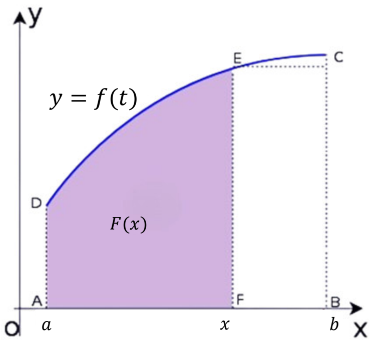
Integrale indefinito

Funzione integrale

Definizione

Sia f una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a,b]$ *e* $x\in[a,b]$, *si definisce* *FUNZIONE INTEGRALE di f, l'integrale definito*:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$



Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f continua in $[a,b]$, *allora la funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ \text{ è di classe } C^1([a,b])$$

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

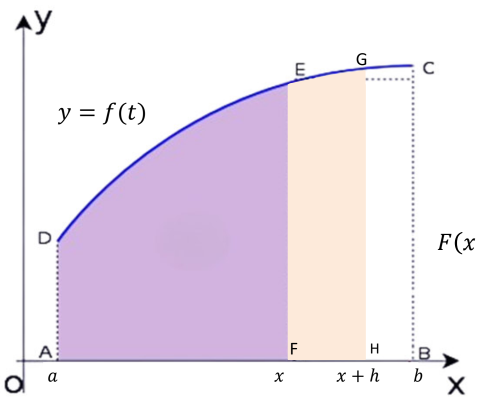
Dimostrazione

Scriviamo il rapporto incrementale di $F(x)$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right]$$



$F(x) = Area\ sotto\ la\ curva\ DE$

$F(x+h) = Area\ sotto\ la\ curva\ DG$

$F(x+h) - F(x) = Area\ sotto\ la\ curva\ EG$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Per il Teorema della media integrale applicato ad f in $[x;x+h]$, $\exists\, c_h \in (x, x+h)$:

$$\frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right] = f(c_h)$$

Per cui si ricava $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h)$

Ed essendo f continua in $[a,b]$ *si ha la tesi, ossia*:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f\,(c_h) = f(x)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Osservazione

L'ipotesi di continuità per f è fondamentale per la derivabilità di F.
Infatti se f è solo integrabile <u>non</u> si può affermare che F è derivabile.

Esempio

$$f(x) = segn\, x = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x) = |x|$$

f(x) è integrabile ma non è continua, F(x) è continua ma non è derivabile in x=0.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizione

Una funzione F(x), *derivabile in* [a,b], *si chiama* *PRIMITIVA di* $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Esempio

Una primitiva di $f(x) = \cos x$ *è la funzione* $F(x) = \sin x$.

Se $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3}$

Integrale indefinito

Se *$F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ lo è anche $F(x)+c$*

Infatti $\quad (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

Definizione

La famiglia di tutte le primitive di una funzione $f(x)$

continua in [a,b] *è detta* *INTEGRALE INDEFINITO* *e si indica*:

$$\int f(x)dx$$

quindi

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Corollario del Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ *una funzione continua su* $[a,b]$ *e* $G(x)$ *una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

Esempio

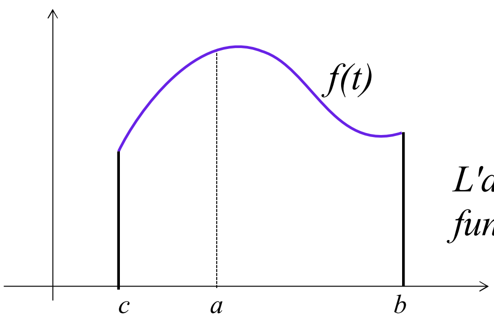
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Dimostrazione

Consideriamo una funzione f(t) definita in un intervallo [c,b]



L'area del sottografico della funzione f con $x \in [a,b]$ *è dato da:*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Ma ricordando che la funzione integrale in un generico punto x è dato dalla relazione

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

si ha che $F(a) = \int_c^a f(t)dt$ *e* $F(b) = \int_c^b f(t)dt$

Sono rispettivamente la funzione integrale in a e b

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Ossia l'integrale definito è dato dalla differenza tra la funzione potenziale calcola tra b e a => $F(b) - F(a)$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Questo è il <u>legame</u> tra l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ *e l'integrale indefinito* $\int f(x)dx$.

$\int_a^b f(x)dx$ *è un numero reale*

$\int f(x)dx$ *è un insieme di funzioni*

Integrale indefinito, proprietà

Dalle proprietà delle derivate si ottiene:

i) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$

ii) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \qquad c = costante$

Integrali indefiniti immediati

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \alpha = 1$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Integrali riconducibili a integrali immediati

Sia F una primitiva di f in un intervallo I, ossia

$F'(t)=f(t) \quad \forall\ t \in I$

Sia t=g(x) una funzione derivabile con derivata continua in [a,b] : g([a,b])⊂I,

dal teorema della derivata di una funzione composta

$$D[F(g(x)] = F'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Integrali riconducibili a integrali immediati

Integrando membro a membro otteniamo:

$$\int D[F(g(x)] = \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx$$

Ossia

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c$$

Integrali riconducibili agli integrali immediati

Questo significa che se

$$\int D[F(g(x)] = \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx$$

Ossia

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esercizi

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)dx \qquad n \neq -1$$

Posto $f(x) = t$ *e differenziando* $f'(x)dx = dt$
sostituendo nella precedente si ottiene

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

Esprimendo questa soluzione nell'incognita x si ottiene

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esempi

$$\int (x^2-1)x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-1)^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^4}{4} + C$$

$$\int \sin x\ \cos^2 x\,dx = -\int -\sin x \cos^2 x\,dx = \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}\cdot ln^2(1+x^2)dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}[ln(1+x^2)]^2 = \frac{\ln^3(1+x^2)}{6} + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esercizi

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

Posto $f(x) = t$ *e differenziando* $f'(x)dx = dt$
sostituendo nella precedente si ottiene

$$\int \frac{1}{t}dt = ln|t| + c$$

Esprimendo questa soluzione nell'incognita x si ottiene

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esempi

$$\int \frac{2x}{(x^2-1)}dx = ln|x^2-1| + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)arctgx}\,dx = \int \frac{1}{(1+x^2)}\frac{1}{arctgx}dx = ln|arctgx| + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esercizi

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx$$

Posto $f(x) = t$ *e differenziando* $f'(x)dx = dt$
sostituendo nella precedente si ottiene

$$\int e^t dt = e^t + c$$

Esprimendo questa soluzione nell'incognita x si ottiene

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esempi

$$\int 3x \cdot e^{x^2} dx = \frac{3}{2}\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{3}{2} e^{x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$\int 3 \cdot \cos(x) \cdot e^{sen(x)} dx = 3\int \cos(x) \cdot e^{sen(x)} dx = 3e^{sen(x)} + c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

In modo analogo si ottengono le primitive dei seguenti integrali

$$\int sin\big(f(x)\big) \cdot f'(x), dx = -cos\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \cos\big(f(x)\big) \cdot f'(x), dx = sen\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + \big(f(x)\big)^2} dx = arctg\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \big(f(x)\big)^2}} dx = arcsen\big(f(x)\big) + C$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esercizi

$$\int 3\cos(2x+5)\,dx = \frac{3}{2}\int 2\cos(2x+5)\,dx = \frac{3}{2}sen(2x+5)+c$$

$$\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{sen(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = 2\cdot\cos(\sqrt{x})+\mathrm{C}$$

$$\int \frac{3x}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{dx} = \frac{3}{2}arctg(1+x^2)+c$$

$$\int \frac{cosx}{1+senx^2}\,dx = arctg(senx)+c$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Esercizi

$$\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{-x^2-2x-1+1}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx$$

$$= 2arcsen(x+1)+\mathrm{C}$$

$$\int \frac{3}{4x^2-4x+2}dx = \int \frac{3}{4x^2-4x+1+1}dx = \int \frac{3}{1+(2x-1)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}arc\mathrm{tg}(2x-1)+\mathrm{C}$$

Metodi di integrazione - Sostituzione

Integrali riconducibili a integrali immediati

Esempi:

$$\int sen(2x)\,dx$$

Posto $2x = t$ e differenziando $2dx = dt$ ossia $dx = \frac{dt}{2}$

Sostituendo

$$\int sen(\mathrm{t})\frac{\mathrm{dt}}{2} = \frac{1}{2}\int sen(t)dt = -\frac{1}{2}cost + c$$

Effettuando nuovamente la sostituzione si ha:

$$\int sen(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

Metodo di integrazione per parti

Siano f e g due funzioni derivabili con derivata continua, si ha

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

$f(x)$ = *fattore finito*

$g'(x)dx$ = *fattore differenziale*

L'ipotesi che le derivate di f e g siano continue assicura che gli integrali siano ben definiti, ossia che si possano calcolare gli integrali.

Integrazione per parti

Dimostrazione

Consideriamo la formula di derivazione di un prodotto

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando membro a membro si ha

$$\int [f(x)g(x)]' dx = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$$

A primo membro abbiamo l'integrale della derivata di $f \cdot g$, *ossia due operazioni inverse per cui otteniamo*

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$$

Integrazione per parti

Dalla quale si ricava la tesi ossia

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

Esercizi

Utilizzando il metodo di integrazione per parti calcolare

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

Integrazione per parti

$$\int x\, arctg\, x\, dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx) + \mathrm{C}$$