

Nome e cognome: _____ Num. Matricola: _____

Es. 1 (9 punti)

Si consideri il sistema di controllo in Figura 1

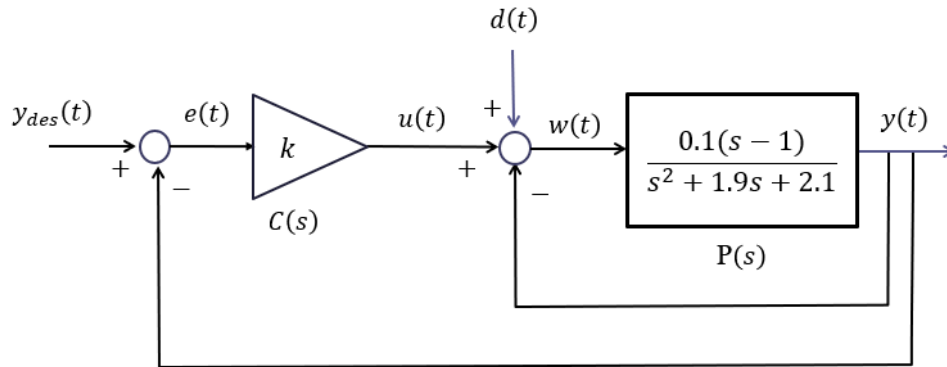


Figura 1

- 1.A** (3 punti) Analizzare le proprietà di stabilità a ciclo chiuso del sistema di controllo al variare di k ($k > 0$)
- 1.B** (3 punti) Assumendo $k = 15$, determinare il valore di regime dell'uscita quando $y_{des}(t) = 2$ e $d(t) = 0.5$
- 1.C** (3punti) Determinare, se esiste, il valore positivo del guadagno k al quale corrispondono due poli coincidenti a ciclo chiuso.

Es.2 (10 punti)

Si consideri il sistema di controllo in Figura 2

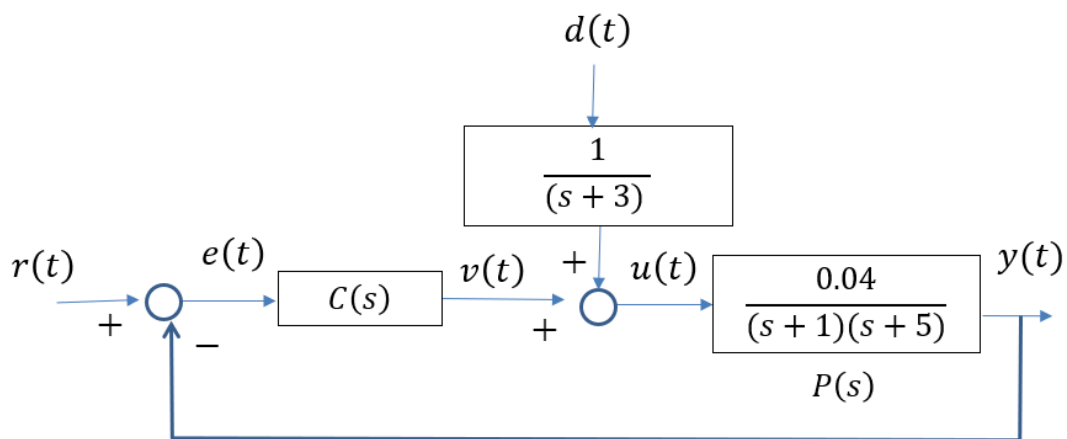


Figura 2

- 3.A** (8 punti) Progettare un controllore $C(s)$ che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:
 - S1) Precisione statica
 - S2) Attenuazione minima di un disturbo costante $d(t) = D$ pari al 95%
 - S3) Tempo di assestamento al 2% non superiore a 2 secondi
 - S4) Sovraelongazione percentuale non superiore al 5%.
- 3.B** (2 punti) Con riferimento al controllore progettato nel precedente quesito 3.A, scrivere sotto forma di equazione differenziale il legame fra i segnali in ingresso ed in uscita dal controllore.

Es. 3 (10 punti)

Si consideri il sistema di controllo in Figura 3.

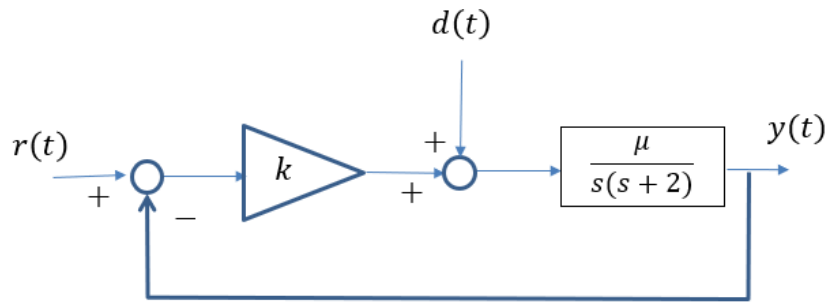


Figura 3

La seguente Figura 4 mostra l'evoluzione temporale dell'uscita $y(t)$ in risposta ad un disturbo costante di ampiezza 5 (con set-point nullo). Determinare i parametri k e μ .

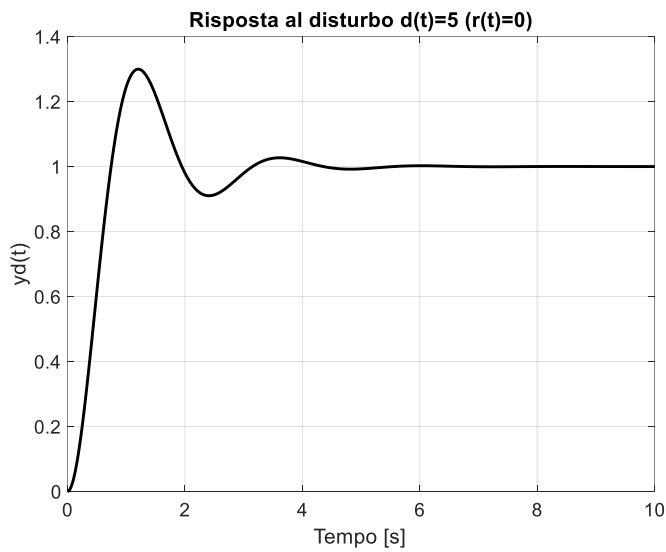


Figura 4

Es. 4 (4 punti) **ARGOMENTO NON TRATTATO NELL'AA 2025-26**

Enunciare sotto quali condizioni il sistema di controllo riportato nella seguente Figura 5 è in grado di garantire la reiezione asintotica di un disturbo cosinusoidale avente frequenza pari a 2 rad/s

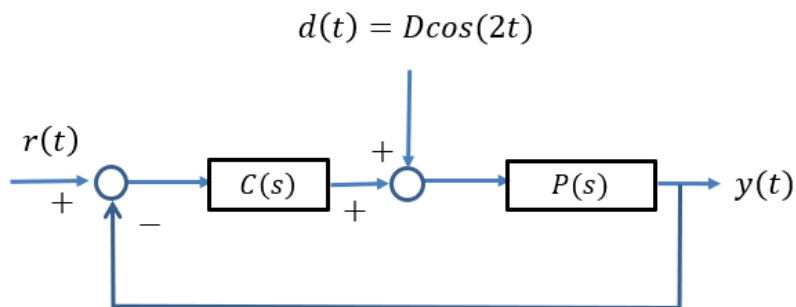
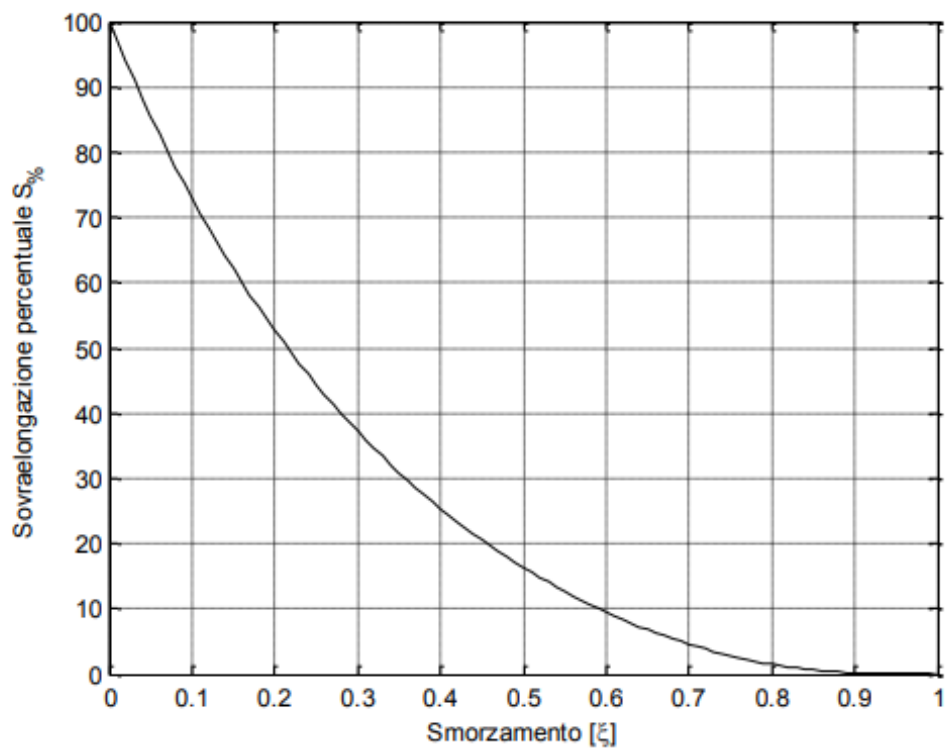


Figura 5

Numerare e firmare i fogli da consegnare.

Indicare chiaramente l'inizio e la fine dello svolgimento di ciascun esercizio.



Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
e^{at} (esponenziale)	$\frac{1}{s - a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\frac{1}{(s - a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ \ddagger
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Nome e cognome: _____ Num. Matricola: _____

Ex. 1 (9 points)

Consider the control system in Figure 1

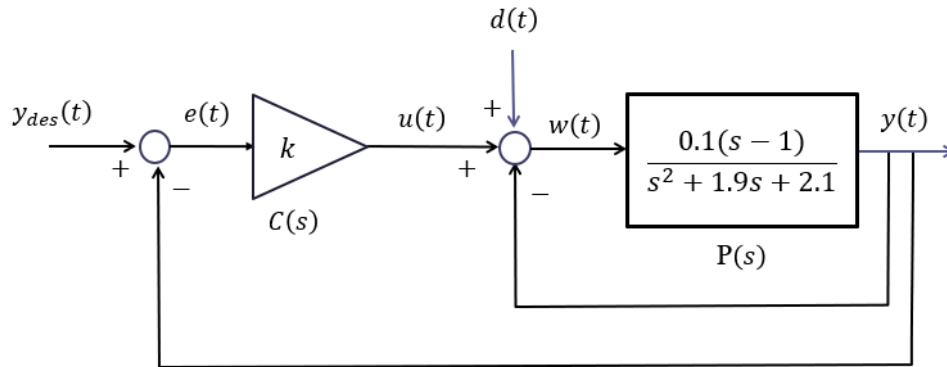


Figure 1

- 1.A** (3 points) Analyse the closed-loop stability of the control system for positive values of k ($k > 0$)
- 1.B** (3 points) Assuming $k = 15$, determine the steady-state output value when $y_{des}(t) = 2$ and $d(t) = 0.5$
- 1.C** (3 points) Determine, if it exists, the positive value of k yielding two coincident closed-loop poles

Ex.2 (10 points)

Consider the control system in Figure 2

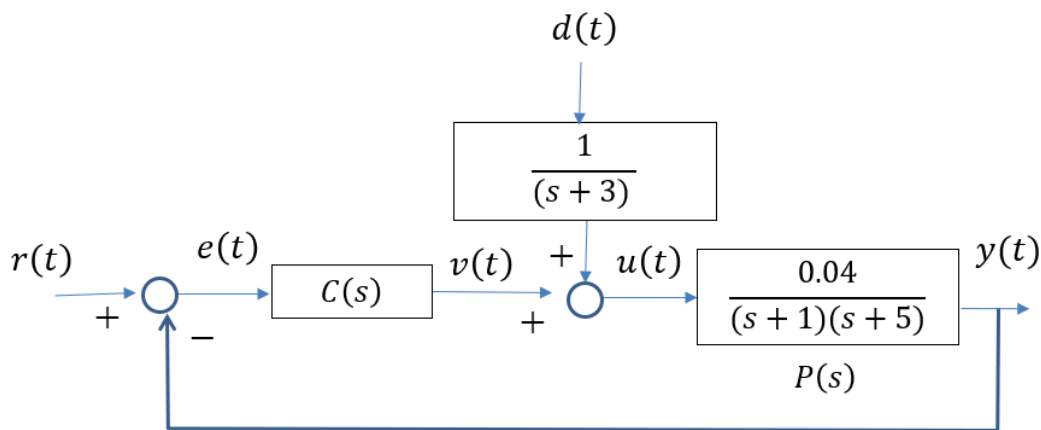


Figure 2

- 3.A** (8 points) Design a controller guaranteeing the achievement of the following specifications:
 - S1) Static accuracy (precisione statica)
 - S2) Minimal attenuation level of 95% for a constant disturbance signal $d(t) = D$
 - S3) 2% settling time (Tempo di assestamento al 2%) not exceeding 2 seconds
 - S4) Percentage overshoot $S\%$ not exceeding 5%.
- 3.B** (2 points) With reference to the controller designed in the previous question 3.A, write down the differential equation representing the relationship between the controller's input and output signals

Ex. 3 (10 points)

Consider the control system in Figure 3

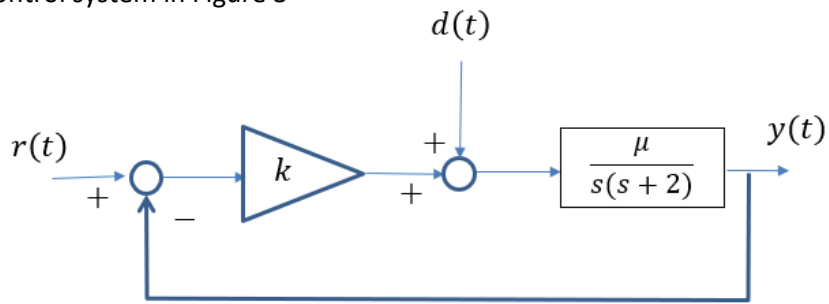


Figure 3

The next Figure 4 shows the time evolution of the output $y(t)$ in response to a constant disturbance of amplitude 5 (with zero set-point). Determine the parameters k and μ .

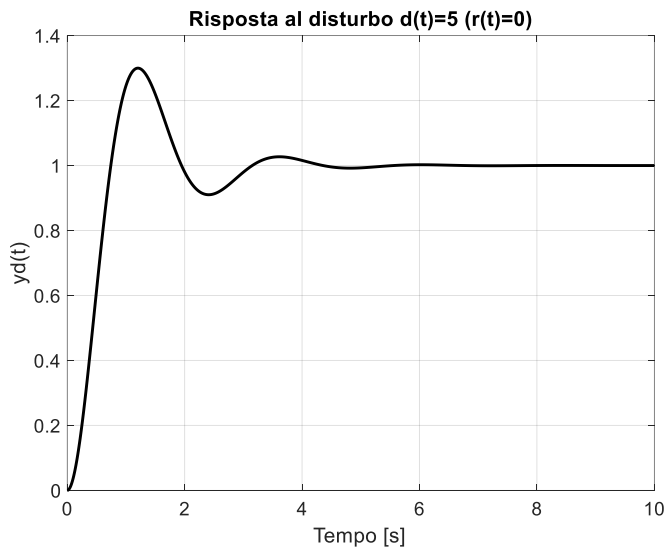


Figure 4

Ex. 4 (4 points)

Explain under which conditions the control system represented in the following Figure 5 is capable of guaranteeing the asymptotic rejection of a sinusoidal disturbance with frequency 2 rad/s

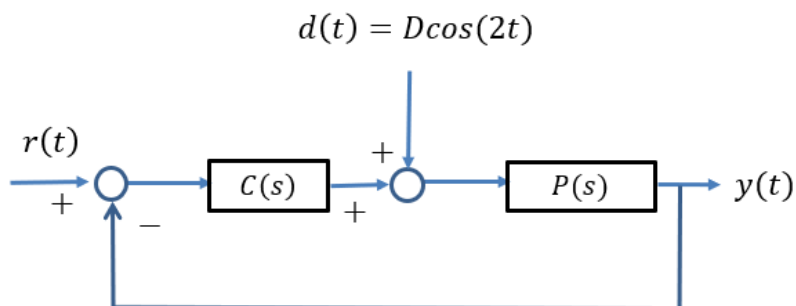
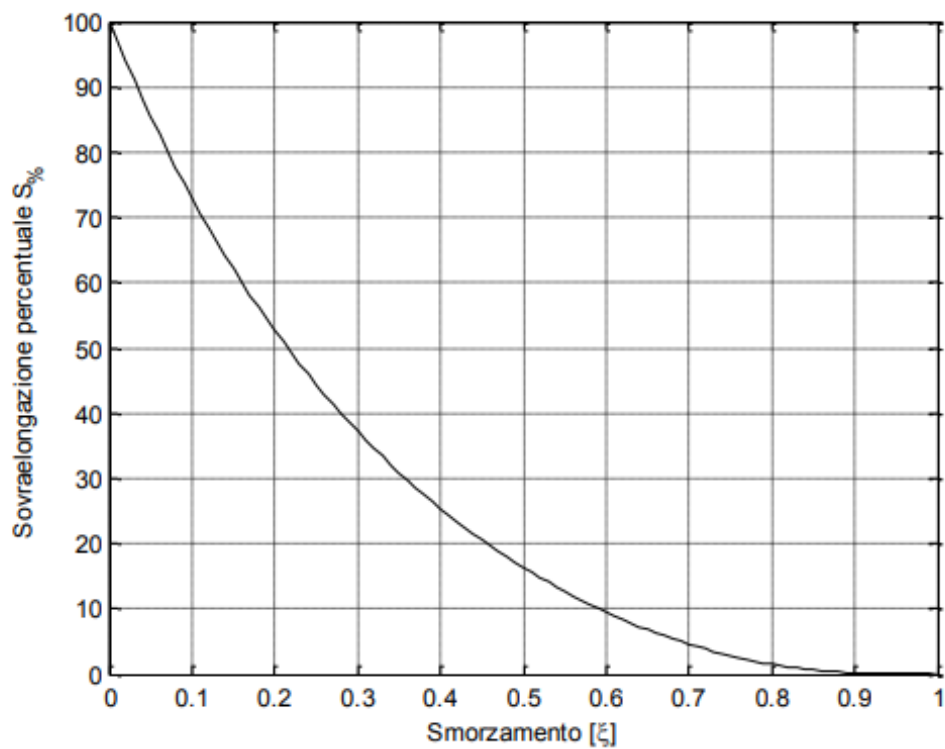


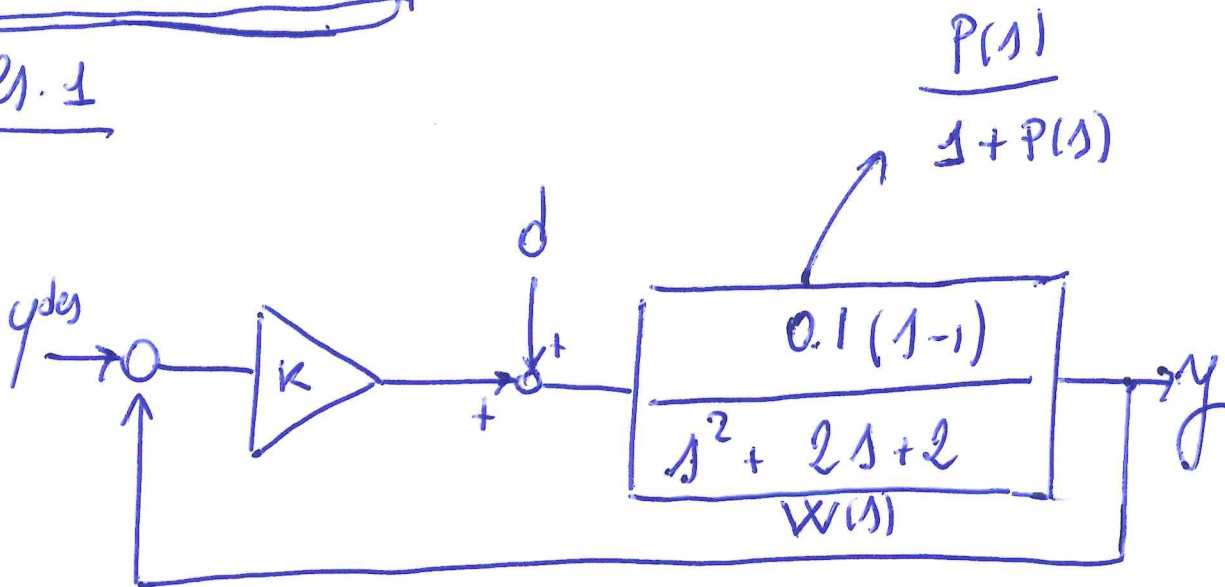
Figure 5

**Number and sign the sheets to be delivered.
Clearly indicate the beginning and end of each exercise.**



Funzione del tempo	Trasformata di Laplace
e^{at} (esponenziale)	$\frac{1}{s - a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$ (esponenziale polinomiale)	$\frac{1}{(s - a)^n}$
$\sin(\omega t)$ (sinusoide)	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ \ddagger
$\cos(\omega t)$ (cosinusoide)	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$ (fattore trinomio)
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

es. 1



1.A.

$$\frac{P(s)}{1+P(s)} = \frac{\frac{0.1(s-1)}{s^2+1.9s+2.1}}{1 + \frac{0.1(s-1)}{s^2+1.9s+2.1}} = \frac{0.1(s-1)}{s^2+1.9s+2.1+0.1(s-1)}$$

$$= \frac{0.1(s-1)}{s^2+2s+2} = W(s)$$

Calcoliamo il pol. caratteristico del sistema di controllo
 Moltiplichiamo per bene la FdT del controllore (=K)
 e quella del sistema W(s), e poi sommiamo
 il numeratore e il denominatore

2

$$K \cdot W(s) = \frac{K \cdot 0.1 (s-1)}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\begin{aligned} P_{CAR} &: s^2 + 2s + 2 + 0.1Ks - 0.1K \\ &= s^2 + (2 + 0.1K)s + 2 - 0.1K \end{aligned}$$

In base alle regole di Routh, il P_{CAR} ammette radici a parti reali negative se

$$\left. \begin{array}{l} 2 - 0.1K > 0 \\ 2 + 0.1K > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \underline{K < 20}$$

Quindi : s.s. stabile $K < 20$

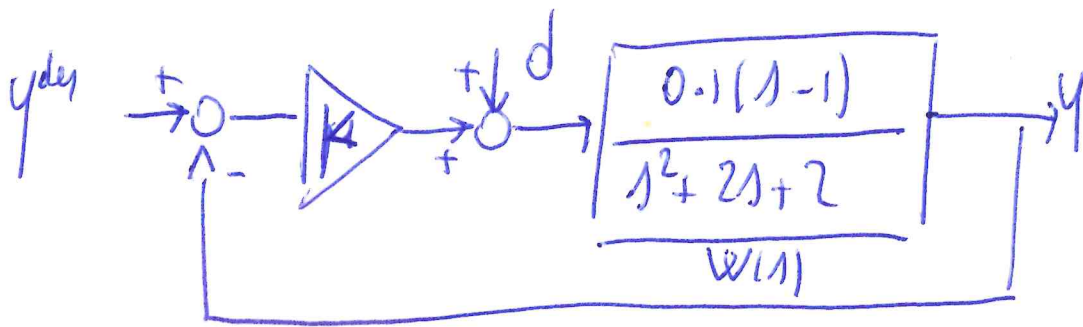
sisteme di controllo : instabile $K > 20$

limite di stabilità $K = 20$

$K = 20 \Rightarrow$ guadagno critico

2.5

1.B Utilizzo delle formule:



sistema di controllo di tipo zero

$\mu_c = K = 15$ grad. statico del controllore

$\mu_w = W(0) = -0.05$ grad. statico del processo

$$y^{des} = R^* = 2 \quad d = D = 0.5$$

$$Y_{\infty} = R^* \frac{\mu_c \mu_w}{1 + \mu_c \mu_w} + D \frac{\mu_w}{1 + \mu_c \mu_w}$$

$$= 2 \cdot \frac{15 \cdot (-0.05)}{1 + 15 \cdot (-0.05)} + 0.5 \frac{-0.05}{1 + 15 \cdot (-0.05)}$$

$$= -6 \quad - 0.1$$

③

1.B

(k=15)

Soluzione senza l'impiego delle formule
Impiego del T.F.R.G.

Calcoliamo la FAT o ciclo chiuso tra il set-point
e l'uscita

$$\begin{aligned}W_{Y_{des}}^Y &= \frac{k \cdot \frac{0.1(\Delta-1)}{\Delta^2+2\Delta+2}}{1 + \frac{k \cdot 0.1(\Delta-1)}{\Delta^2+2\Delta+2}} = \\&= \frac{15 \cdot 0.1 \cdot (\Delta-1)}{\Delta^2+2\Delta+2 + 15 \cdot 0.1 \cdot (\Delta-1)} = \\&= \frac{1.5(\Delta-1)}{\Delta^2+2\Delta+2 + 1.5(\Delta-1)} = \\&= \frac{1.5(\Delta-1)}{\Delta^2+3.5\Delta+0.5}\end{aligned}$$

Il guadagno statico è: $W_{Y_{des}}^Y(0) = \frac{-1.5}{0.5} = -3$

(4)

Il T.F.R.G. implica che

$$\text{se } y_{des} = 2 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2 \cdot W_{y_{des}}^y(0) = \underline{\underline{-6}}$$

Procediamo analogamente calcolando la FdT a cui
dovrà far il disturbo e l'uscita:

$$\begin{aligned} W_d^y(s) &= \frac{W(s)}{1 + 15 \cdot W(s)} = \frac{\frac{0.1(s-1)}{s^2 + 2s + 2}}{1 + \frac{1.5(s-1)}{s^2 + 2s + 2}} = \\ &= \frac{0.1(s-1)}{s^2 + 2s + 2 + 1.5(s-1)} = \frac{0.1s - 0.1}{s^2 + 3.5s + 0.5} \end{aligned}$$

$$W_d^y(0) = \frac{-0.1}{0.5} = -0.2$$

$$\text{T.F.R.G.} \Rightarrow \text{se } d = 0.5 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.5 \cdot (-0.2) = \underline{\underline{-0.1}}$$

1.c)

$$\text{Il } p_{CAR} \text{ è : } s^2 + (2 + 0.1k)s + (2 - 0.1k) = s^2 + bs + c \quad (5)$$

Ammette 2 radici coincidenti se il Δ dell'eq. di 2° grado è nullo

$$\Delta = b^2 - 4c$$

$$b = 2 + 0.1k$$

$$c = 2 - 0.1k$$

$$b^2 = 4c$$

$$(2 + 0.1k)^2 = 4(2 - 0.1k)$$

$$4 + 0.01k^2 + 0.4k = 8 - 0.4k$$

$$0.01k^2 + 0.8k - 4 = 0$$

↓ moltiplichiamo per 100

$$k^2 + 80k - 400 = 0$$

6

$$k_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{(80)^2 + 4 \cdot 400}}{2}$$

$$= \frac{-80 \pm \sqrt{8000}}{2} = \frac{-80 \pm 89.44}{2} = \begin{cases} 4.72 \\ -84.72 \end{cases}$$

$$k = 4.72$$

1. C

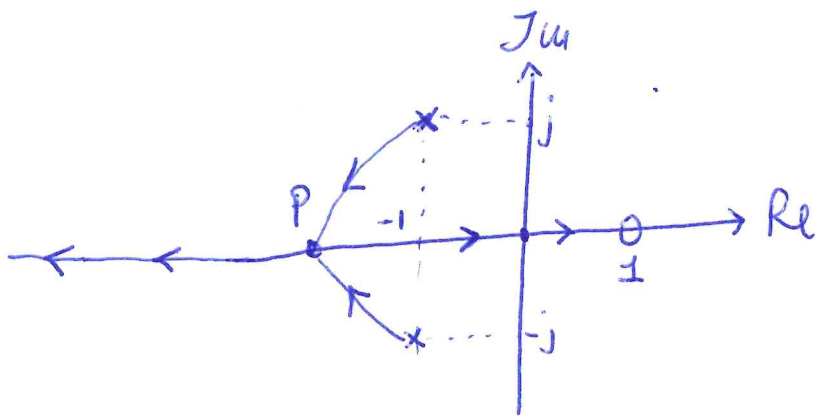
Soluzioni mediante LdR

6.1

$$L(s) = \frac{0.1 (s-1)}{s^2 + 2s + 2}$$

$$p_{1,2} = -1 \pm j$$

$$z_1 = 1$$



LdR coerenti con l'analisi delle stabilità volte. Il ramo entra nel semipiano dx quando $K = 20$.

calcoliamo il punto doppio P, ed eseguiamo due poi le tabelle.

Eq. punti doppi:

$$\frac{1}{s+1+j} + \frac{1}{s+1-j} + \frac{1}{s-1} = 0$$

$$\frac{1+1-j+1+1+j}{s^2+2s+2} + \frac{1}{s-1} = 0$$

$$\frac{2(s+1)}{s^2+2s+2} - \frac{1}{s-1} = 0$$

6.2

$$\frac{2(\lambda+1)(\lambda-1) - (\lambda^2 + 2\lambda + 2)}{(\lambda^2 + 2\lambda + 2)(\lambda-1)} = 0$$

$$2(\lambda^2 - 1) - \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

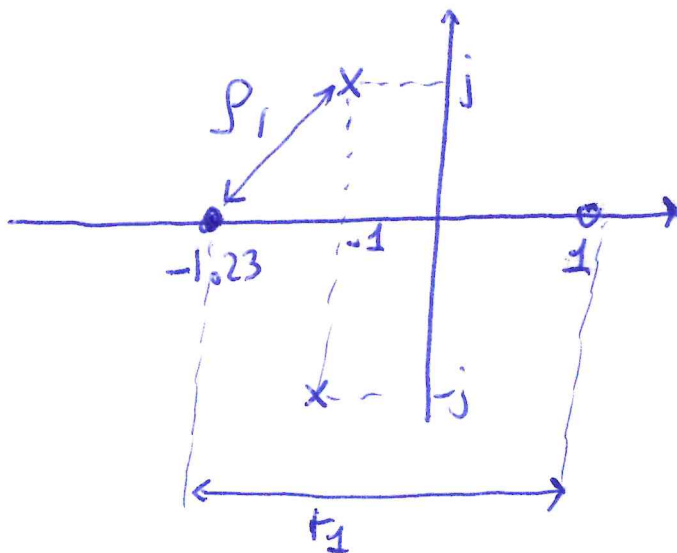
$$\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{5} \approx 3.23 \\ 1 - \sqrt{5} \approx -1.23 \end{cases} \quad \underline{\underline{OK}}$$

non appartenere al LdR



punto doppio : $P = -1.23$



$$L(s) = \frac{0.1(s-1)}{s^2 + 2s + 2}$$

$\bar{K} = 0.1$ HFG di $L(s)$

$$K = \frac{1}{\bar{K}} \frac{P_1 P_2}{M_1}$$

$$P_1 = \sqrt{(0.23)^2 + 1} \approx 1.02$$

$$P_2 = P_1$$

$$M_1 = 2.23$$

$$K = \frac{1}{0.1} \cdot \frac{(1.02)^2}{2.23} = 4.72$$

Es. 2

(7)

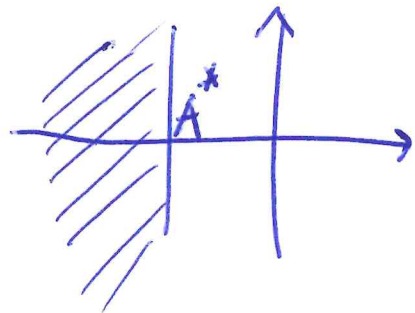
3A

$s_1 \Rightarrow$ polo nell'origine nel controllore

$s_2 \Rightarrow$ automaticamente soddisfatto se $C(s)$ contiene un polo nell'origine, indipendentemente dal valore del guadagno K_c (affiancamento del 100).

$s_1 + s_2 \Rightarrow$ polo nell'origine nel controllore
non vincolo su K_c

$s_3 \Rightarrow$ Regione ammissibile

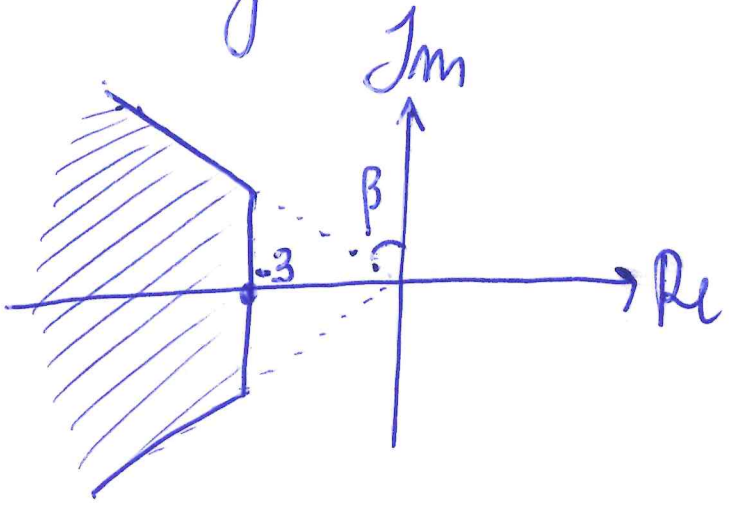


con $A^* = -\frac{6}{T^*}$ $T^* = 2$ secondi

$A^* = -3$

$s_4 \Rightarrow \zeta \geq 0.7$

$s_3 + s_4 \rightarrow$ Regione ammissibile



$\sin(\beta) = 0.7$

Sulto di 1° tentativo per $C(s)$

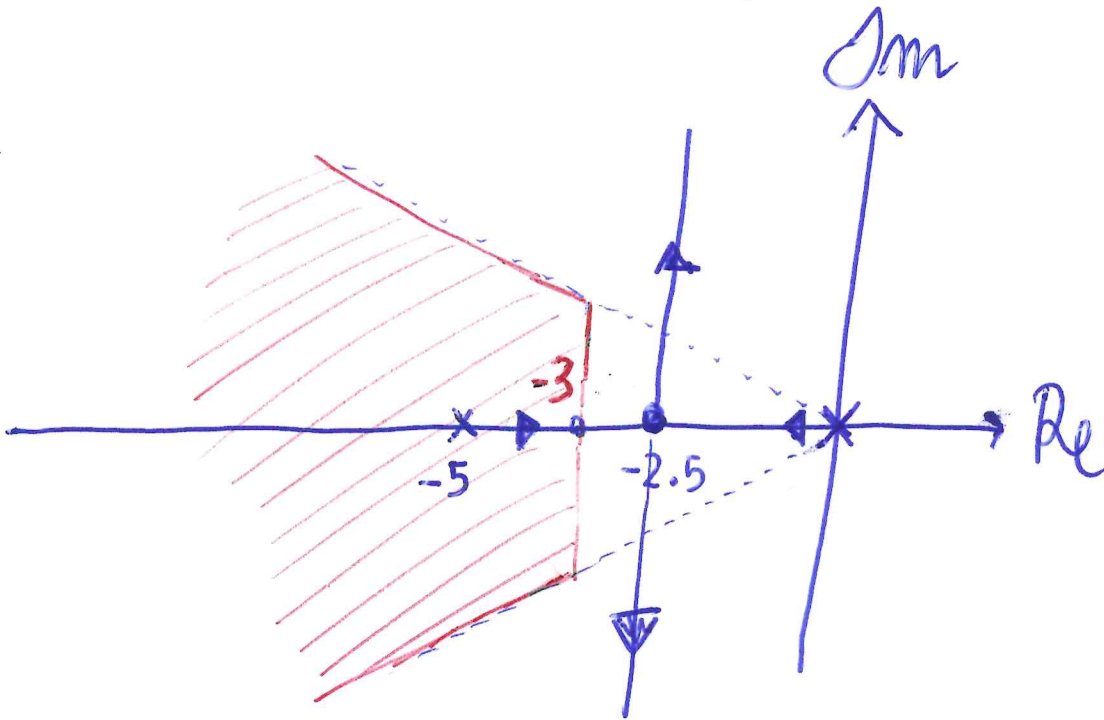
$C(s) = K_c \frac{(s+1)}{s} \rightarrow$ poiché dobbiamo innanzi obbligatoriamente un polo nell'origine, innanzitutto anche uno zero, sovrapponendolo al polo del processo più in banda frequenza

9

Tracciamo il LdR, e sovrapposimolo alle
regione ammissibile

LdR

$$L(s) = \frac{s+1}{s} \cdot \frac{0.04}{(s+1)(s+5)} = \frac{0.04}{s(s+5)}$$



Il controllore $C(s) = K_c \frac{s+1}{s}$ garantisce la
stabilità a ciclo chiuso \forall valore di K_c , ma
non vi è modo di scegliere K_c in modo che
entrambi i poli cadano all'interno della regione
ammissibile. Non va per cento bene.

Inseriamo nel controllore una ulteriore coppia polo-zero.

Con lo zero del controllore "cancelliamo" l'altro polo del processo (quello in -5) e inseriamo un polo che sia collocato più in alta frequenza, in modo tale che il nuovo punto doppio sia collocato all'interno della regione ammissibile.

Collocando tale polo del controllore nel punto -6 il nuovo punto doppio va a trovarsi in -3, quindi sul bordo della regione ammissibile.

(41)

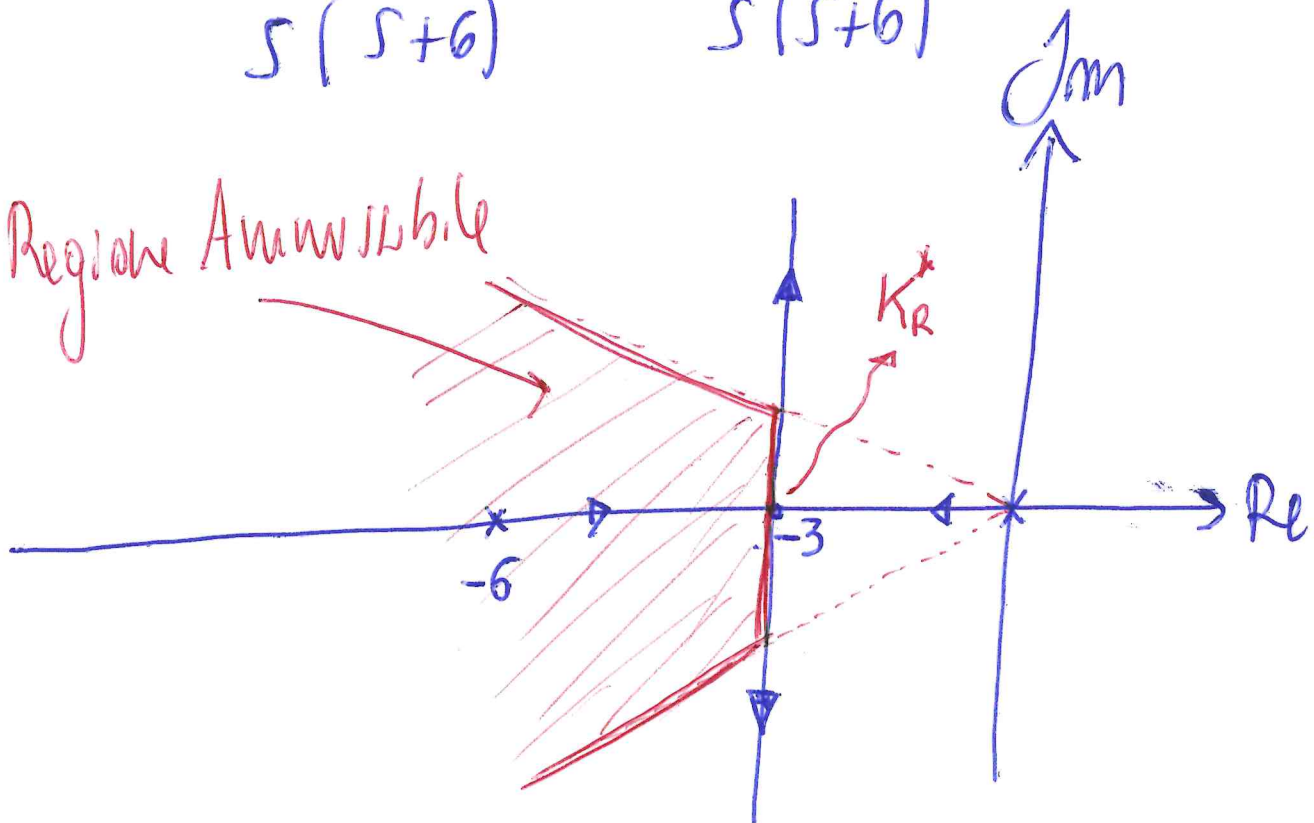
$$C(s) = k_c \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s+5}{s+6} \cdot \frac{6}{5}$$

Ora il LdR ci va bene:

$$L(s) = \frac{\cancel{(s+1)} \cancel{(s+5)}}{s(s+6)} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{0.04}{\cancel{(s+1)} \cancel{(s+5)}}$$

$$= \frac{0.04 \times \frac{6}{5}}{s(s+6)} = \frac{0.048}{s(s+6)}$$

Regione Ammissibile



(12)

poiché non sussistono vincoli su K_c
 possiamo scegliere in modo da collocare i
 2 poli a ciclo chiuso nel punto doppio in -3 .
 Operiamo la funzione del punto doppio:

$$K_R^* = \frac{1}{k} \cdot p_1 p_2 \quad \bar{k} = 0.048$$

$$p_1 = p_2 = 3$$

$$K_R^* = \frac{1}{0,048} \cdot 3 \cdot 3 = 187.5$$

$$C(s) = 187.5 \times \frac{6}{5} \cdot \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+6)}$$

$$= 225 \frac{(s+1)(s+5)}{s(s+6)} \quad \underline{\underline{Ok}}$$

13

3.B

$$C(s) = 225 \frac{s^2 + 6s + 5}{s^2 + 6s} =$$
$$= \frac{225s^2 + 1350s + 1125}{s^2 + 6s}$$

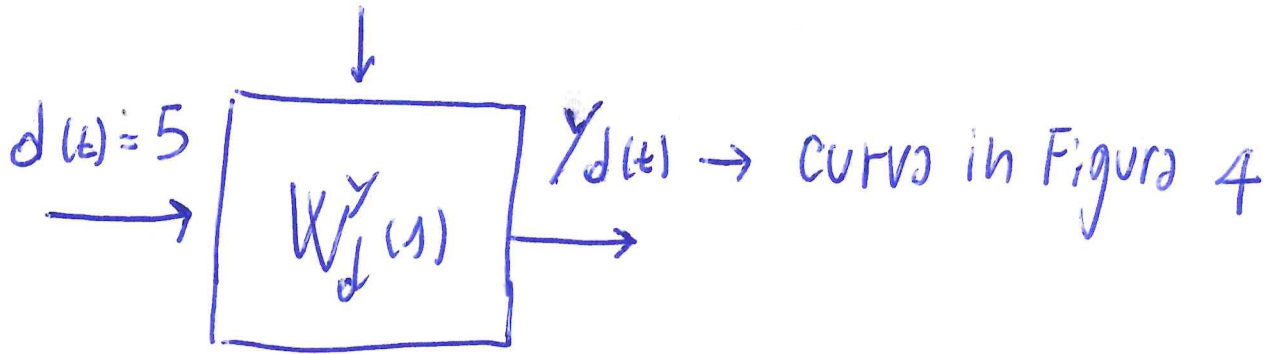


$$\ddot{v}(t) + 6 \dot{v}(t) = 225 \ddot{e}(t) + 1350 \dot{e}(t) + 1125 e(t)$$

v = uscita del controller
 e = ingresso al controller

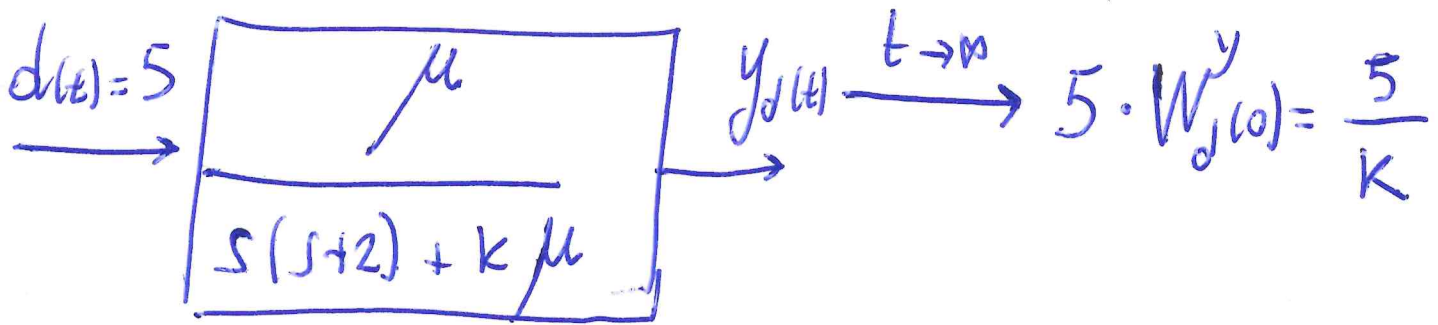
Es 3

FDT a ciclo chiuso fra il disturbo d e l'uscita y



$$W_d^y(s) = \frac{\frac{\mu}{s(s+2)}}{1 + \frac{k\mu}{s(s+2)}} = \frac{\mu}{s(s+2) + k\mu}$$

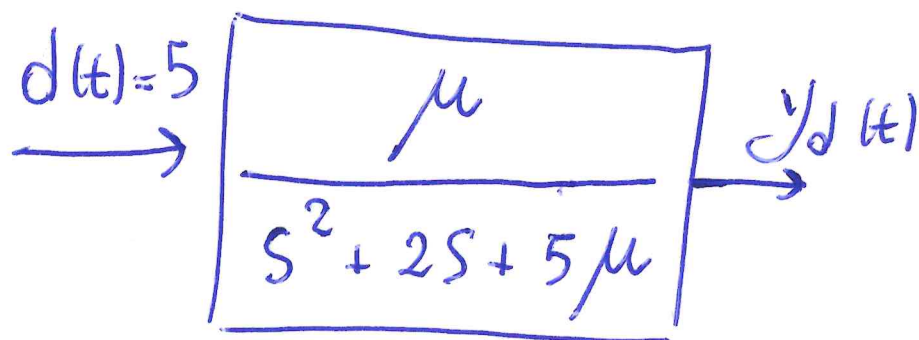
T.F.R.G.



poiché il valore di regime di $y_d(t)$ è pari ad 1
si ha

$$\frac{5}{k} = 1 \Rightarrow \boxed{k=5}$$

(15)



La forma della risposta in Figura 4 rivela come i poli di $w_j(s)$ siano complessi coniugati. Poiché la sovraccoscione è circa pari al 30%, lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati è circa pari a 0.35. ($\zeta = 0,35$)

Passiamo a determinare μ imponendo che il polinomio $s^2 + 2s + 5\mu$ abbia una coppia di poli complessi coniugati con smorzamento pari a 0.35

(16)

$$s^2 + 2s + 5\mu = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$= s^2 + 0.7\omega_n s + \omega_n^2$$

Sostituiamo $\zeta = 0.35$ \rightarrow

$$\begin{cases} 2 = 0.7\omega_n \\ 5\mu = \omega_n^2 \end{cases} \rightarrow \omega_n = \frac{2}{0.7} = 2.85$$

$$\rightarrow \omega_n^2 =$$

$$(2.85)^2 = 8.12$$

$$5\mu = 8.12 \Rightarrow \mu = \frac{8.12}{5} = 1.62$$

Sulle basi del secondo enunciato del Principio del modello interno, il controllore deve essere tale che

- 1) Deve avere una coppia di poli immaginari puri $\pm 2j$, cioè nel suo denominatore deve essere presente il polinomio $(s^2 + 4)$
- 2) Deve garantire che il sistema di controllo sia asintoticamente stabile a ciclo chiuso.