Cagliari, 16/06/2025

Esame di MATEMATICA E STATISTICA – CdL in BIOLOGIA (PARI)

MATRICOLA ____

NOME e COGNOME ____

1) Geometria analitica (5 punti)

Si considerino la circonferenza di centro C (-1; 0) e raggio pari a 3, nonché la retta passante per i punti A (-2; 5) e B (2; -3).

Si trovino gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza e la retta.

2) Studio di funzione: La melatonina (12 punti)

La melatonina è un ormone prodotto naturalmente dalla ghiandola pineale nel cervello, noto per il suo ruolo fondamentale nella regolazione del ciclo sonno-veglia. Quando la luce diminuisce, il corpo aumenta la produzione di melatonina, segnalando che è ora di dormire. Al contrario, la sua produzione diminuisce con l'esposizione alla luce, aiutando il risveglio. Oltre al suo ruolo nel sonno, la melatonina ha proprietà antiossidanti e influenza il sistema immunitario. È disponibile anche sotto forma di integratore, spesso utilizzato per contrastare il jet lag o problemi di insonnia.

Viene assunta da un adulto un integratore a base di melatonina ed a rilascio immediato. Si ipotizzi che questa venga assorbita dall'organismo secondo la seguente funzione che indica la quantità di melatonina nel sangue (in mg) in funzione del tempo (in ore) e a partire dal momento dell'assunzione:

$$Q(t) = \frac{kt}{t^2 + 1}$$

Dove k è una costante positiva e non nulla.

a. Ricavare dopo quanto tempo dall'assunzione si ha la quantità massima di melatonina nell'organismo. (3 punti)
b. Sapendo che la pastiglia contiene 5 mg di melatonina, calcolare il valore di *k*. (1 punto)
c. Utilizzando il valore di *k* trovato, studiare la funzione data. (6 punti)
d. Effettuando uno studio per punti, tracciare il grafico dettagliato della funzione *Q(t)* e ricavare dopo quanto tempo la quantità di melatonina nel sangue scende al di sotto di 1 mg. (2 punti)

3) Calcolo integrale: Mitosi cellulare (6 punti)

La mitosi è il processo di divisione cellulare che permette a una cellula madre di generare due cellule figlie geneticamente identiche. È una fase fondamentale del ciclo cellulare e avviene nelle cellule eucariotiche, garantendo la crescita, la riparazione dei tessuti e la sostituzione delle cellule danneggiate.

Sia data la seguente funzione che modellizza la velocità di crescita del numero di un particolare tipo di cellule nel tempo (in minuti):

$$v(t) = kt^2 e^{t^3-1}$$

a. Ricavare la formula che permette di calcolare il numero di cellule sviluppate per mitosi in funzione del tempo. (4 punti)
b. Supponendo che la crescita per mitosi parta da una singola cellula, calcolare il valore di *k* perché dopo un minuto si abbiano 60 cellule. (2 punti)

4) Statistica: Puzzle (7 punti)

Un'azienda produttrice di puzzle vuole effettuare un'indagine statistica sul legame tra il numero di vendite e la tipologia di puzzle acquistati in termini di numero di pezzi.

La statistica prende come campione di 8 000 puzzle venduti e suddivisi come segue:

Tipologia	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Numero di pezzi	1000	1500	2000	5000	10000
Puzzle venduti	3020	2481	1794	514	191

a) Tenendo conto sia del peso diverso che ciascuna tipologia ha all'interno della popolazione dei puzzle venduti che della dimensione della popolazione considerata, verificare il tipo di correlazione tra il numero di vendite e la tipologia di prodotto in termini di numero di pezzi del puzzle. (3 punti)
b) Visualizzare il legame tra il numero di vendite e la relativa tipologia, sovrapponendolo ad un modello di regressione lineare. (2 punti)
c) Utilizzando un test adeguato, verificare l'ipotesi che il numero di vendite per pezzo sia mediamente pari a 1.83. (2 punti)

Valori di riferimento per i test di ipotesi

Test T				
α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	6.314	12.706	63.657	636.619
2	2.920	4.303	9.925	31.599
3	2.353	3.182	5.841	12.924
4	2.132	2.776	4.604	8.610
5	2.015	2.571	4.032	6.869
6	1.943	2.447	3.707	5.959
7	1.895	2.365	3.499	5.408
8	1.860	2.306	3.355	5.041
9	1.833	2.262	3.250	4.781
10	1.812	2.228	3.169	4.587
11	1.796	2.201	3.106	4.437
12	1.782	2.179	3.055	4.318
13	1.771	2.160	3.012	4.221
14	1.761	2.145	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.845	3.850
21	1.721	2.080	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.807	3.768
24	1.711	2.064	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.779	3.707
27	1.703	2.052	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.750	3.646
39	1.685	2.023	2.708	3.558
49	1.677	2.010	2.680	3.500
59	1.671	2.001	2.662	3.463
69	1.667	1.995	2.649	3.437
79	1.664	1.990	2.640	3.418
89	1.662	1.987	2.632	3.403
99	1.660	1.984	2.626	3.392

Test Z				
α	0.10	0.05	0.01	0.001
	1.645	1.960	2.576	3.291

Test χ^2				
α / v	0.10	0.05	0.01	0.001
1	2.706	3.841	6.635	10.828
2	4.605	5.991	9.210	13.816
3	6.251	7.815	11.345	16.266
4	7.779	9.488	13.277	18.467
5	9.236	11.070	15.086	20.515
6	10.645	12.592	16.812	22.458
7	12.017	14.067	18.475	24.322
8	13.362	15.507	20.090	26.124
9	14.684	16.919	21.666	27.877
10	15.987	18.307	23.209	29.588
11	17.275	19.675	24.725	31.264
12	18.549	21.026	26.217	32.909
13	19.812	22.362	27.688	34.528
14	21.064	23.685	29.141	36.123
15	22.307	24.996	30.578	37.697
16	23.542	26.296	32.000	39.252
17	24.769	27.587	33.409	40.790
18	25.989	28.869	34.805	42.312
19	27.204	30.144	36.191	43.820
20	28.412	31.410	37.566	45.315
21	29.615	32.671	38.932	46.797
22	30.813	33.924	40.289	48.268
23	32.007	35.172	41.638	49.728
24	33.196	36.415	42.980	51.179
25	34.382	37.652	44.314	52.620
26	35.563	38.885	45.642	54.052
27	36.741	40.113	46.963	55.476
28	37.916	41.337	48.278	56.892
29	39.087	42.557	49.588	58.301
30	40.256	43.773	50.892	59.703

$$Z^* = \frac{|x - \mu|}{\sigma}\sqrt{n} \qquad T^*_{n-1} = \frac{|x - \mu|}{s}\sqrt{n}$$

$$\chi^2_{(n-1)(m-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i^{expected} - f_i^{observed}\right)^2}{f_i^{expected}}$$

Retta di regressione lineare (generica): $m = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X{}^2}$ $\quad q = \bar{y} - m\bar{x}$

SOLUZIONI

1) GEOMETRIA ANALITICA

DATI

$$x_C = -1 \quad y_C = 0 \qquad r = 3 \rightarrow r^2 = 9$$

$$x_A = -2 \quad y_A = 5 \qquad x_B = 2 \quad y_B = -3$$

SOLUZIONE

Equazione della circonferenza:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$$

Equazione della retta:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow y = -2x + 1$$

I punti di intersezione si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$5x^2 - 2x - 7 = 0$$

Con soluzioni:

$$\begin{cases} x_{P1} = -1 \\ x_{P2} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $y_P = -x_P + 1$ e, perciò, facendo attenzione a cambiare di segno x_P:

$$\begin{cases} y_{P1} = 3 \\ y_{P2} = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Infine, si ottiene

$$\mathrm{P}_1(-1;\ 3)\ ,\mathrm{P}_2\left(\frac{7}{5};\ -\frac{9}{5}\right)$$

2) STUDIO DI FUNZIONE

DATI

$$Q(t) = \frac{k\,t}{t^2+1} \qquad Q_M = 5\,mg \quad Q_S = 1\,mg$$

a)

$$Q'(t) = k\,\frac{t^2+1-t\,(2t)}{(t^2+1)^2} = \; k\,\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = k\,\frac{(1+t)(1-t)}{(t^2+1)^2}$$

$$Q'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad = (1+t)(1-t) = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t_M = 1\,hr}$$

b)

$$Q_M = Q(t = t_M) = Q(1) = 5 \quad \rightarrow \quad \frac{k \cdot 1}{1^2+1} = 5 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 10}$$

c)

$$\boldsymbol{Q(t) = \frac{10\,t}{t^2+1} \qquad con\; t \geq 0}$$

- DOMINIO

$$t^2 + 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{D\colon\; t \geq 0}$$

- INTERSEZIONI ASSE X

$Q(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A(0;0)}$

- INTERSEZIONI ASSE Y

$t = 0 \quad \rightarrow \quad Q_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B \equiv A(0;0)}$

- STUDIO DEL SEGNO

$$Q(t) > 0$$

$N(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t > 0$
$D(t) > 0 \quad \rightarrow \quad t^2+1 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall t \in R$

$$Q(t) > 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t > 0}$$

- LIMITI – COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{10\,t}{t^2+1} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{t^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t}\right) = 0^+$$

- SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA ED ESTREMI RELATIVI

$$\boldsymbol{Q'(t) = 10\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}}$$

$Q'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad (1+t)(1-t) = 0$

$t_1 = 1$

$t_2 = -1$ FUORI DOMINIO

$Q'(t) \geq 0$

$N'(t) \geq 0 \rightarrow 1 - t^2 \geq 0 \rightarrow -1 \leq t \leq 1 \rightarrow 0 \leq t \leq 1$

$D'(t) \geq 0 \rightarrow (t^2+1)^2 \geq 0 \rightarrow \forall t \in R$

$\boldsymbol{Q'(t) \geq 0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{0 \leq t \leq 1} \quad \rightarrow \quad \textit{Punto di Massimo } \boldsymbol{M(1;5)}$

- SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA E PUNTI DI FLESSO

$$Q''(t) = 10\frac{-2t\,(t^2+1)^2 - (1-t^2)\cdot 2t \cdot 2(t^2+1)}{(t^2+1)^4} = 20\,t\,\frac{t^2-3}{(t^2+1)^3}$$

$$Q''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2t + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F_1 \equiv A(0;0) \quad F_2\left(\sqrt{3};\, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = F_2(1.732;\ 4.33)}$$

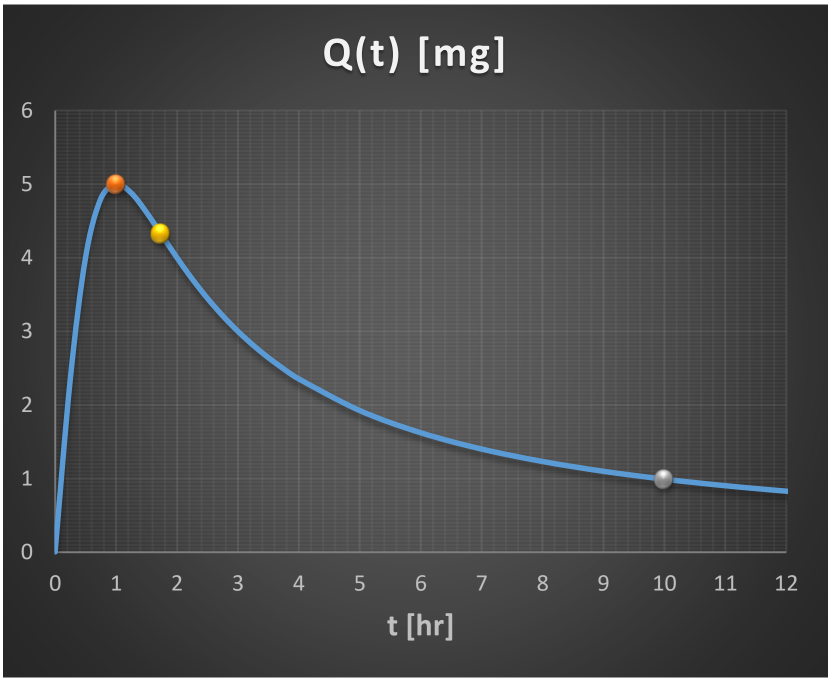
$Q''(t) > 0$

$$\begin{cases} 20\,t > 0 \\ t^2 - 3 > 0 \\ (t^2+1)^3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < -\sqrt{3} \cup t > \sqrt{3} \\ \forall t \in R \end{cases} \rightarrow -\sqrt{3} < t < 0 \ \cup\ t > \sqrt{3} \ \rightarrow \ \boldsymbol{t > \sqrt{3}}$$

d)

$$Q(t) = 10\,\frac{t}{t^2+1} \qquad con\ t \geq 0 \qquad Q_S = 1\ mg$$

t [hr]	Q(t) [mg]
0	0.00
0.25	2.35
0.5	4.00
0.75	4.80
1	5.00
1.25	4.88
1.5	4.62
1.732	4.33
1.75	4.31
2	4.00
2.25	3.71
2.5	3.45
2.75	3.21
3	3.00
3.25	2.81
3.5	2.64
3.75	2.49
4	2.35
5	1.92
6	1.62
7	1.40
8	1.23
9	1.10
10	0.99
11	0.90
12	0.83



$$Q_S = 1\ mg \quad \rightarrow \quad t_S \approx 10\ hr$$

3) INTEGRALE

$$v(t) = kt^2 e^{t^3-1}$$

a)

Per calcolare il numero di cellule formetesi fino ad un certo momento t_x, bisogna svolgere l'integrale definito della funzione tra 0 e t_x :

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t)\, dt$$

$$N(t) = \int_0^{t_x} v(t) dt = k \int_0^{t_x} t^2 e^{t^3-1}\ dt = k \int_0^{t_x} t^2 e^{t^3} \cdot e^{-1}\, dt$$

$$N(t) = \frac{k}{e} \int_0^{t_x} t^2 e^{t^3}\ dt = \frac{k}{e} \left(\frac{1}{3}\right) \int_0^{t_x} 3\, t^2\, e^{t^3}\ dt = \frac{k}{3e} \left[e^{t^3} + c\right]_0^{t_x} = \frac{k}{3e} \left[e^{t_x{}^3} - 1\right]$$

Tenendo conto infine delle condizioni iniziali:

$$\boldsymbol{N(t) = N_0 + \frac{k}{3e}\left(e^{t_x{}^3} - 1\right)}$$

b) DATI: $N_0 = 1$ $N_1 = 60$

$$N(t_x = 1) = N_1 = 60 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{k}{3e}(e-1) = 60$$

$$k = 59 \frac{3e}{e-1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 280}$$

4) STATISTICA

Tipologia	A	B	C	D	E
Numero di pezzi	1000	1500	2000	5000	10000
Puzzle venduti	3020	2481	1794	514	191

a)

Avendo un numero di unità (puzzle venduti) pari a 8 000, NON si deve far riferimento agli indicatori di tipo campionario, bensì a quelli classici. Inoltre, come suggerito nel testo, ad ogni tipologia corrisponde un diverso numero di puzzle, perciò la media per la tipologia di puzzle dovrà essere calcolata come media ponderata piuttosto che aritmetica.

	Media	Varianza	Dev Std
Tipologia (pezzi)	1 851	15 437 633	3 929
Puzzle venduti	1 600	1 198 975	1 095

Si possono ora ottenere covarianza e coefficiente di correlazione (con N = 5):

$$\sigma_{xy} = \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = -3\,378\,100$$

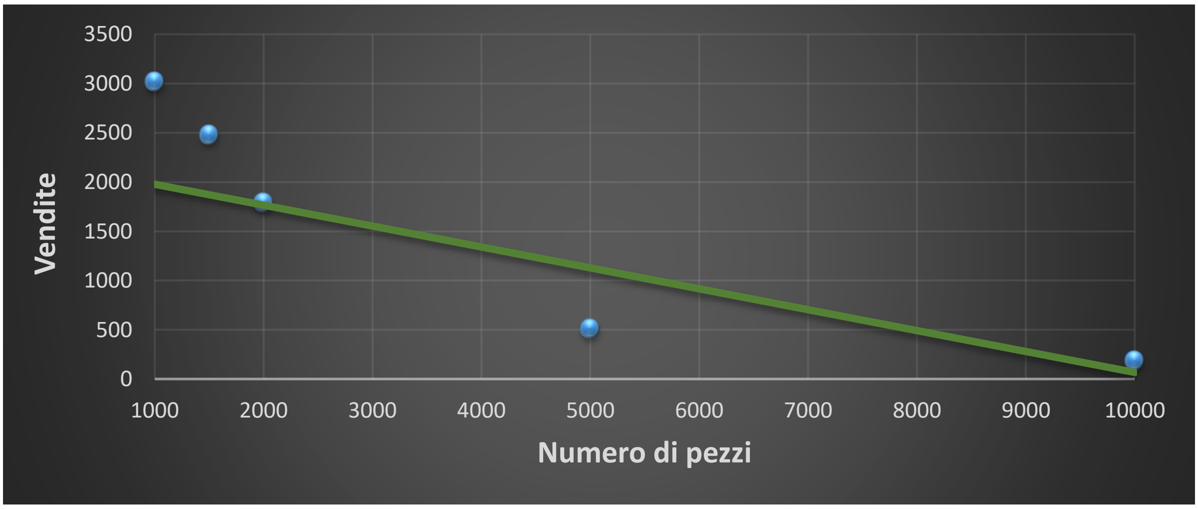
$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -0.762$$

La correlazione è quindi di natura forte e le grandezze sono inversamente correlate.

b)

La retta di regressione risulta essere:

$$\boldsymbol{y = -0.21\,x + 2\,191}$$



c)

Il test fa riferimento al numero di vendite per pezzo di puzzle, quindi si dovrà ottenere la relativa serie di dati mediante il rapporto tra il numero di puzzle venduti ed il numero di pezzi del puzzle:

Tipologia	A	B	C	D	E
Numero di pezzi	1000	1500	2000	5000	10000
Puzzle venduti	3020	2481	1794	514	191
Vendite per pezzo	3.02	1.654	0.897	0.1028	0.0191

Il test da effettuare dipende sostanzialmente dal numero di campioni considerati che, in questo caso è pari a $n = 8000$. Per questo motivo, dovrà essere effettuato un test di tipo Z e dovrà essere calcolata la seguente quantità pivotale:

$$\boxed{Z^* = \frac{X - \mu}{\sigma}\sqrt{n}}$$

E' necessario quindi calcolare media e deviazione standard della serie di dati ottenuta:

Media (ponderata)	**1.86**
Varianza	1.76
Dev Std	1.327
Pivot T*	**2.104**

Test Z				
α	0.10	0.05	0.01	0.001
	1.645	1.960	2.576	3.291

Confrontando il valore ottenuto con quelli tabulati, si ottiene che l'ipotesi nulla H_0 secondo la quale il numero di vendite per pezzo di puzzle sia pari a **1.83** è <u>negabile al 95% ma non al 99%</u>.