0)$$

Guadagno statico del controllore

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore, il sistema di controllo è in grado di operare la **reiezione completa a regime di un disturbo costante**. Il valore di regime dell'uscita dovuto alla sola presenza del disturbo è pari a zero indipendentemente dall'ampiezza Δ del disturbo e dai guadagni di regolatore e processo

Se invece il polo in $s = 0$ è contenuto nel processo, il disturbo altera il valore di regime dell'uscita. L'entità di tale effetto indesiderato dipende dal solo guadagno statico μ_C del regolatore.

Aumentando il guadagno del controllore la precisione a regime migliora.

Sistemi di controllo di tipo uno

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di **set-point costante di ampiezza R^*** e **disturbo costante di ampiezza Δ**

Il **principio di sovrapposizione degli effetti** ci consente di affermare che in un sistema di controllo di tipo uno soggetto **simultaneamente** ad un set point costante di ampiezza R^* e ad un disturbo costante di ampiezza Δ il valore di regime dell'uscita sarà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^* + \frac{\Delta}{\mu_C}$$

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel processo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R^*$$

Se il polo in $s = 0$ è contenuto nel regolatore

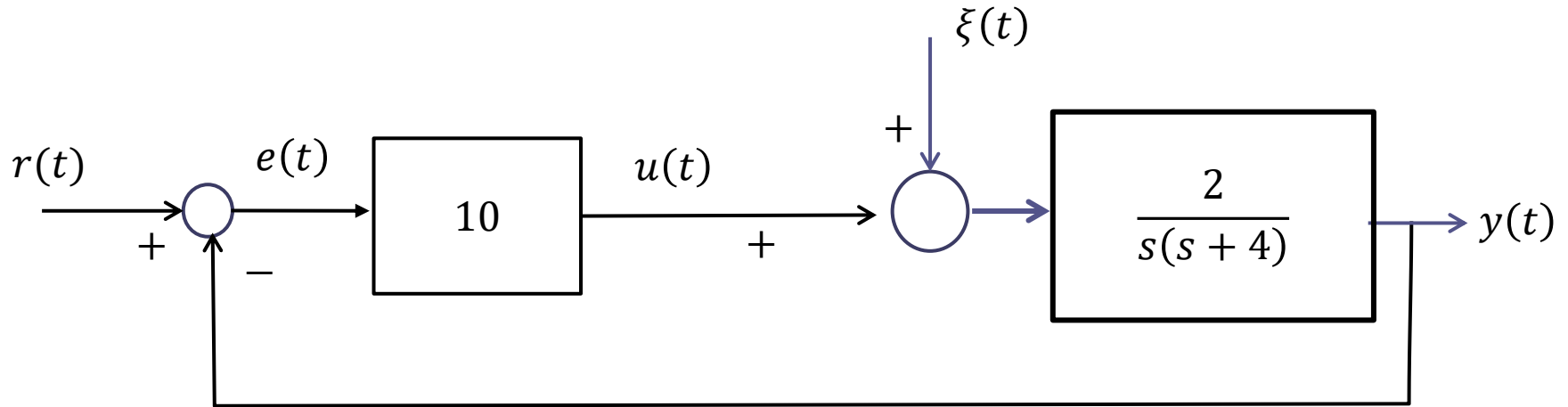
Tale relazione stabilisce una importante proprietà di **precisione statica robusta**

La relazione si conserva difatti indipendentemente dall'intervento di un disturbo costante di ampiezza sconosciuta, oltre che dai guadagni, e dalla struttura dinamica (poli e zeri), del regolatore e del processo

Essa è unicamente garantita dalla presenza del polo in $s = 0$ **nel regolatore** (e dalla **concomitante stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo**).

E' uno dei principali motivi della ampia diffusione dei regolatori PI.

Esempio



Dato il sistema di controllo in figura, valutare il comportamento di regime dell'uscita in presenza di un set point costante $r(t) = 5$ e di un disturbo costante $\xi(t) = 0.5$

Verifichiamo preliminarmente la **stabilità a ciclo chiuso** del sistema di controllo

$$p_{car} = s(s + 4) + 20 = s^2 + 4s + 20$$



(regola di cartesio)

È un sistema di controllo di **tipo 1** in cui **il polo nell'origine è contenuto nel processo**.

In base alle proprietà viste, la **componente della uscita dovuta al set-point** converge al valore del set point.

$$r(t) = 5$$

$$\xi(t) = 0$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5$$

Poiché il polo nell'origine è presente nel processo, la **componente della uscita dovuta al disturbo** converge al valore costante $\frac{\Delta}{\mu_C}$, in cui $\Delta = 0.5$ è l'ampiezza del disturbo e $\mu_C = 10$ è il guadagno statico del controllore

$$r(t) = 0$$

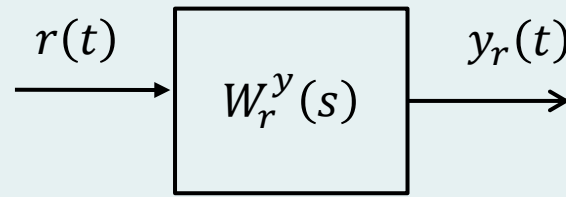
$$\xi(t) = 0.5$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_\xi(t) = \frac{\Delta}{\mu_C} = 0.05$$

Complessivamente quindi, deduciamo sulla base del principio di sovrapposizione degli effetti che la variabile di uscita tenderà al valore 5.05

Le conclusioni tratte in merito al comportamento di regime dell'uscita potevano essere ricavate per via differente, senza ricorrere alle formule ma bensì applicando il T.F.R.G., che stabilisce come **il valore di regime della risposta al gradino di una FdT asintoticamente stabile sia pari al prodotto fra il suo guadagno statico e l'ampiezza del gradino in ingresso**



$$\begin{aligned} r(t) &= 5 \\ \xi(t) &= 0 \end{aligned}$$



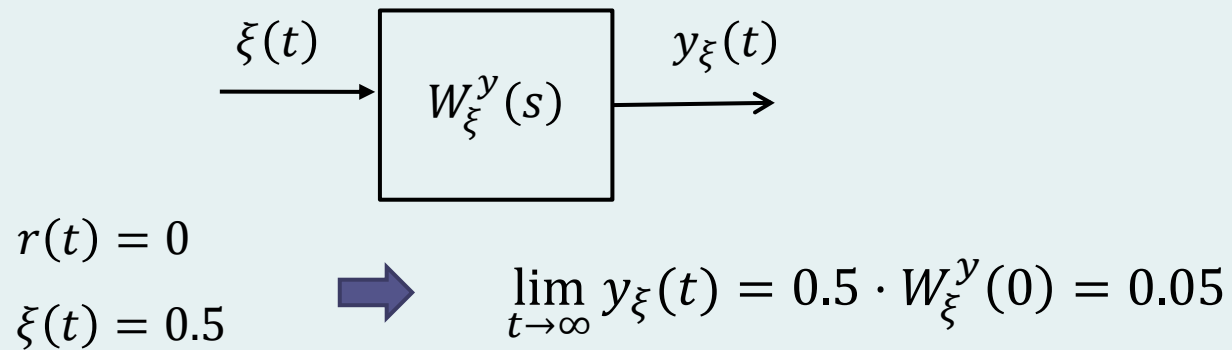
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = 5 \cdot W_r^y(0) = 5$$

FdT a ciclo chiuso fra set-point e uscita

$$W_r^y(s) = \frac{20}{1 + \frac{20}{s(s+4)}} = \frac{20}{s(s+4) + 20}$$

Guadagno statico

$$W_r^y(0) = 1$$

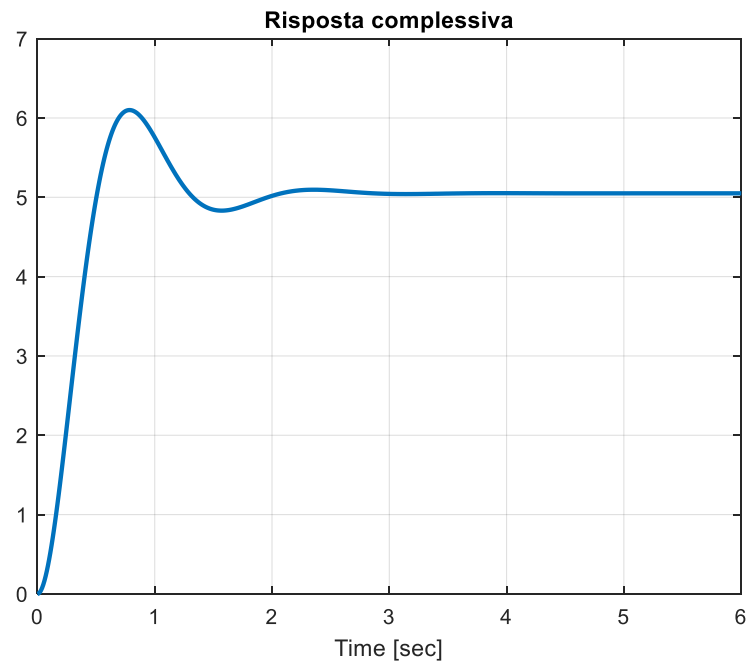
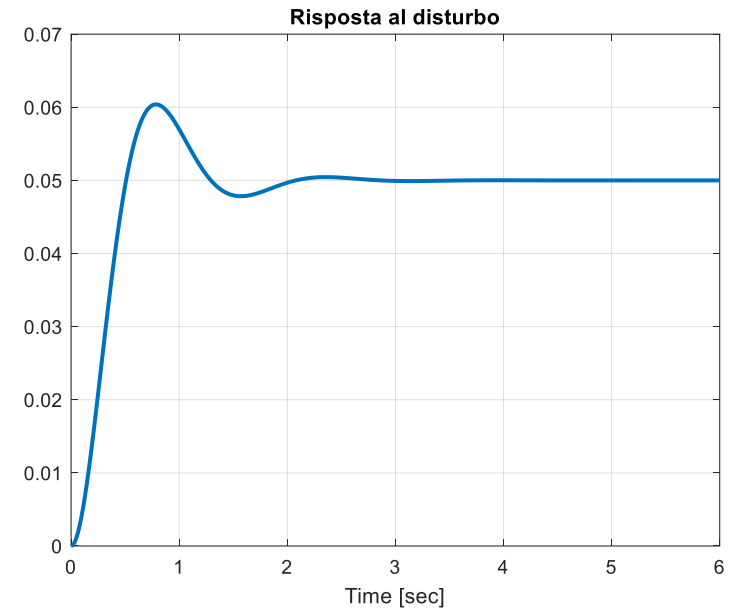
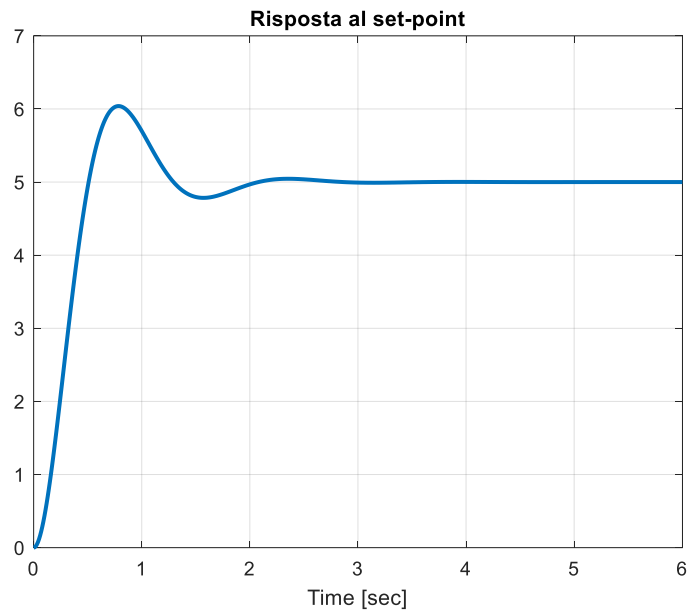


FdT a ciclo chiuso fra disturbo e uscita

$$W_{\xi}^y(s) = \frac{\frac{2}{s(s+4)}}{1 + \frac{20}{s(s+4)}} = \frac{2}{s(s+4) + 20}$$

Guadagno statico

$$W_{\xi}^y(0) = \frac{1}{\mu_c} = 0.1$$

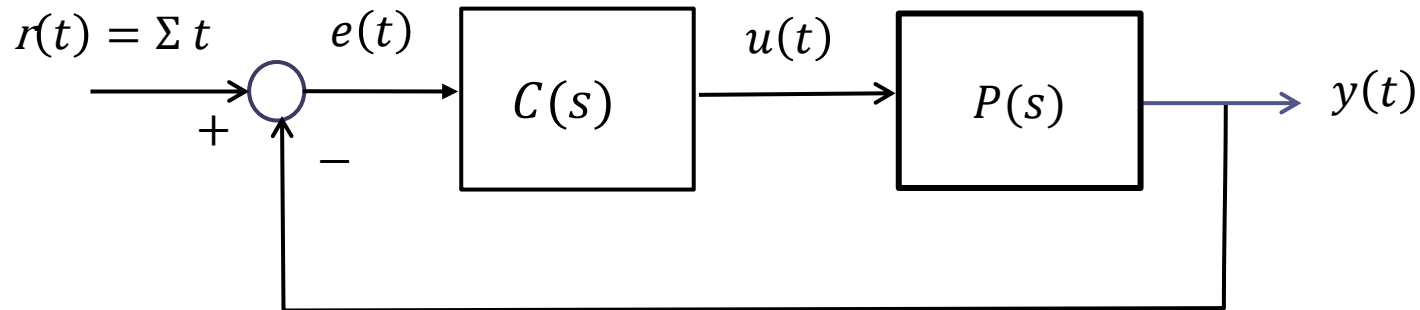


Sistemi di controllo di tipo 1 con **set-point a rampa**

Consideriamo il comportamento di regime di un sistema di controllo di **tipo uno** soggetto ad un **set-point a rampa**

$$r(t) = \Sigma t$$

in assenza di **disturbo**



L'uscita del sistema a ciclo chiuso tenderà a divergere per t che tende ad infinito, poiché anche il set-point tende a divergere. Quindi, per l'analisi del comportamento a regime **non possiamo applicare il teorema del valore finale all'uscita.**

Sistemi di controllo di tipo uno con set-point a rampa

Comportamento a regime dell'uscita in corrispondenza di un **set-point a rampa**
 $r(t) = \Sigma t$ (in assenza di disturbi).

Si dimostra che **il segnale di errore $e(t) = r(t) - y(t)$ tende asintoticamente ad un valore costante E^***

Tale proprietà implica che **l'evoluzione di regime dell'uscita $y(t) = r(t) - e(t)$** coincide con il set-point a meno di un offset costante

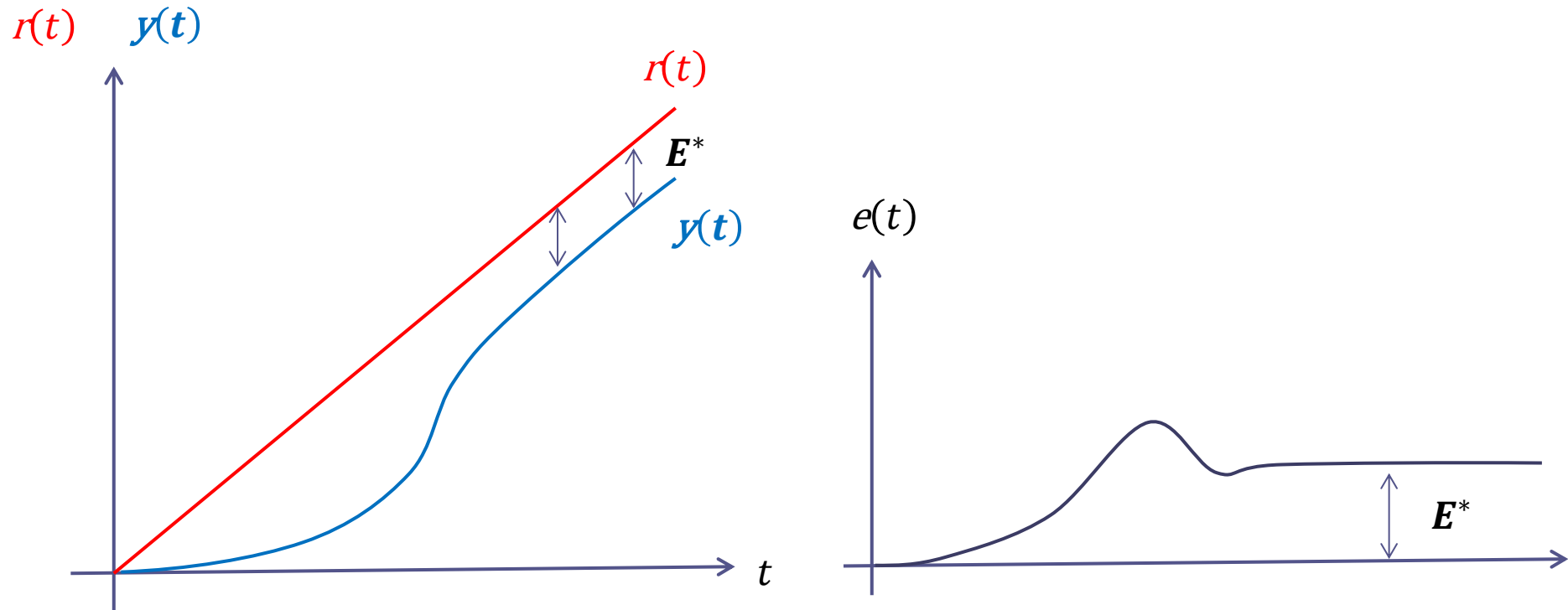
$$y^{regime}(t) = r(t) - E^* = \Sigma t - E^*$$

Il valore E^* può essere determinato ricorrendo alla seguente formula:

$$E^* = \frac{\Sigma}{\mu_C \mu_P}$$

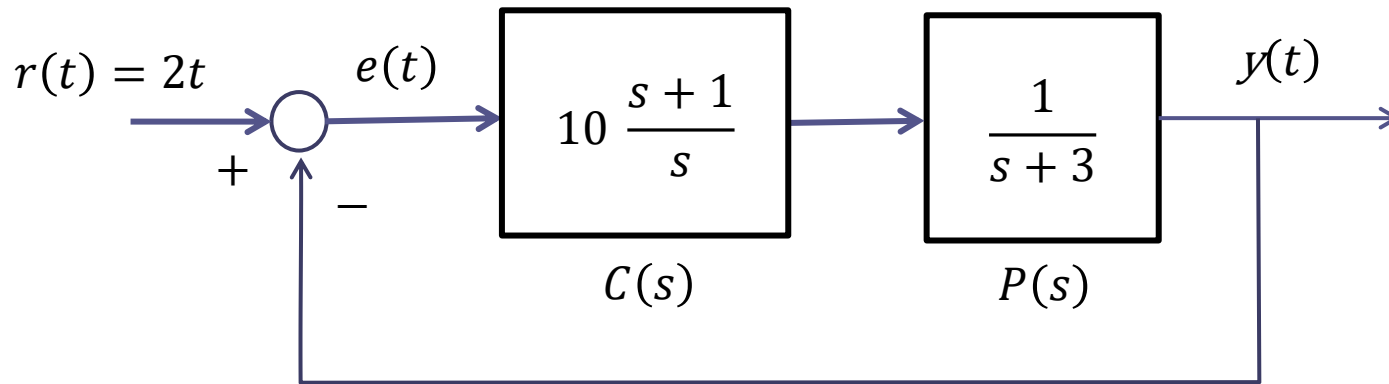
in cui μ_C è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del controllore e μ_P è il guadagno statico (eventualmente generalizzato) del processo.

Evoluzioni **qualitative** del set-point $r(t)$, uscita $y(t)$, ed errore $e(t) = r(t) - y(t)$



Si dimostra che **il segnale di errore tende asintoticamente ad un valore costante**

Mostriamo la correttezza della relazione fornita nell'ambito di un caso concreto



Verifichiamo preliminarmente la stabilità a ciclo chiuso.

$$P_{car}(s) = s(s+3) + 10(s+1) = s^2 + 13s + 10$$

Un polinomio di secondo grado avente tutti i coefficienti positivi ha tutte le radici a parte reale negativa, quindi il sistema di controllo è as. stabile a ciclo chiuso

Mostriamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = E^* = cost$$

Applichiamo il teorema del valore finale al segnale di errore $e(t)$

$$\begin{aligned} W_r^e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} & \quad \longrightarrow \quad E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} \cdot R(s) \\ & = \frac{1}{1 + 10 \frac{s+1}{s} \frac{1}{s+3}} \cdot R(s) \\ & = \frac{s(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot R(s) \\ & = \frac{s(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot \frac{2}{s^2} \\ & = \frac{2(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$E(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

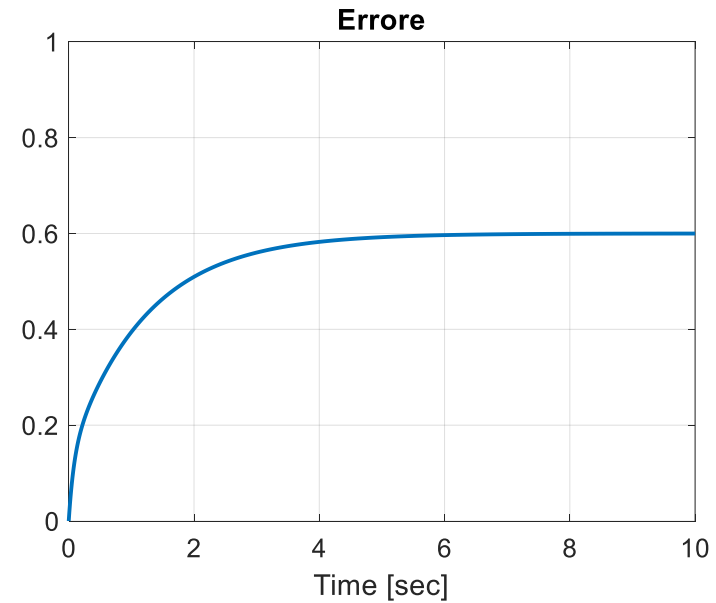
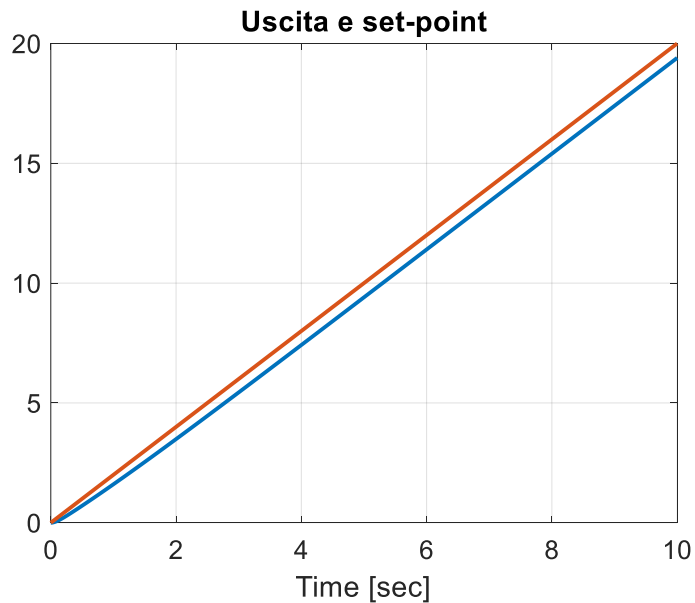
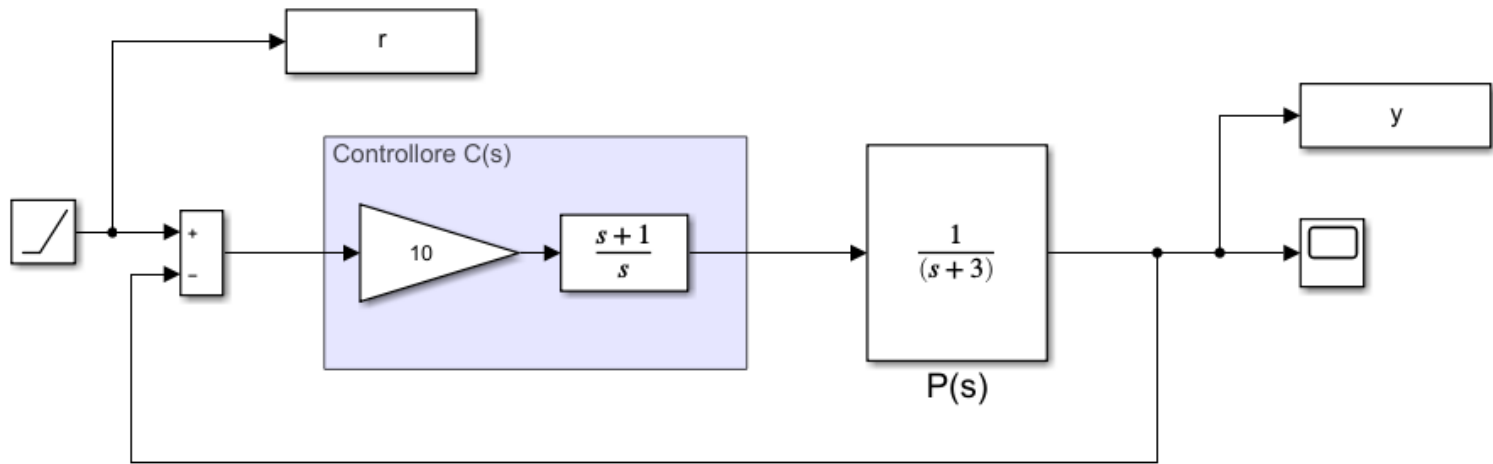
$E(s)$ ha come poli le radici del polinomio caratteristico $s(s+3) + 10(s+1)$, che abbiamo visto essere a parte reale negativa, più un polo semplice in $s = 0$.

E' quindi soddisfatta l'ipotesi di applicabilità del teorema del valore finale, che garantisce che il segnale $e(t)$ converge verso un valore finito, e che tale valore è

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = [sE(s)]_{s=0} = \left[\frac{2(s+3)}{s(s+3) + 10(s+1)} \right]_{s=0} = \frac{6}{10} = 0.6 = E^*$$

$$y^{regime}(t) = r(t) - E^* = 2t - 0.6$$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti



Ricordiamo il seguente risultato, che fu dimostrato in chiusura dell'argomento
«**Funzioni di trasferimento ed algebra degli schemi a blocchi**»

CNES per la precisione statica

In un sistema di controllo è garantita la precisione statica **se e solo se il sistema di controllo è asintoticamente stabile** ed in aggiunta **il controllore, oppure il processo, possiede un polo in $s = 0$**

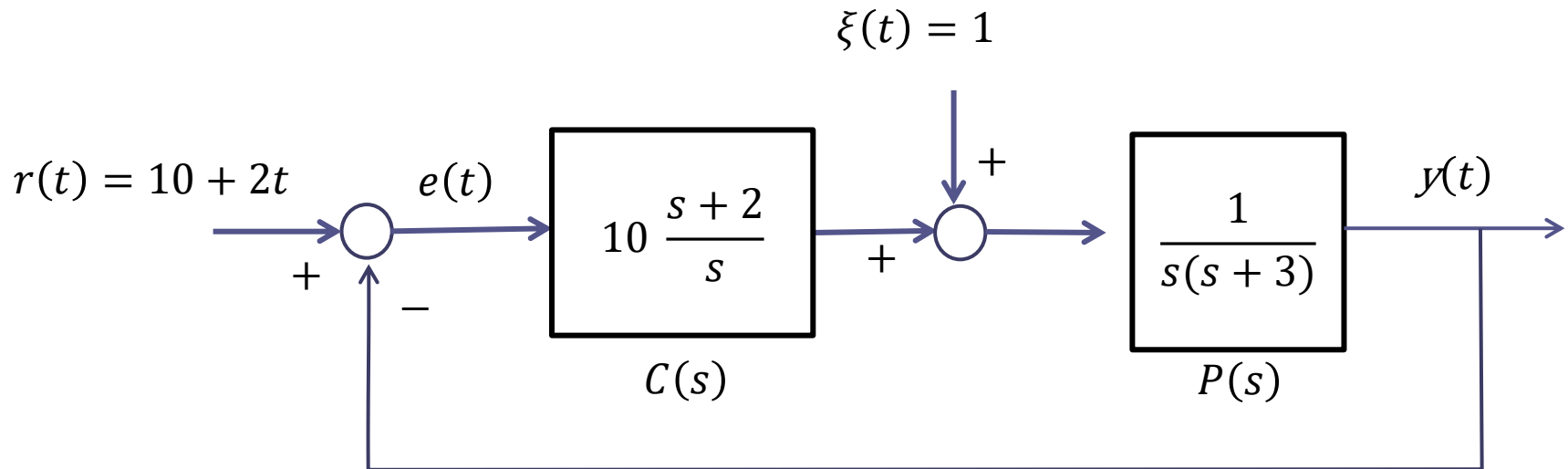
Con un procedimento sostanzialmente analogo, si dimostra il seguente risultato

CNES per la reiezione di un disturbo costante

In un sistema di controllo è garantita la reiezione di un disturbo costante **se e solo se il sistema di controllo è asintoticamente stabile** ed in aggiunta **il controllore possiede un polo in $s = 0$**

Esercizio

Analizzare l'evoluzione di regime della variabile di uscita nel seguente sistema di controllo



Il passo preliminare è **verificare la stabilità a ciclo chiuso**.

$$P_{car}(s) = s^2(s + 3) + 10(s + 2) = s^3 + 3s^2 + 10s + 20$$

Trattandosi di un polinomio di terzo grado, per verificare se si tratti o meno di un polinomio di Hurwitz possiamo applicare la condizione sui coefficienti impiegata più volte in esempi precedenti

$$3 \cdot 10 > 20$$



Sulla base della CNES per la precisione statica e della CNES per la reiezione di un disturbo costante possiamo pertanto concludere, senza nessun calcolo, che

$$r(t) = 10 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10$$

Nelle due slides successive queste relazioni sono dedotte applicando il TFRG

$$\xi(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Resta da determinarsi il comportamento di regime dell'uscita quando $r(t) = 2t$

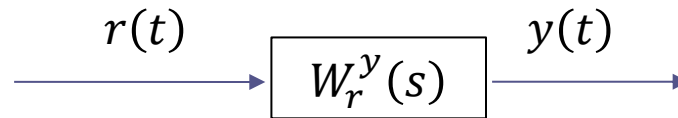
Valutiamo le espressioni delle FdT a ciclo chiuso e dei relativi guadagni statici:

$$W_r^y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{10(s+2)}{s^2(s+3) + 10(s+2)} \quad W_r^y(0) = 1$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+3)}}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{s}{s^2(s+3) + 10(s+2)} \quad W_\xi^y(0) = 0$$

$$W_r^e(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + 10 \frac{s+2}{s} \cdot \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{s^2(s+3)}{s^2(s+3) + 10(s+2)}$$

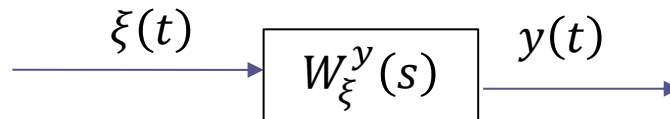
$$r(t) = 10$$



Poiché $W_r^y(s)$ è una FdT asintoticamente stabile, il valore di regime della risposta al gradino è costante e pari al prodotto fra l'ampiezza del gradino in ingresso ed il guadagno statico $W_r^y(0)$ della FdT

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 10 \cdot W_r^y(0) = 10 \cdot 1 = 10$$

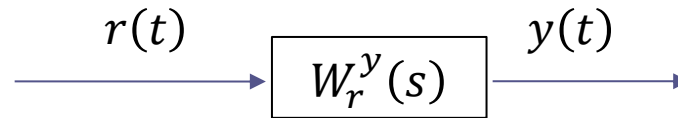
$$\xi(t) = 1$$



Poiché $W_\xi^y(s)$ è una FdT asintoticamente stabile, il valore di regime della risposta al gradino è costante e pari al prodotto fra l'ampiezza del gradino in ingresso ed il guadagno statico $W_\xi^y(0)$ della FdT

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \cdot W_\xi^y(0) = 1 \cdot 0 = 0$$

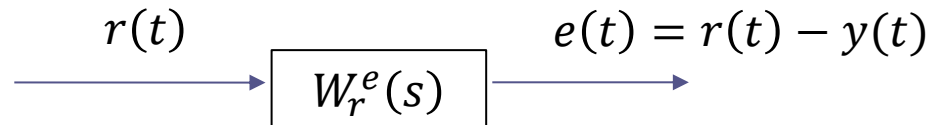
$$r(t) = 2t$$



Il TFRG non è applicabile in quanto il segnale di ingresso al sistema non è un segnale costante. Procediamo pertanto applicando il teorema del valore finale.

Trasformata di Laplace dell'uscita:
$$Y(s) = W_r^y(s)R(s) = \frac{10(s+2)}{s^2(s+3)+10(s+2)} \cdot \frac{2}{s^2}$$

La $Y(s)$ **non soddisfa** l'ipotesi di applicabilità del Teorema del valore finale in quanto ha un polo doppio in $s = 0$. Quindi $y(t)$ non ammette un limite finito. Valutiamo se invece il **segnale di errore** tende ad un limite finito.



Trasformata di Laplace dell'errore:

$$E(s) = W_r^e(s)R(s) = \frac{s^2(s+3)}{s^2(s+3)+10(s+2)} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{2(s+3)}{s^2(s+3)+10(s+2)}$$

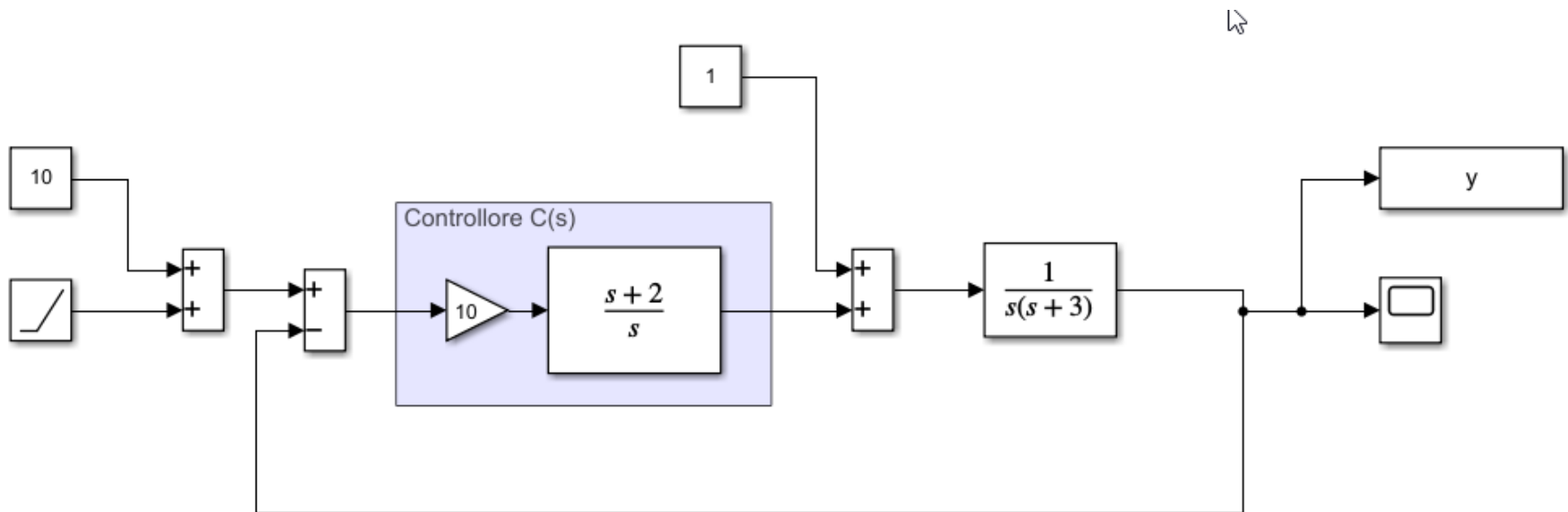
$E(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa. Il valore di regime del segnale di errore è pertanto pari a zero (v. slides trasformata di Laplace)

Se il segnale di errore tende asintoticamente a zero ne consegue che $y_{regime}(t) = 2t$

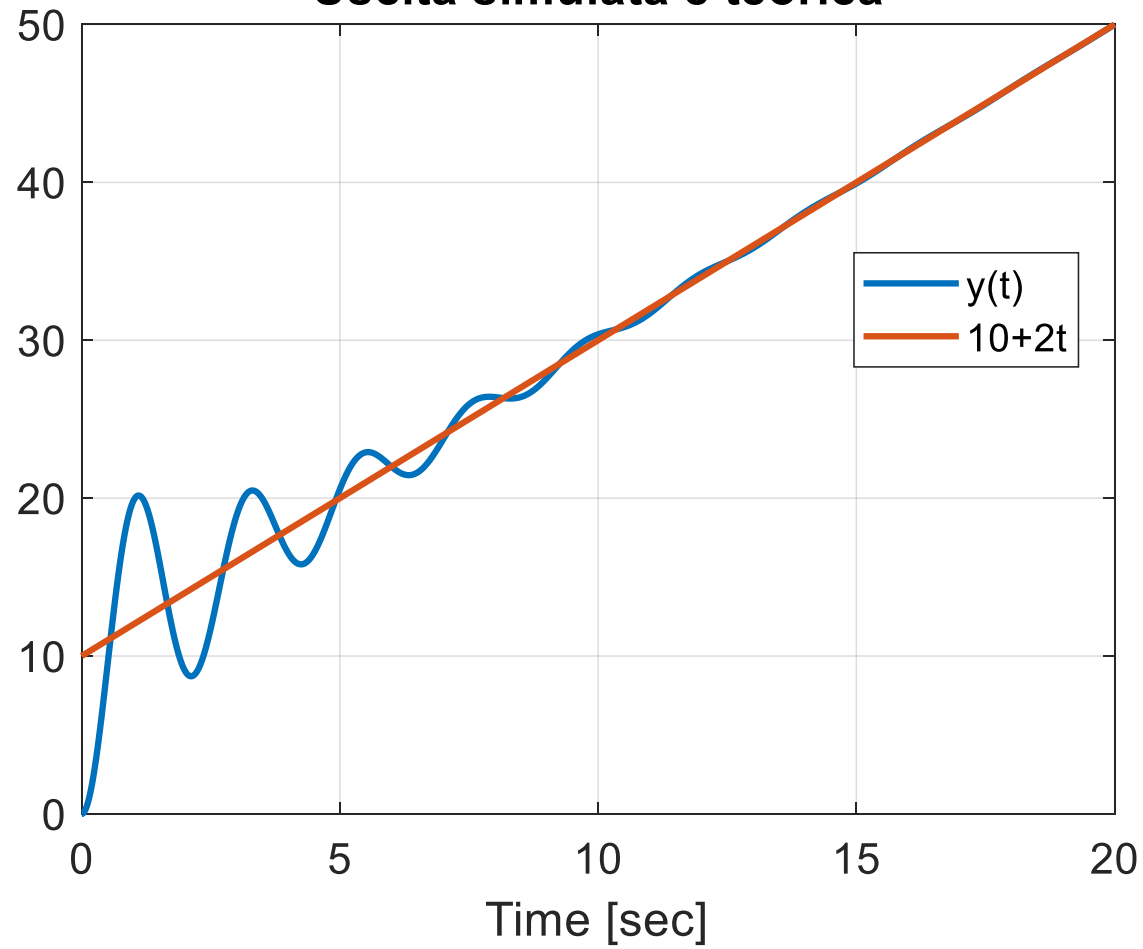
Complessivamente, l'evoluzione di regime dell'uscita nel sistema di controllo oggetto del presente esempio sarà pertanto **sovrapposta a quella del set point**

$$y_{regime}(t) = 10 + 2t$$

Verifichiamo mediante simulazione dinamica i risultati ottenuti



Uscita simulata e teorica



Sistemi di controllo di **tipo due** con **set-point a rampa**

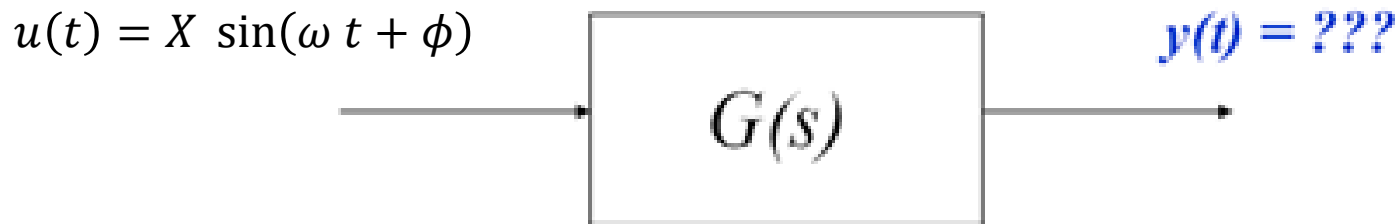
IL risultato ricavato nel precedente esempio ha validità più generale:
in un sistema di controllo di tipo 2 soggetto ad un **set-point a rampa**
 $r(t) = \Sigma t$, il segnale di errore $e(t) = r(t) - y(t)$ tende asintoticamente a
zero.

Tale proprietà implica che **l'evoluzione di regime dell'uscita** $y(t) = r(t) - e(t)$
coincide con il set-point

$$y^{regime}(t) = r(t) = \Sigma t$$

Analisi armonica

L'**analisi armonica** di un sistema dinamico consiste nello studio della risposta a transitorio esaurito quando in ingresso ad un sistema **asintoticamente stabile** viene applicata un'onda sinusoidale avente una generica pulsazione ω .

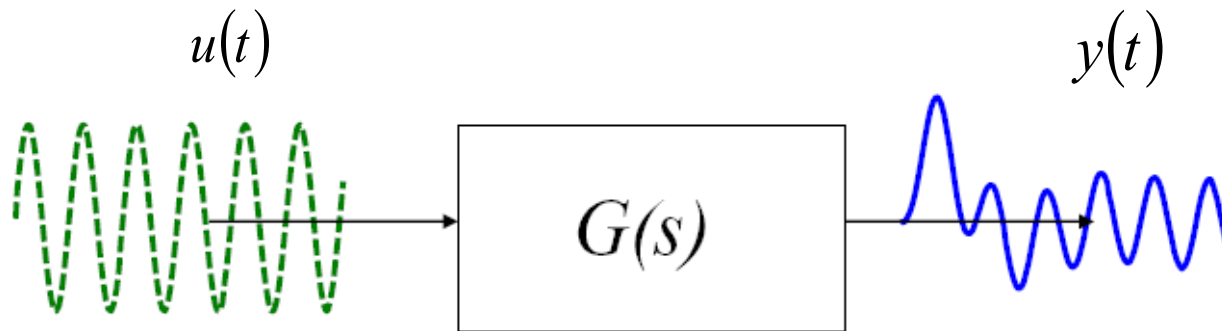


Per sistemi dinamici LTI, l'analisi della risposta a regime si basa sulla **funzione di risposta armonica (F.R.A.)**

La F.R.A. è una funzione a valori complessi che si calcola a partire dalla $G(s)$ operando la **sostituzione $s=j\omega$**

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

RISPOSTA ARMONICA



$G(s)$ asintoticamente stabile

Se si applica in ingresso ad un sistema LTI asintoticamente stabile un segnale di ingresso sinusoidale con pulsazione ω^* , una volta esaurito il transitorio anche l'uscita evolverà nel tempo in maniera sinusoidale, con la medesima pulsazione ω^* del segnale di ingresso ma con **diversa ampiezza e fase**.

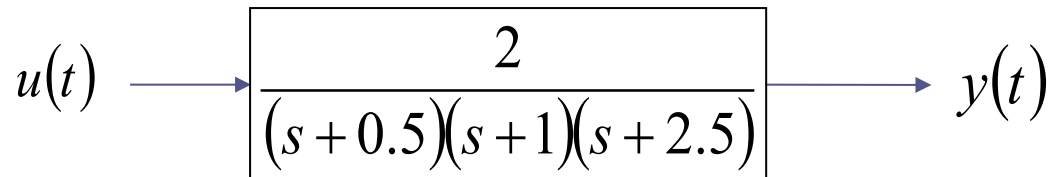
$$u(t) = X \cos(\omega^* t + \phi)$$

$$y_{regime}(t) = X |G(j\omega^*)| \cos(\omega^* t + \phi + \angle G(j\omega^*))$$

Stessa frequenza, diversa ampiezza e diversa fase

Generalizzabile a somme di sinusoidi in ingresso a diversa frequenza applicando il principio di sovrapposizione degli effetti

Esempio



$$G(s) = \frac{2}{(s+0.5)(s+1)(s+2.5)}$$

asintoticamente stabile

$$u(t) = 2 \cos(3t) \quad X = 2 \quad \omega^* = 3 \quad \phi = 0$$

$$y_{regime}(t) = 2 \cdot |G(j3)| \cos(3t + \angle G(j3))$$

$$G(j3) = \frac{2}{(j3+0.5)(j3+1)(j3+2.5)}$$

E' un numero complesso del quale si può valutare il modulo $|G(j3)|$ e la fase $\angle G(j3)$

Operativamente, leggiamo il modulo $|G(j3)|$ e la fase $\angle G(j3)$ dai **Diagrammi di Bode** della FdT $G(s)$

Rappresentazione grafica di funzioni a valori complessi

$$F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + j I(\omega)$$

$$M(\omega) = |F(\omega)| \quad \text{Modulo}$$

$$R(\omega)$$

Parte reale

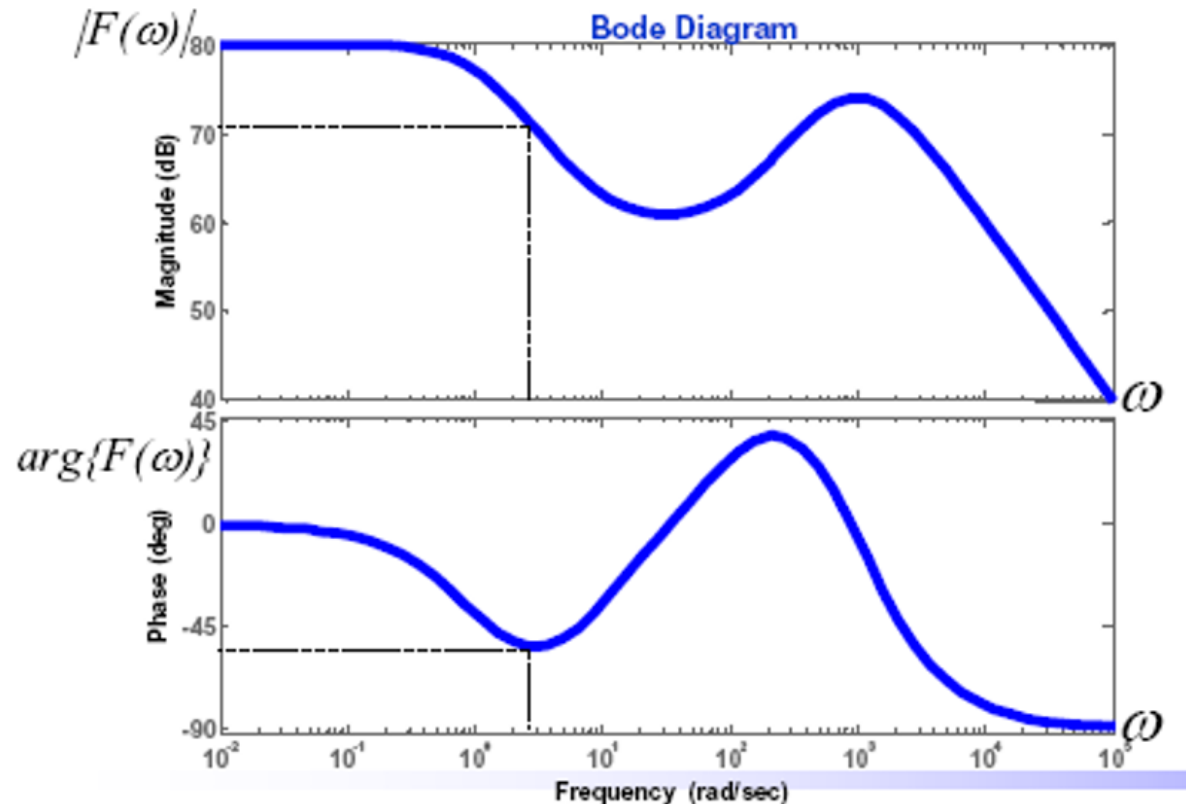
$$\varphi(\omega) = \angle F(\omega) \quad \text{Fase}$$

$$I(\omega)$$

Parte immaginaria

Diagrammi di Bode

Il modulo e la fase della F.R.A. sono plottati in funzione della frequenza in due diagrammi distinti (diagramma del modulo e diagramma della fase)



Si presti attenzione al fatto che i diagrammi di Bode dei moduli riportano in ordinata il valore di $M(\omega)$ **espresso in dB**

$$M_{db}(\omega) = 20 \log_{10} M(\omega)$$

$$M(\omega) = 10^{\frac{M_{db}(\omega)}{20}}$$

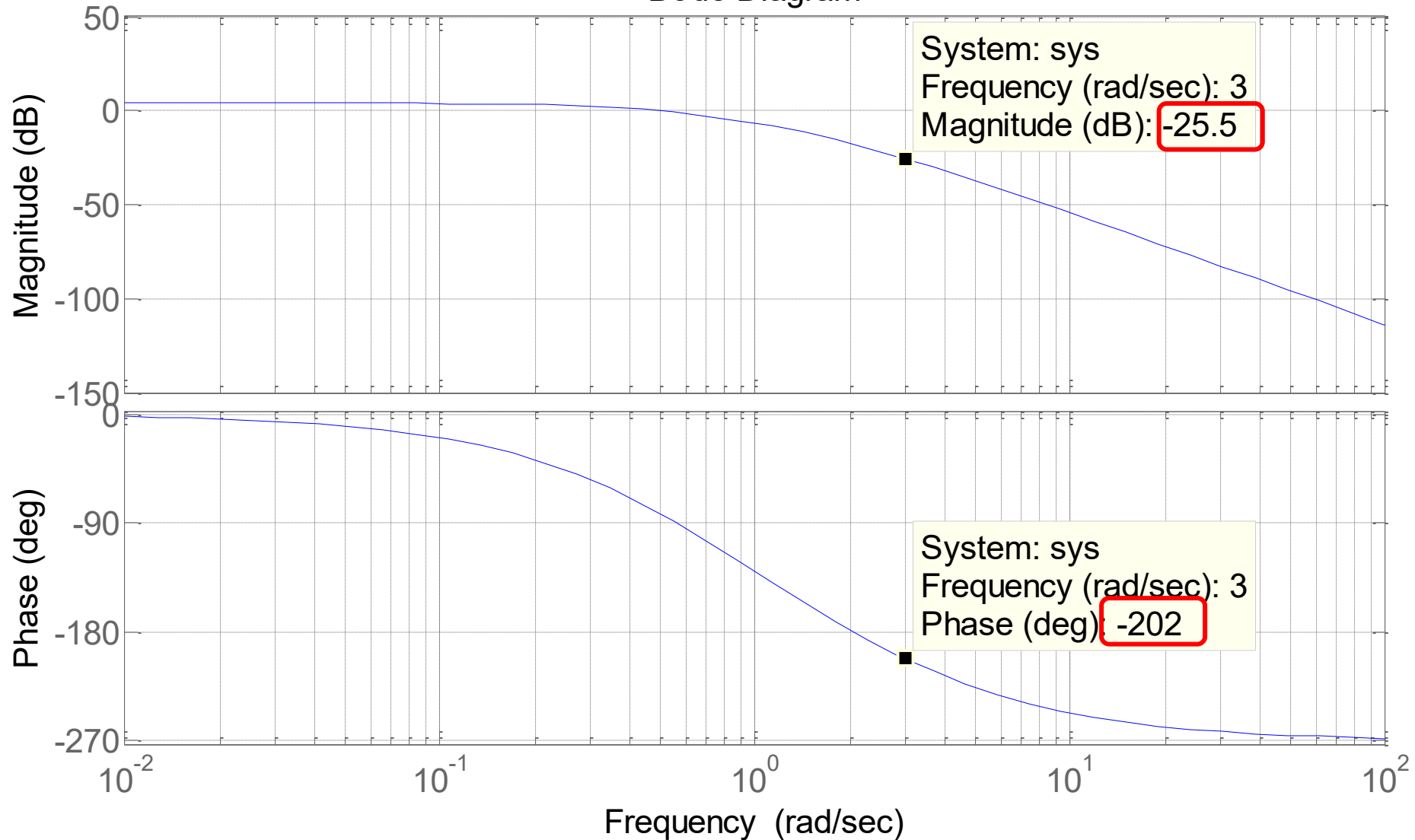
Valore naturale **Valore in dB**

M	M_{db}
0.01	-40
0.1	-20
1	0
10	20
100	40

```
numF=2;  
denF=poly([-0.5 -1 -2.5]);  
bode(numF,denF),grid
```

$$G(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 0.5)(j\omega + 1)(j\omega + 2.5)}$$

Bode Diagram



Il modulo, espresso in dB nel diagramma, deve essere convertito nel valore naturale

$$M_{db} = 20 \log_{10} M \quad \Rightarrow \quad M = 10^{\frac{M_{db}}{20}}$$

$$|G(j3)|_{db} \cong -25.5db \quad \Rightarrow \quad |G(j3)| = 10^{\frac{|G(j3)|_{db}}{20}} \cong 10^{-\frac{25.5}{20}} \cong 0.053$$

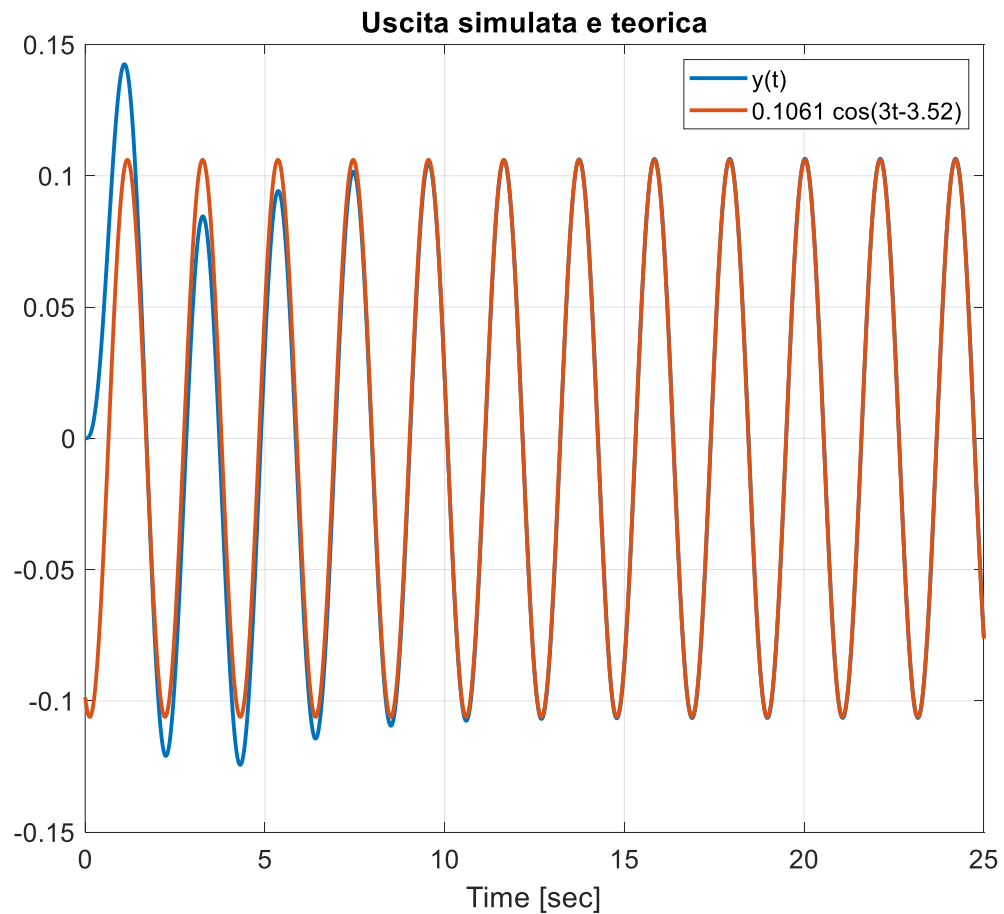
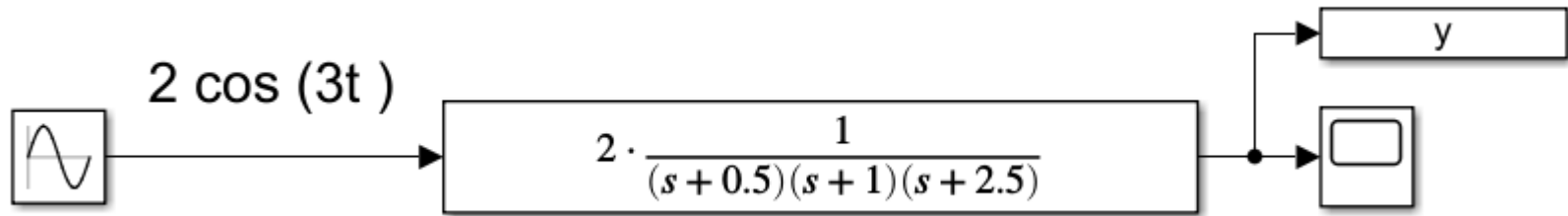
Convertiamo la fase da gradi in radianti

$$\angle G(j3) = -202^\circ = -202^\circ \frac{2\pi}{360^\circ} \cong -3.52rad$$

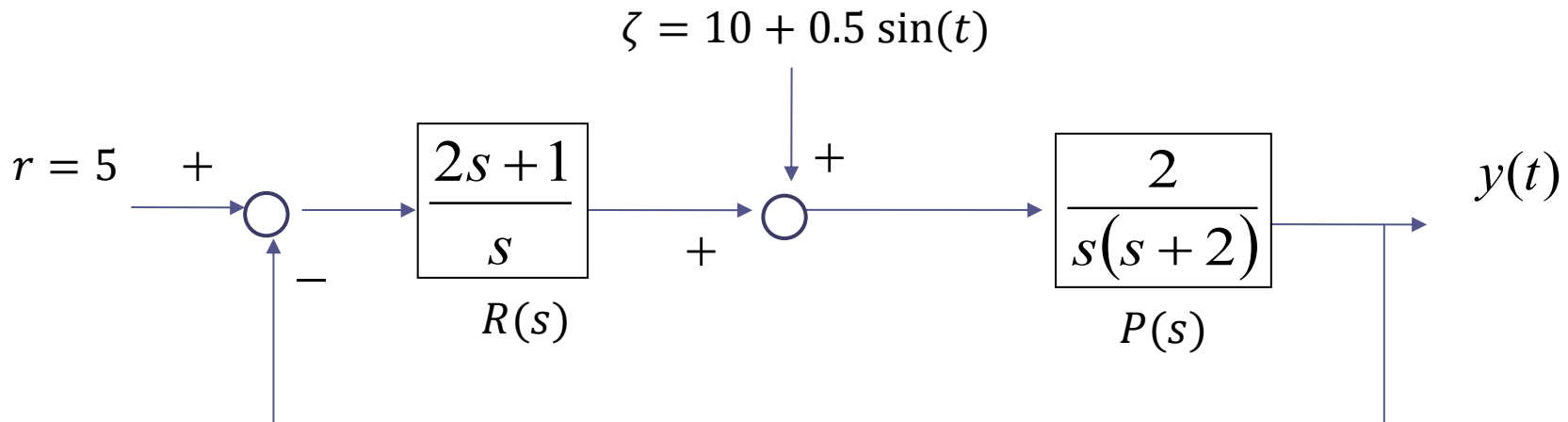
Espressione dell'uscita

$$y_{regime}(t) = 2 |G(j3)| \cos(3t + \angle G(j3))$$

$$y_{regime}(t) = 2 \cdot 0.053 \cdot \cos(3t - 3.52) = 0.1061 \cos(3t - 3.52)$$



Esempio Determinare l'evoluzione di regime dell'uscita



Il polinomio caratteristico è $P_{car}(s) = s^2(s + 2) + 2(2s + 1) = s^3 + 2s^2 + 4s + 2$

Il sistema a ciclo chiuso è pertanto asintoticamente stabile sia esternamente [si ha infatti: $2 \cdot 4 > 2$] che (per l'assenza di cancellazioni illecite) internamente

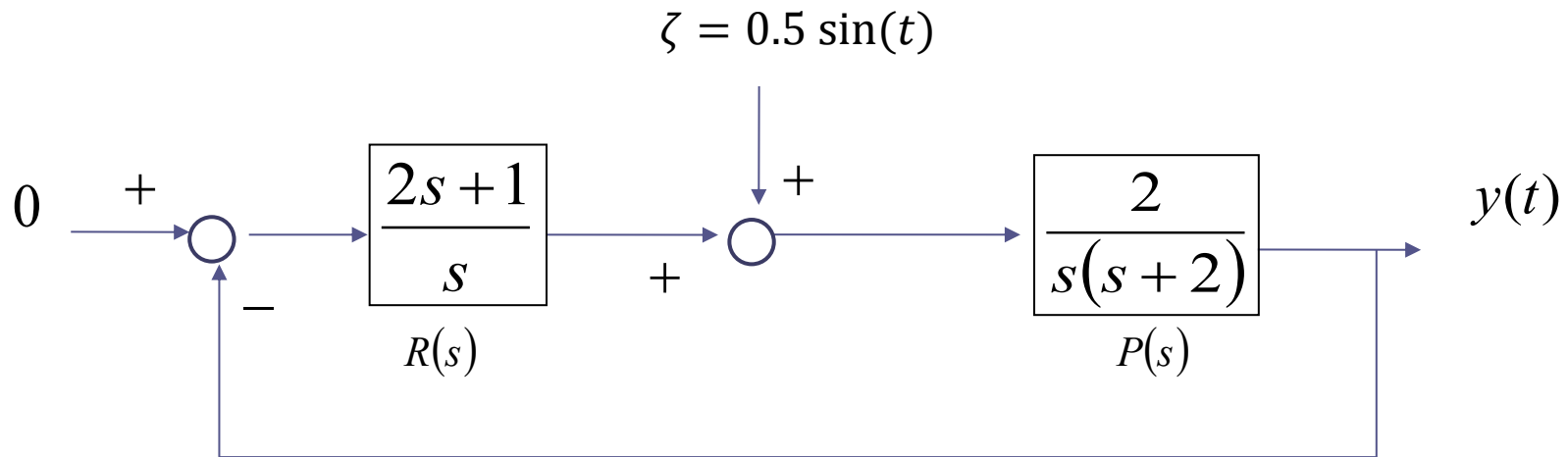
Calcoliamo il valore di regime dell'uscita associata al set point. La **CNES per la precisione statica** garantisce che:

$$y(t) \rightarrow 5$$

Calcoliamo il valore di regime dell'uscita associata alla componente costante del disturbo. **La CNES per la reiezione di un disturbo costante** garantisce che:

$$y(t) \rightarrow 0$$

Per quanto riguarda la componente sinusoidale del disturbo, facciamo riferimento al sistema semplificato



equivalente a $0.5 \sin(t) \longrightarrow \boxed{W_{\zeta}^y(s)} \longrightarrow y(t)$

$$W_{\zeta}^y(s) = \frac{P(s)}{1+R(s)P(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+2)}}{1 + \frac{(2s+1) \cdot 2}{s \cdot s(s+2)}} = \frac{2s}{s^2(s+2) + 2(2s+1)} = \frac{2s}{s^3 + 2s^2 + 4s + 2}$$

$$y_{regime}(t) = 0.5 \left| W_{\zeta}^y(j1) \right| \sin \left(t + \angle W_{\zeta}^y(j1) \right)$$

Per semplicità ci limitiamo a valutare soltanto **l'ampiezza**

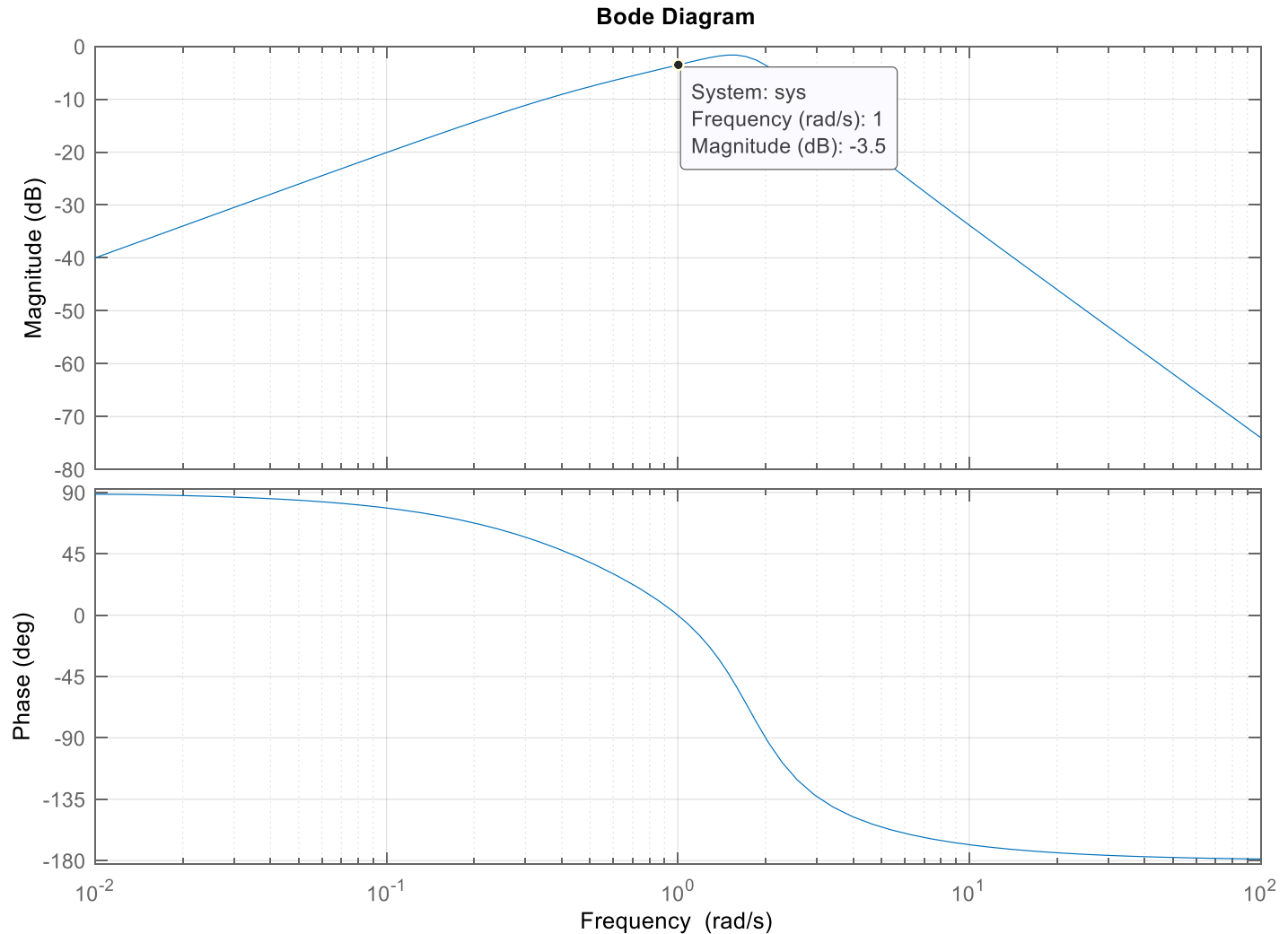
```
numF=[2 0];
denF=[1 2 4 2];
bode(numF,denF),grid
```

Valutiamo il diagramma di Bode del **modulo** di $W_\zeta^y(j\omega)$ alla pulsazione $\omega=1$ rad/s del disturbo

$$W_\zeta^y(j\omega)$$

$$\left|W_\zeta^y(j\omega)\right|_{dB}$$

$$\angle W_\zeta^y(j\omega)$$



Il modulo, espresso in dB nel diagramma, deve essere convertito nel valore naturale

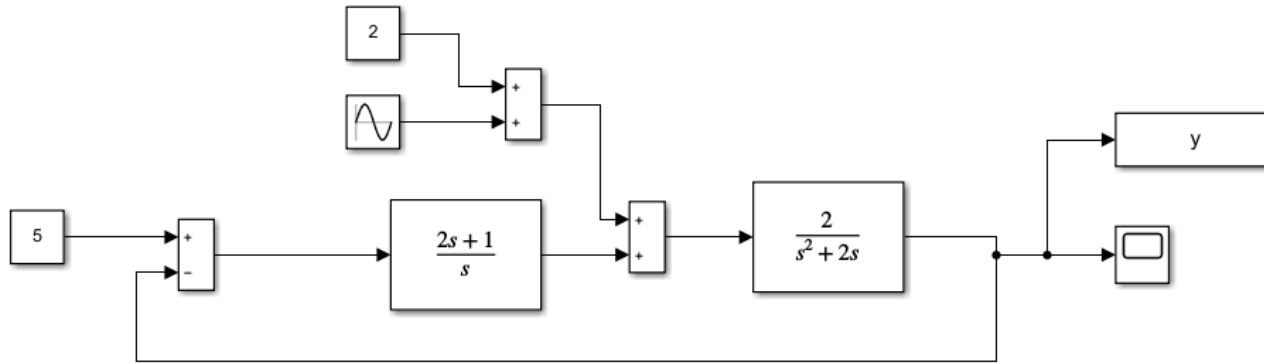
$$\left|W_{\zeta}^y(j1)\right|_{dB} \cong -3.5dB \qquad \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| = 10^{\frac{\left|W_{\zeta}^y(j1)\right|_{dB}}{20}} = 10^{-\frac{3.5}{20}} \cong 0.66$$

$$y_{regime}(t) = 0.5 \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| \sin\left(t + \angle W_{\zeta}^y(j1)\right)$$

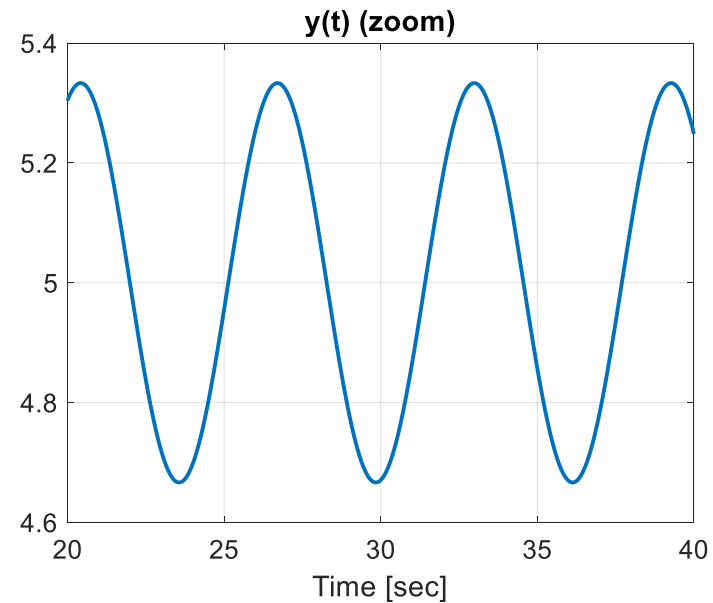
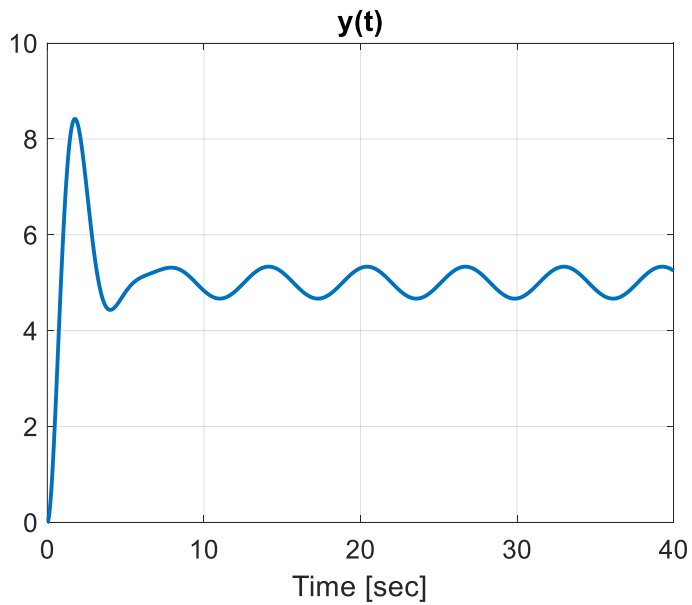
La componente oscillatoria sull'uscita dovuta al disturbo ha ampiezza

$$0.5 \left|W_{\zeta}^y(j1)\right| \cong 0.5 \cdot 0.66 \cong 0.33$$

Sommando le varie componenti calcolate, l'uscita y tenderà complessivamente al valore costante 5 più una oscillazione di ampiezza 0.33 e frequenza 1 rad/s



L'uscita y tenderà al valore costante **5** più una oscillazione di ampiezza **0.33**

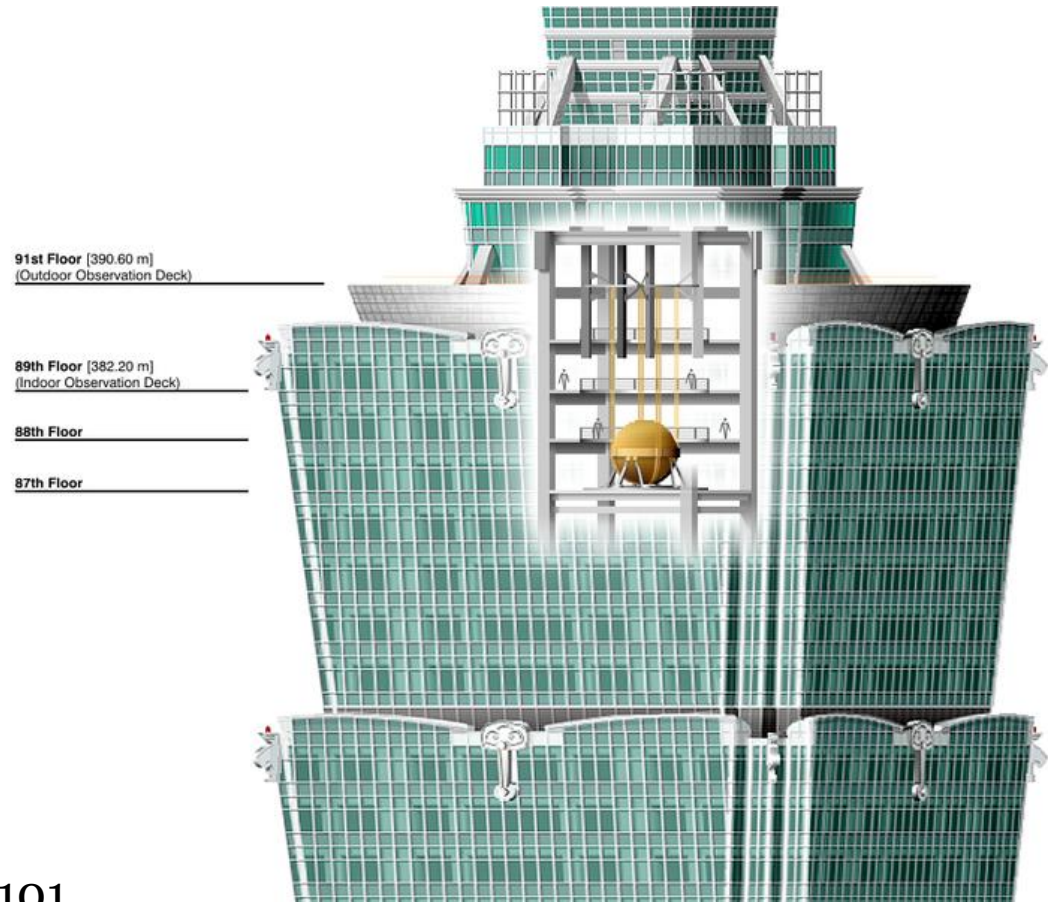


Tuned Mass Dampers (TMDs)

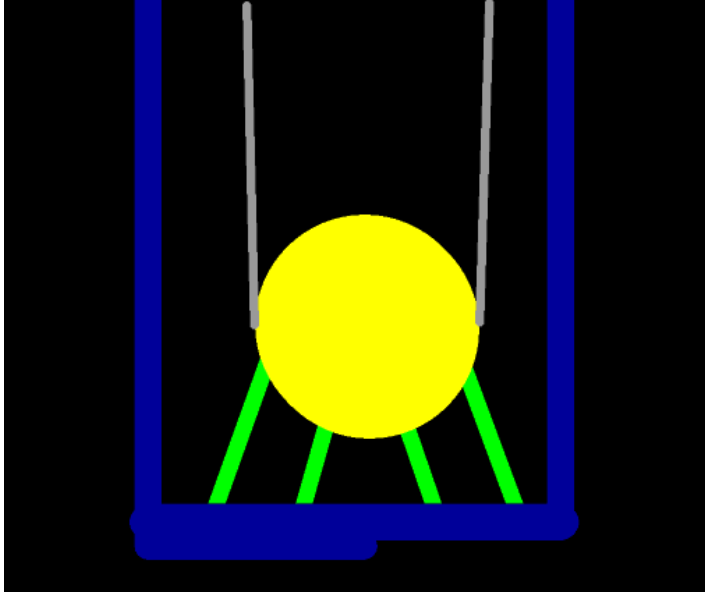
Location of Taipei 101's largest **tuned mass damper**.



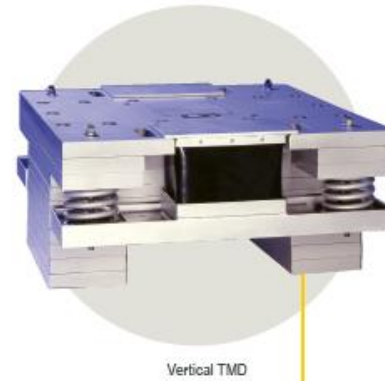
Taipei 101



Una sfera di acciaio del diametro di 5,5 m costituita da **41 dischi** e del peso di 660 t, che, situata all'interno dell'edificio tra l'87° e il 92° piano, con le sue oscillazioni (che vanno da 1 cm al massimo di 1,5 m) controbilancia le inclinazioni suscitate dai forti venti.



Millennium Bridge (Londra)



Vertical TMD



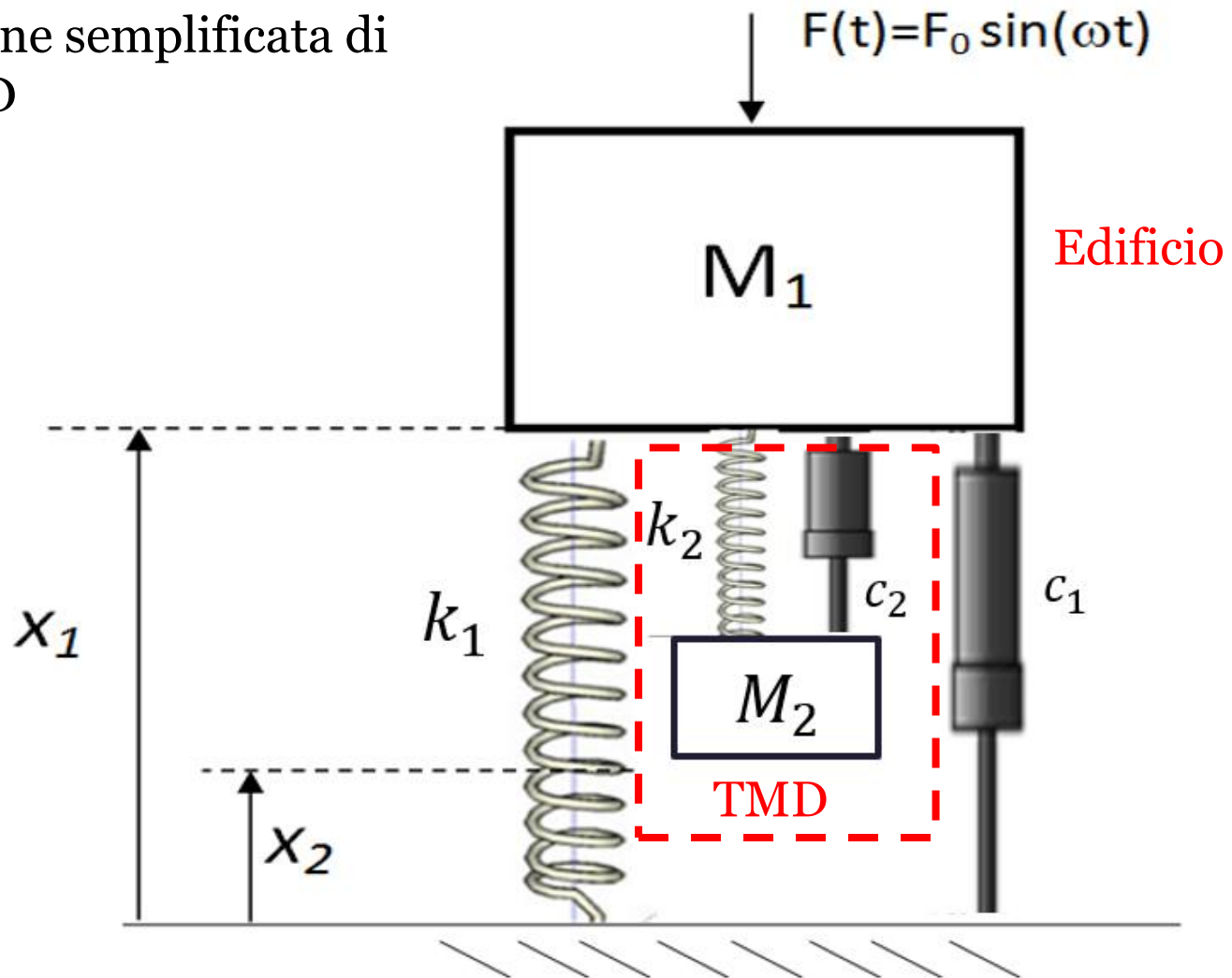
Horizontal TMD



Horizontal TMD

Tuned mass damper

Rappresentazione semplificata di un vertical TMD



Senza TMD

$$M_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

$$W(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{1}{M_1 s^2 + c_1 s + k_1}$$

Con TMD

$$M_1 \ddot{x}_1(t) + c_1 \dot{x}_1(t) + k_1 x_1(t) + k_2 (x_1(t) - x_2(t)) = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

$$M_2 \ddot{x}_2(t) + c_2 (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = 0$$

$$W_{TMD}(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{M_2 s^2 + c_2 s + k_2}{(M_1 s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2)(M_2 s^2 + c_2 s + k_2) - (c_2 s + k_2)^2}$$

Parametri della struttura

$$M_1 = 5 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

$$k_1 = 1.974 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

$$c_1 = 6.283 \cdot 10^4 \text{ N s/m}$$

Frequenza di risonanza

$$f_r = 1 \text{ Hz}$$

Parametri TMD (ottimali. Taratura di Den Hartog)

$$M_2 = \mu M_1$$

$$\mu = 0.05$$

Massa relativa (valore tipico)

$$M_2 = 25 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$k_2 = 9.34 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

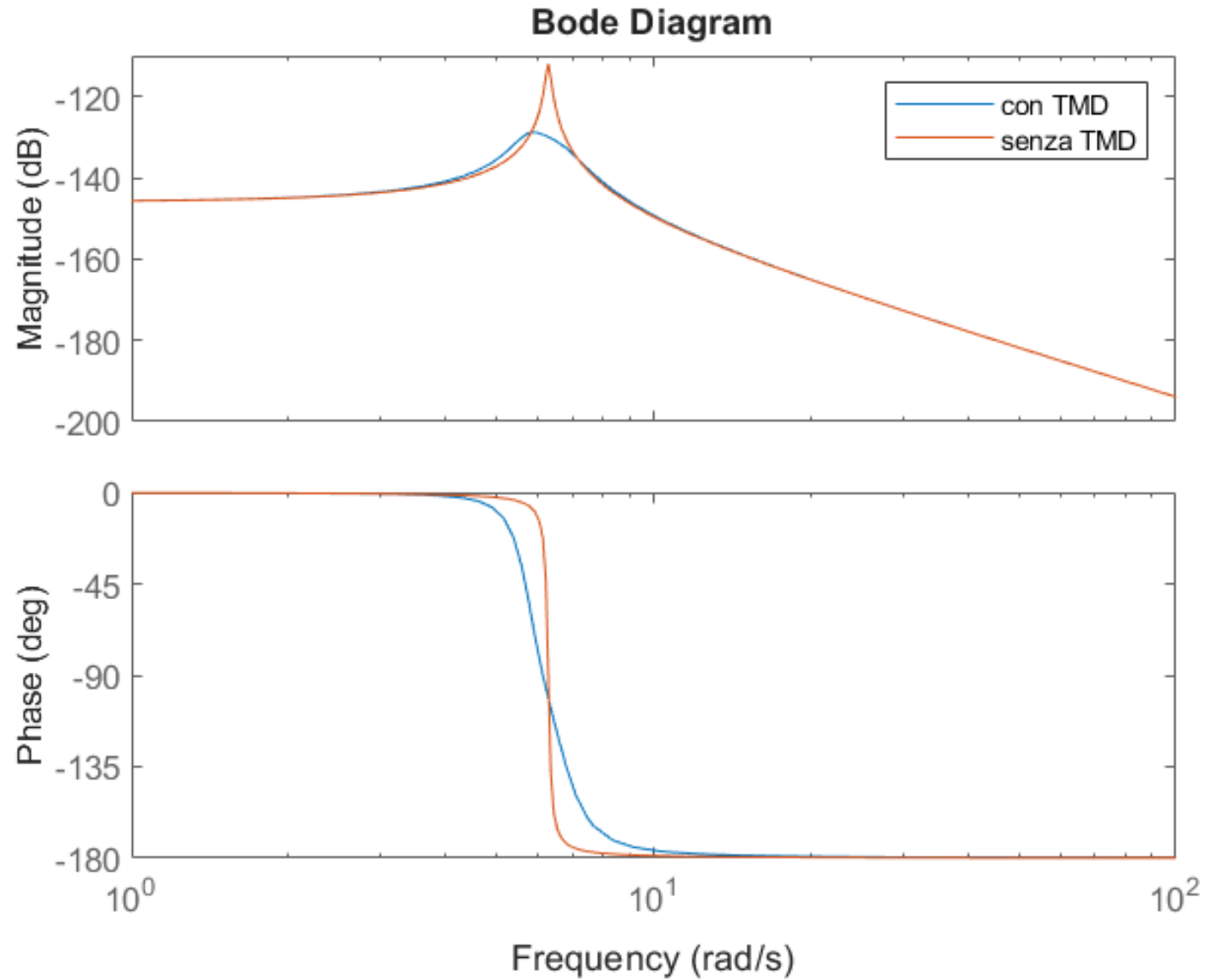
$$c_2 = 5.654 \cdot 10^4 \text{ N s/m}$$

1) Taratura di Den Hartog (scelta ottimale teorica)

- $r_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} \approx 0.97590007$.
- $\omega_{2,\text{opt}} = r_{\text{opt}} \omega_1 \approx 6.1317609996 \text{ rad/s}$.
- $f_{2,\text{opt}} = \omega_{2,\text{opt}} / (2\pi) \approx 0.97590007 \text{ Hz}$.
- Smorzamento ottimo del TMD:

$$\zeta_{2,\text{opt}} = \frac{\sqrt{3\mu}}{2(1 + \mu)} \approx 0.1844278 \quad (\approx 18.4\%).$$

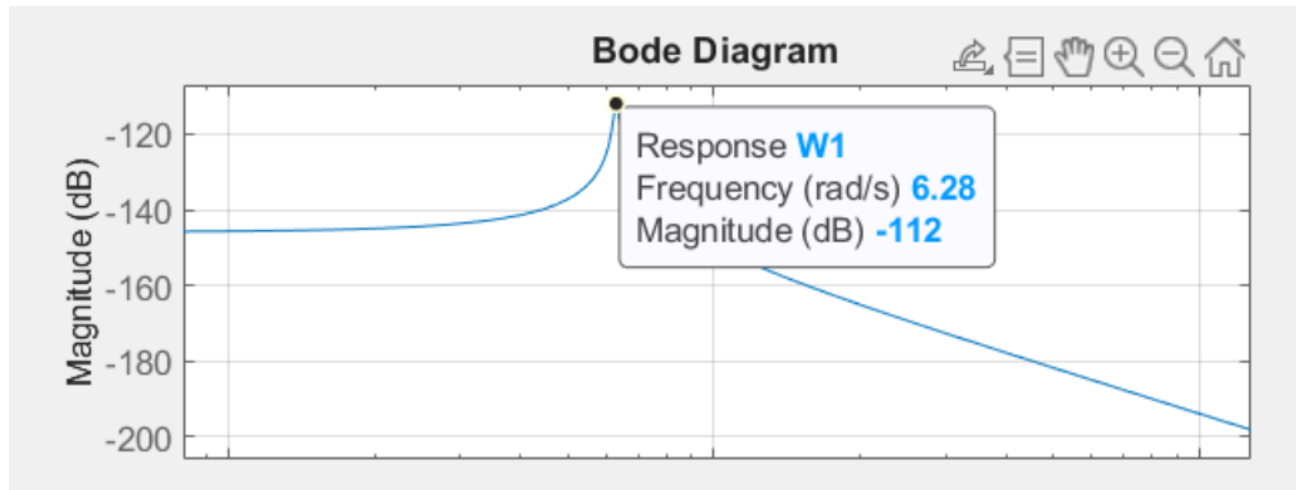
- $k_{2,\text{opt}} = M_2 \omega_{2,\text{opt}}^2 \approx 9.399623 \times 10^5 \text{ N/m}$.
- $c_{2,\text{opt}} = 2\zeta_{2,\text{opt}} M_2 \omega_{2,\text{opt}} \approx 5.654335 \times 10^4 \text{ N s/m}$.



Consideriamo una sollecitazione esterna alla frequenza di risonanza

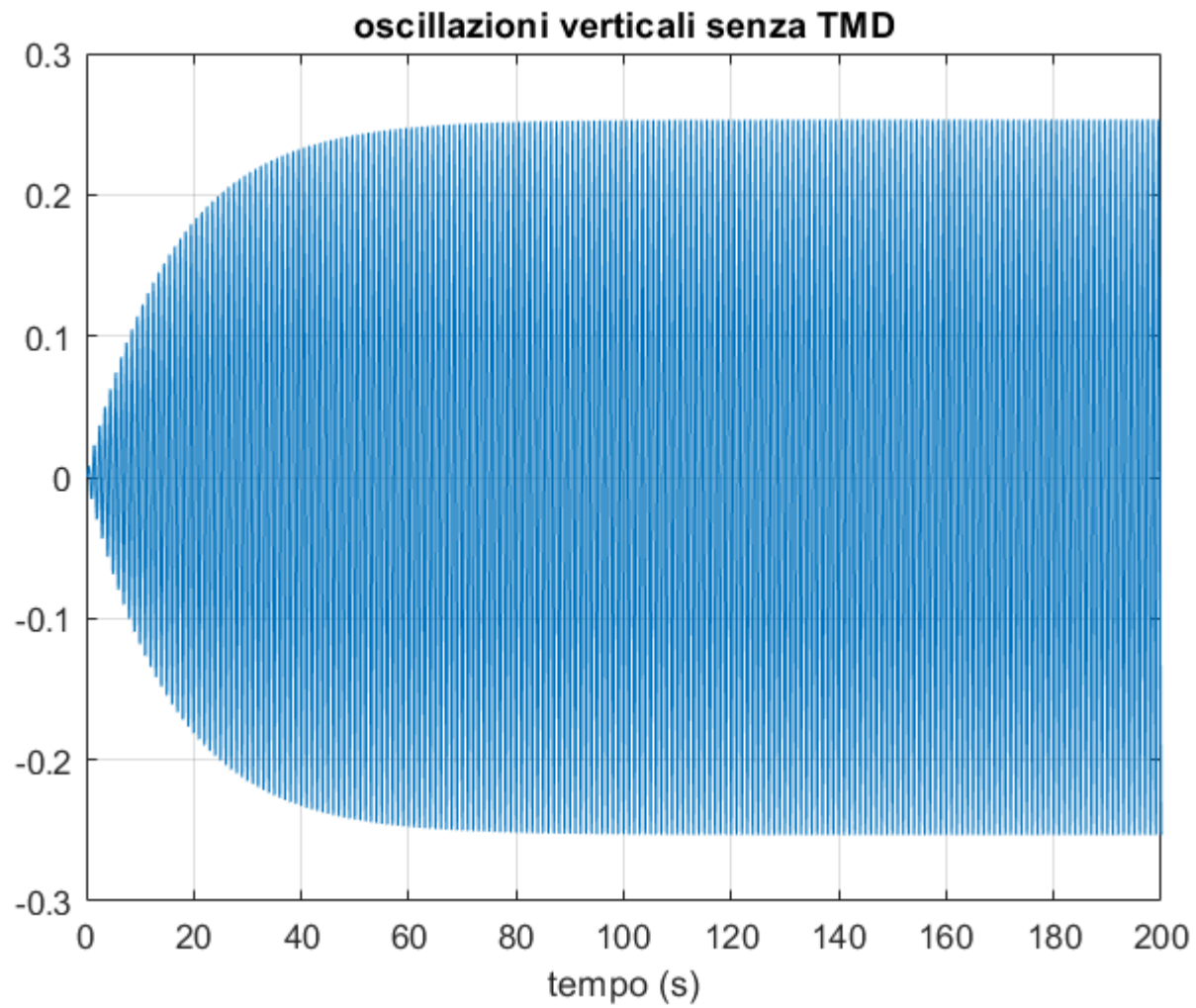
$$F(t) = F_0 \sin(2\pi t) \quad F_0 = 10^5 N$$

Calcoliamo l'ampiezza risultante per l'oscillazione della struttura **senza il TMD**

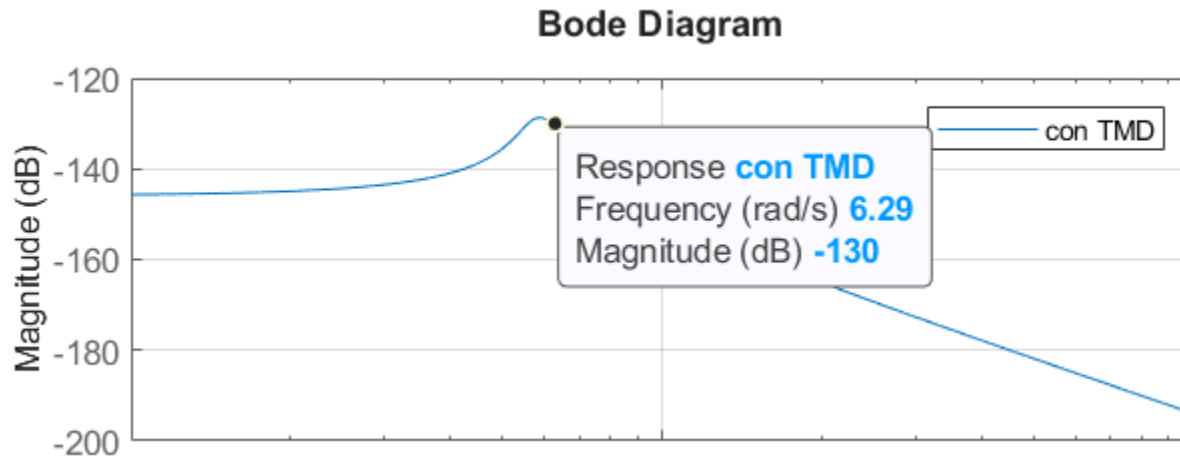


$$|W(j2\pi)|_{dB} \cong -112 dB \quad |W(j2\pi)| = 10^{\frac{|W(j2\pi)|_{dB}}{20}} = 10^{-\frac{112}{20}} \cong 2.51 \cdot 10^{-6}$$

$$A = F_0 |W(j2\pi)| = 10^5 \cdot 2.51 \cdot 10^{-6} \approx 0.25$$

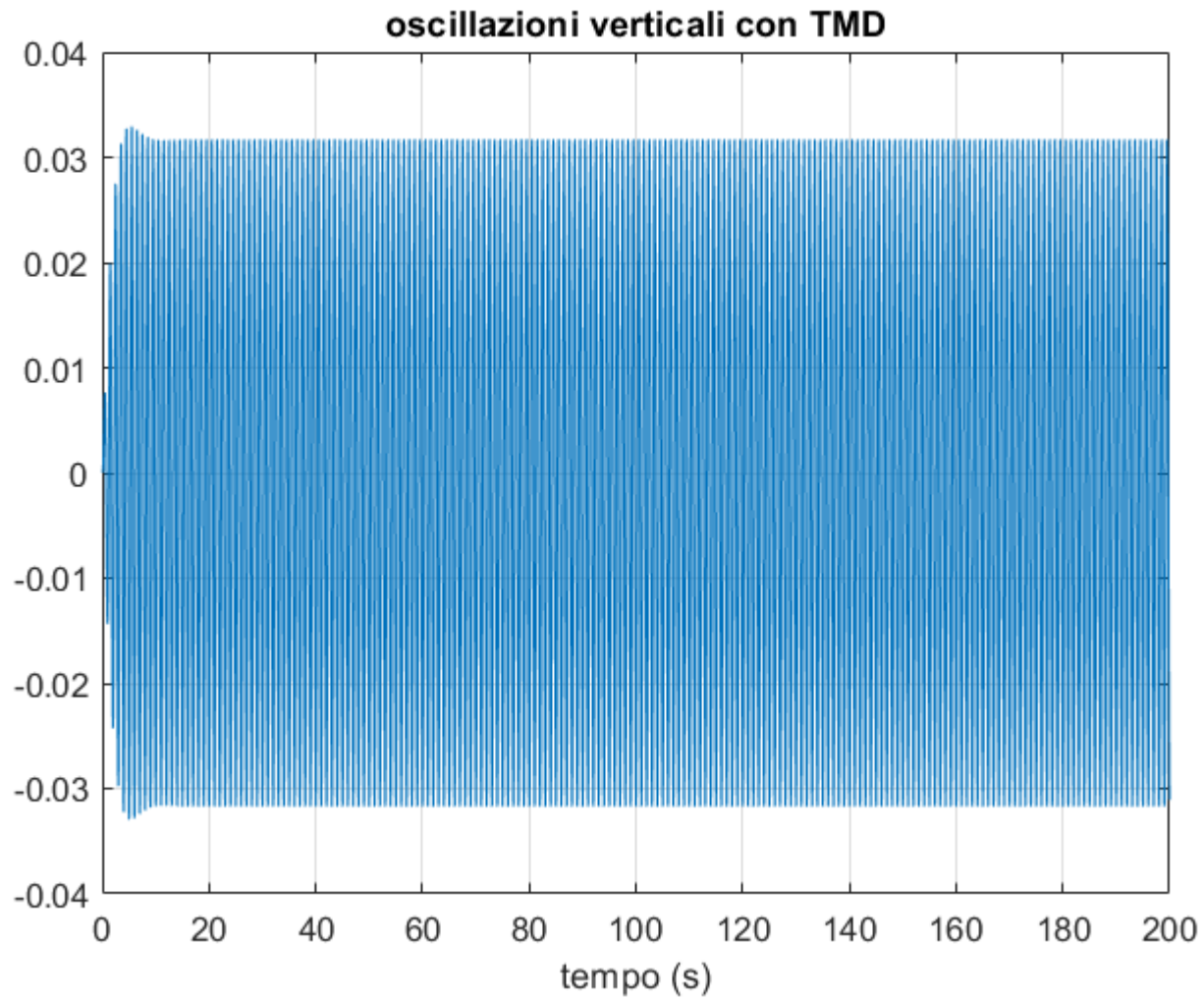


Ora calcoliamo l'ampiezza risultante per l'oscillazione della struttura **con il TMD**



$$|W_{TMD}(j2\pi)|_{dB} \cong -130dB \quad |W_{TMD}(j2\pi)| = 10^{\frac{|W_{TMD}(j2\pi)|_{dB}}{20}} = 10^{-\frac{130}{20}} \cong 3.16 \cdot 10^{-7}$$

$$A_{TMD} = F_0 |W_{TMD}(j2\pi)| = 10^5 \cdot 3.16 \cdot 10^{-7} \approx 0.0316$$

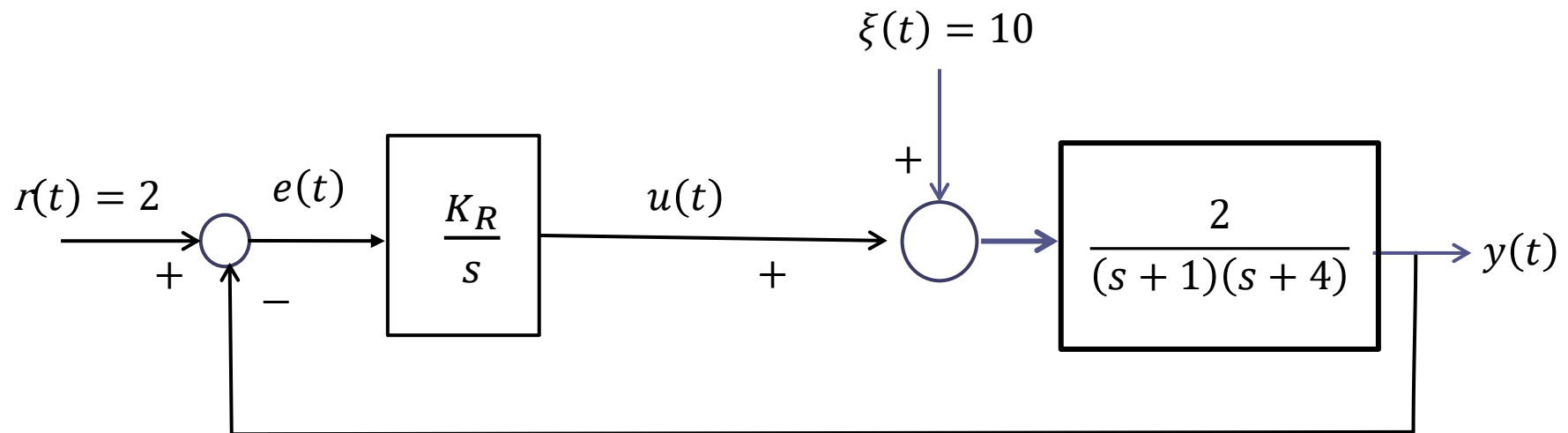


Esercizi da svolgere autonomamente

Es. E1

Dato il sistema di controllo in figura, valutare il comportamento di regime dell'uscita in corrispondenza di un set point costante $r(t) = 2$ e di un disturbo costante $\xi(t) = 10$ in corrispondenza dei seguenti valori per il guadagno K_R :

$$K_R = 1 \quad K_R = 5 \quad K_R = 20.$$



In un sistema di controllo a retroazione unitaria il polinomio caratteristico è ricavabile rapidamente, moltiplicando fra loro le FdT del controllore e del processo, e sommando il numeratore ed il denominatore della FdT prodotto. Si ottiene:

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+4) + 2K_r = s^3 + 5s^2 + 4s + 2K_r$$

Il polinomio caratteristico è un polinomio di Hurwitz (cioè possiede tutte le radici a parte reale negativa) se e solo se

$$4 \cdot 5 > 2K_r \quad \longrightarrow \quad K_r < K_r^{cr} = 10$$

Il polinomio caratteristico è, pertanto, un polinomio di Hurwitz se $K_R = 1$ e se $K_R = 5$, ma non più quando $K_R = 20$, valore del guadagno in corrispondenza del quale il sistema a ciclo chiuso è **instabile**.

Poiché nel sistema di controllo in esame è presente un polo nell'origine nel controllore, è garantita (sulla base delle due CNES) sia la precisione statica che la reiezione di un disturbo costante di ampiezza qualunque. La relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$$

sarà pertanto **soddisfatta quando $K_R = 1$ e $K_R = 5$** , ma **non più quando $K_R = 20$**

Procediamo per altra via, ricorrendo al T.F.R.G. (ed al principio di sovrapposizione degli effetti)

FdT a ciclo
chiuso e relativi
guadagni statici

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4) + 2K_R} \quad W_r^y(0) = 1$$

$$W_\xi^y(s) = \frac{\frac{2}{(s+1)(s+4)}}{1 + \frac{2K_R}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{2s}{s(s+1)(s+4) + 2K_R} \quad W_\xi^y(0) = 0$$

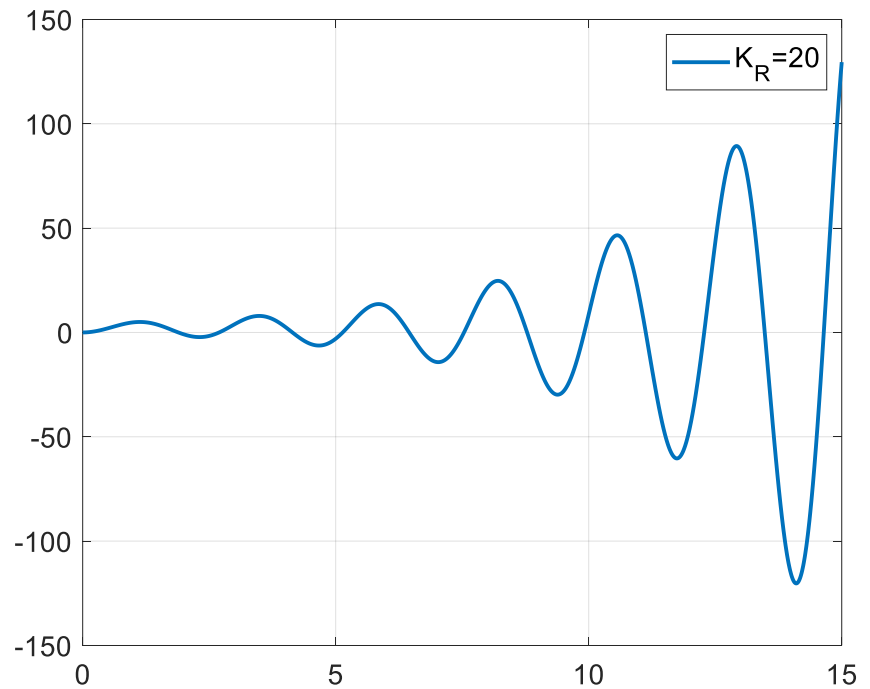
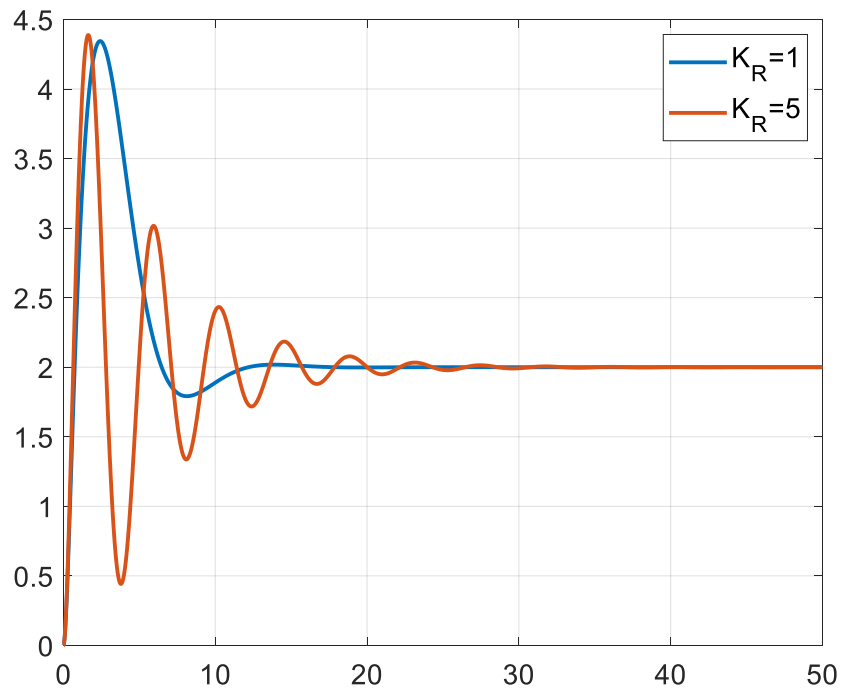
T.F.R.G.



$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2 \cdot W_r^y(0) + 10 \cdot W_\xi^y(0) = 2$$

Verifichiamo mediante simulazione i risultati ottenuti

Risposte compressive



```
clc
s=tf('s');
Kr=1;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr1,t1]=step(Wry,0:0.01:50);
[yd1,t1]=step(Wdy,0:0.01:50);

Kr=5;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr5,t5]=step(Wry,0:0.01:50);
[yd5,t5]=step(Wdy,0:0.01:50);

figure
plot(t1,2*yr1+10*yd1,t5,2*yr5+10*yd5,'LineWidth',2),grid
legend('K_R=1','K_R=5','FontSize',15)
set(gca,'FontSize',15)

Kr=20;
Wry=2*Kr/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);
Wdy=2*s/(s*(s+1)*(s+4)+2*Kr);

[yr20,t20]=step(Wry,0:0.01:15);
[yd20,t20]=step(Wdy,0:0.01:15);
figure
plot(t20,2*yr20+10*yd20,'LineWidth',2),grid
legend('K_R=20','FontSize',15)
set(gca,'FontSize',15)
```