

# Uo sguardo verso il futuro

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

# Il concetto cantoriano di insieme

Secondo Casari, il concetto cantoriano di insieme è contraddistinto dalle seguenti proprietà:

- ① La sua *esistenza* in corrispondenza a ogni molteplicità di enti distinti caratterizzabile da una condizione.
- ② La sua *determinazione* completa da parte degli elementi della molteplicità corrispondente.
- ③ La sua *sostanzialità*, nel duplice aspetto di:
  - 3a. *individualità*: capacità al pari di ogni sostanza individuale di godere di attributi, ovvero di essere elemento di molteplicità.
  - 3b. *assolutezza*: indipendenza da ogni possibilità linguistico-teoretica di caratterizzarlo.

# Differenze tra Russell e Zermelo

- Sia per Russell che per Zermelo la radice delle antinomie sta nell'ammissione incondizionata della proprietà di esistenza (altri autori, tra cui von Neumann e Ackermann, la individuano invece nella proprietà di individualità). Per entrambi, bisogna eliminare l'indiscriminata possibilità di costruire insiemi in corrispondenza ad ogni condizione.
- Tuttavia, Russell pensa che che la limitazione debba riguardare la *natura delle sostanze* che intervengono come elementi delle molteplicità: l'esistenza di un insieme va ammessa solo in corrispondenza a molteplicità omogenee dal punto di vista della gerarchia dei tipi.
- Zermelo pensa invece che la limitazione debba riguardare la *natura delle molteplicità stesse*: l'esistenza di un insieme va ammessa solo in corrispondenza a molteplicità costruite mediante ben determinati processi.

# Zermelo: gli assiomi della teoria (1)

Nelle *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* (1908), Zermelo pensa che il principio di comprensione permetta di fabbricare insiemi “troppo grandi”, come l’insieme di tutti gli insiemi o l’insieme di Russell. Lo sostituisce quindi con una serie di principi più deboli che permettono di fabbricare insiemi “abbastanza” ma non “troppo” grandi. La sua teoria ZC verte intorno a un dominio di oggetti chiamati “cose”. Una cosa  $x$  può essere elemento di un’altra cosa  $y$ , scritto  $x \in y$ . Gli insiemi sono (con l’eccezione dell’insieme vuoto) quelle particolari cose che hanno almeno un elemento.

Si tratta di una teoria assiomatica: i teoremi della teoria sono le proposizioni logicamente derivabili dai seguenti assiomi.

- *Assioma di determinatezza*. Se ogni elemento dell’insieme  $x$  è anche elemento dell’insieme  $y$  e viceversa, allora  $x = y$ .

## Zermelo: gli assiomi della teoria (2)

- *Assioma degli insiemi elementari.* Esiste un insieme improprio,  $\emptyset$ , che non contiene alcun elemento. Se  $x$  è una cosa del dominio, esiste l'insieme  $\{x\}$  che ha come unico elemento  $x$ . Se  $x, y$  sono cose, esiste l'insieme  $\{x, y\}$  che ha come elementi esclusivamente  $x$  e  $y$ .
- *Assioma di isolamento.* Se il predicato  $\alpha(x)$  è definito per tutti gli elementi di un insieme  $y$ , allora  $y$  possiede un sottoinsieme  $z$  i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di  $y$  per i quali  $\alpha(x)$  è vero.
- *Assioma dell'insieme potenza.* Dato un insieme  $x$ , esiste l'insieme  $\wp(x)$  (l'insieme potenza di  $x$ ) i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di  $x$ .

## Zermelo: gli assiomi della teoria (3)

- *Assioma della riunione.* Dato un insieme  $x$ , esiste l'insieme  $\bigcup x$  (l'insieme riunione su  $x$ ) i cui elementi sono tutti e soli gli elementi degli elementi di  $x$ .
- *Assioma di scelta.* Se  $x$  è un insieme i cui elementi sono insiemi non vuoti a due a due disgiunti, la sua riunione  $\bigcup x$  contiene un sottoinsieme  $y$  che ha in comune con ogni elemento di  $x$  uno e un solo elemento.
- *Assioma dell'infinito.* Esiste un insieme  $I$  che ha come elemento  $\emptyset$  e tale che, se  $x$  è elemento di  $I$ , allora anche  $\{x\}$  è elemento di  $I$ .

# Critiche al sistema di Zermelo (1)

- 1 *Critiche alla condizione di definitezza* (Fraenkel, Skolem). Il cruciale assioma di isolamento chiama in causa un predicato  $\alpha(x)$  “definito” per tutti gli elementi di un insieme  $y$ . Non si indica però cosa si intende per predicato “definito”. Tale vaghezza non è compatibile con le esigenze di rigore di una teoria assiomatica.
- 2 *Critiche alla piattaforma ontologica della teoria* (Fraenkel). Tra le “cose” del dominio zermeliano si possono trovare anche oggetti di natura non matematica o non concettuale. Si tratta di una ridondanza ontologica inutile per l’edificazione della matematica.

## Critiche al sistema di Zermelo (2)

- 1 *Critiche alla debolezza della teoria* (Fraenkel). ZC non permette di dimostrare l'esistenza di alcuni insiemi importanti per la teoria del transfinito: ad esempio, se  $I$  è l'insieme la cui esistenza è garantita dall'assioma dell'infinito, ZC non può dimostrare l'esistenza di

$$F = \{I, \wp(I), \wp(\wp(I)), \dots\}$$

- 2 *Critiche agli insiemi sfondati* (Mirimanoff). ZC non permette però neanche di escludere l'esistenza di alcuni insiemi "indesiderabili" contenenti una catena infinita di insiemi legati dalla relazione di appartenenza, ossia di insiemi *sfondati*  $x$  per cui esistono insiemi  $x_1, x_2, \dots$  (non necessariamente distinti tra loro o da  $x$ ) tali che

$$\dots x_{n+1} \in x_n \in \dots \in x_2 \in x_1 \in x.$$

# Thoralf Skolem (1887-1963)



# La condizione di definitezza: la soluzione di Skolem

Skolem propone di interpretare l'espressione zermeliana “predicato definito” come una formula della logica dei predicati del primo ordine contenente una variabile libera e costituita mediante i connettivi e i quantificatori a partire da formule atomiche della forma  $x \in y$  e  $x = y$ . Con la proposta di Skolem, la teoria degli insiemi fa la sua transizione da teoria assiomatica informale, sul modello degli *Elementi* di Euclide, a teoria assiomatica *formalizzata* nel senso moderno hilbertiano.

# Abraham Fraenkel (1891-1965)



# La piattaforma ontologica: la soluzione di Fraenkel

Fraenkel osserva che la caratteristica fondamentale (e l'unica effettivamente impiegata nella costruzione della teoria) delle sostanze individuali zermeliane, ossia delle cose che non sono insiemi, è la loro “atomicità”, ovvero il fatto che non hanno elementi. Ma tale caratteristica è condivisa anche dall'insieme vuoto.

Fraenkel allora modifica l'assioma di determinatezza, facendo sì che non valga solo per insiemi, ma per tutte le cose:

- *Assioma di determinatezza (versione di Fraenkel)*. Se ogni elemento della cosa  $x$  è anche elemento della cosa  $y$  e viceversa, allora  $x = y$ .

Quindi, tutte le cose prive di elementi si trovano a coincidere tra loro e con l'insieme vuoto.

# La piattaforma ontologica: la soluzione di Fraenkel

Fraenkel osserva che la caratteristica fondamentale (e l'unica effettivamente impiegata nella costruzione della teoria) delle sostanze individuali zermeliane, ossia delle cose che non sono insiemi, è la loro “atomicità”, ovvero il fatto che non hanno elementi. Ma tale caratteristica è condivisa anche dall'insieme vuoto.

Fraenkel allora modifica l'assioma di determinatezza, facendo sì che non valga solo per insiemi, ma per tutte le cose:

- *Assioma di determinatezza (versione di Fraenkel)*. Se ogni elemento della cosa  $x$  è anche elemento della cosa  $y$  e viceversa, allora  $x = y$ .

Quindi, tutte le cose prive di elementi si trovano a coincidere tra loro e con l'insieme vuoto.

# Soluzione alle altre difficoltà

Fraenkel arricchisce la teoria ZC con il seguente assioma:

- *Assioma di rimpiazzamento.* Se  $x$  è un insieme e  $f$  è una funzione, allora esiste l'insieme di tutti gli  $f(y)$  tali che  $y \in x$ .

Questo assioma permette di dimostrare l'esistenza dell'insieme  $F$ , perché esiste una corrispondenza biunivoca da  $I$  a  $F$ .

Von Neumann arricchisce la teoria ZC con il seguente assioma:

- *Assioma di fondazione.* Ogni insieme non vuoto  $x$  contiene un elemento  $y$  disgiunto da  $x$ .

Questo assioma permette di escludere l'esistenza di insiemi sfondati. Se infatti esistessero  $x, x_1, x_2, \dots$  tali che

$$\dots x_{n+1} \in x_n \in \dots \in x_2 \in x_1 \in x,$$

allora  $w = \{x_1, x_2, \dots\}$  avrebbe in comune con ogni  $x_i$  almeno l'elemento  $x_{i+1}$ , contro l'assioma di fondazione.

La teoria ZC con le modifiche di Skolem, Fraenkel, von Neumann, è nota come ZFC.

# Il paradosso di Skolem

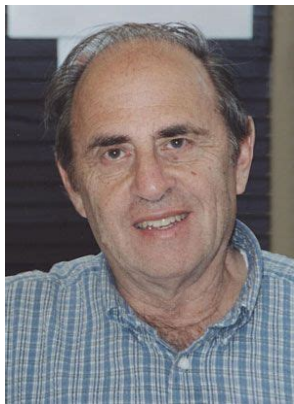
ZFC è una teoria assiomatica formale basata sulla logica dei predicati del primo ordine. Il teorema di Löwenheim-Skolem ci dice che se una tale teoria ha un modello, allora ha un modello *numerabile*. Ma ciò è in tensione con il teorema di Cantor: l'insieme dei numeri reali, che è più che numerabile, è chiaramente tra gli insiemi di cui ZFC dimostra l'esistenza. L'insieme  $R$ , quindi, è numerabile o non lo è?

Skolem: l'esistenza o non-esistenza di un insieme non ha un carattere assoluto, ma è relativa alla teoria nella quale ci si sta muovendo (*relativismo skolemiano*). Il teorema di Cantor non afferma in assoluto la non-esistenza dell'insieme (funzione) che mette in corrispondenza biunivoca  $N$  con  $R$ , ma stabilisce solo che in ogni modello di ZFC tale insieme viene a mancare.

# Kurt Gödel (1906-1978)



# Paul Cohen (1934-2007)



# I risultati di Gödel e di Cohen

Nel 1934, Gödel dimostra che l'assioma di scelta e l'ipotesi del continuo sono compatibili con ZF (la teoria che si ottiene togliendo l'assioma di scelta da ZFC). Esibisce cioè un modello (il *modello dei costruibili*) in cui sono veri sia tutti gli assiomi di ZFC che l'ipotesi del continuo CH. Questo significa che se in ZFC+CH dimostro una contraddizione, allora tale contraddizione è già dimostrabile in ZF.

Nel 1963, Cohen dimostra che l'assioma di scelta e l'ipotesi del continuo sono *indipendenti* da ZF: non possono essere dimostrati dai rimanenti assiomi di ZF.

# Abraham Robinson (1918-1974)



Robinson reintroduce gli infinitesimi nell'analisi semplicemente *ampliando* l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali con dei nuovi elementi (gli *infinitesimi*, appunto) che non soddisfano il postulato di Eudosso-Archimede:

## Definition

- 1 Un *numero infinitesimo* è un numero  $dx$  tale che, per ogni intero positivo  $n$ , si ha  $0 < dx < \frac{1}{n}$ .
- 2 Un *numero iperreale* è la somma  $x + dx$  di un numero reale e di un numero infinitesimo.

La *parte standard*  $st(x + dx)$  di un numero iperreale  $x + dx$  è  $x$ .

# Robinson: la derivata, revisited

Si ricordi che nell'approccio standard di Cauchy-Bolzano la derivata di una funzione  $f$  nel punto  $x$  è il limite del rapporto incrementale in quel punto:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Per Robinson, invece:

$$f'(x) = st \left( \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \right).$$

Esempio:

$$\begin{aligned} st \left( \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \right) &= st \left( \frac{x^2 + dx^2 + 2xdx - x^2}{dx} \right) \\ &= st \left( \frac{dx(2x + dx)}{dx} \right) \\ &= st(2x + dx) = 2x. \end{aligned}$$

- Errett Bishop (1928-1983), matematico di simpatie costruttiviste, è scettico sulle teorie che impiegano strumenti non costruttivi come l'assioma di scelta. L'analisi non standard, in particolare, viene criticata in quanto conduce a uno "svilimento di significato" del calcolo e, se usata nella didattica, richiede complicazioni tecniche che rendono la disciplina ancora più incomprensibile agli studenti, a dispetto della presunta maggiore aderenza all'intuizione.
- Per Paul Halmos (1916-2006), l'analisi non standard "è un meccanismo speciale, troppo speciale, e altri meccanismi possono fare tutto quello che essa può fare. Si tratta di una questione di gusti".
- Henk Bos (n. 1940) ritiene che l'analisi non standard abbia soprattutto un valore storico, nello spiegare come il calcolo infinitesimale si sia potuto sviluppare sulle fondamenta incerte dell'accettazione di quantità infinitamente piccole e infinitamente grandi.

# Gerhard Gentzen (1909-1945)



- Allievo di Hilbert e Weyl, Gentzen trasforma la metamatematica hilbertiana in una disciplina metodologicamente autonoma e matura, la *teoria della dimostrazione*.
- In *Untersuchungen über das logischen Schließen* (1934-35) introduce i calcoli della deduzione naturale e delle sequenze, con l'obiettivo di rendere le dimostrazioni nei sistemi formali al primo ordine più simili all'effettivo procedere dei matematici.
- In *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie* (1936) usa i calcoli delle sequenze per formalizzare l'aritmetica di Peano e dimostrarne la noncontraddittorietà con metodi che, sebbene non finitisti, sono in senso lato *costruttivi*.

# Gentzen: il calcolo delle sequenze (1)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \beta, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\alpha \rightarrow \beta, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\rightarrow S) \quad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \rightarrow \beta} (\rightarrow D)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \alpha, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\text{Cesura})$$

$$\frac{\frac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \frac{\beta \Rightarrow \beta}{\beta, \alpha \rightarrow \gamma \Rightarrow \beta}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha \Rightarrow \beta} \quad \frac{\frac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \gamma \Rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma, \alpha \Rightarrow \gamma}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha \Rightarrow \gamma}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma}}{\Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma))}$$

## Gentzen: il calcolo delle sequenze (2)

Con il suo *Hauptsatz* (teorema principale), Gentzen dimostra che la regola di cesura è eliminabile dai calcoli delle sequenze per la logica del primo ordine, sia classica che intuizionista. Ciò significa che ogni sequenza che risulta dimostrabile in tali calcoli facendo uso della cesura è dimostrabile anche senza far uso della cesura. La procedura di dimostrazione dell'*Hauptsatz* è algoritmica e costruttiva.

# Gentzen: la consistenza dell'aritmetica

Il risultato di eliminazione delle cesure non si estende a teorie con postulati specifici, in particolare all'aritmetica di Peano. Tuttavia, Gentzen associa ad ogni dimostrazione formale un ordinale transfinito

$\mu < \varepsilon_0 = \omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} \dots$  che (in un certo senso) misura il numero di applicazioni della regola di cesura. Fa vedere che se esistesse in PA una dimostrazione di una contraddizione di dato ordinale  $\mu$ , eliminando applicazioni della cesura si avrebbe una dimostrazione della stessa contraddizione di ordinale  $\nu < \mu$ . La dimostrazione della contraddizione si potrebbe già svolgere nel finito.

La dimostrazione di Gentzen non è finitista. Si presta a un'obiezione di circolarità: per giustificare l'induzione sino a  $\omega$  deve ricorrere all'induzione transfinita sino a  $\varepsilon_0$ . Tale obiezione, però, è mal posta. La dimostrazione di Gentzen coinvolge solo proprietà finitiste, combinatorie, delle dimostrazioni, e solo su queste utilizza l'induzione sino a  $\varepsilon_0$ . L'unica cosa che presuppone è che  $\varepsilon_0$  sia il tipo d'ordine di un buon ordine, e questa assunzione non è giustificabile nell'aritmetica.

- Sistemi infinitari con  $\omega$ -regola (Schütte, Tait).
- Indagine sui principi di riflessione (Kreisel, Levy).
- Sviluppi della teoria dei tipi (Kreisel, Feferman).
- Normalizzazione delle dimostrazioni in deduzione naturale (Prawitz).

- Sistemi di analisi predicativa (Weyl, Kreisel).
- Indagine sul contenuto costruttivo dell'aritmetica intuizionista (Gödel).
- Teoria dei tipi intuizionista (Martin-Löf).
- Modello della realizzabilità (Kleene).
- Isomorfismo di Curry-Howard.
- Semantica dei mondi possibili (Kripke).