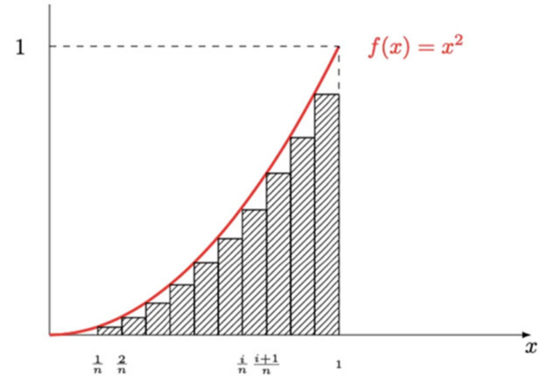
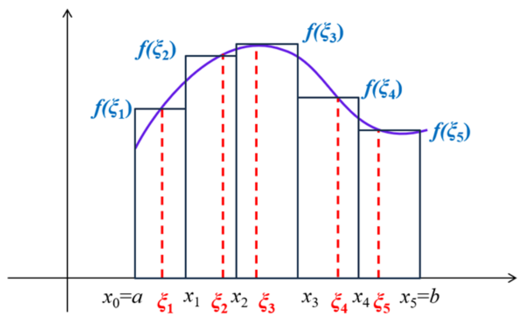
Calcolo integrale



1

Calcolo integrale

Area del sottografico



Sia $f:[a,b]\rightarrow R$, *limitata*

Costruiamo la somma di Cauchy-Riemann

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)$$

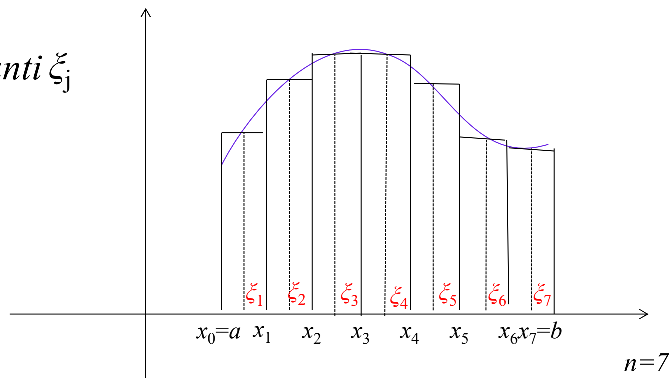
Dove la suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ *è individuata dai punti*

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n = b, \quad x_j = a + jh, \; h = \frac{b-a}{n}$$

2

Calcolo integrale

La scelta dei punti ξ_j è arbitraria



All'aumentare dei punti della suddivisione di $[a,b]$ aumenta il numero degli addendi della somma di Cauchy-Riemann e diminuisce il valore assoluto di tali addendi.

Calcolo integrale

Definizione

Si dice che la funzione $f:[a,b]\to R$, limitata, è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, se detta S_n una sua qualsiasi successione di Cauchy-Riemann, esiste finito il limite di S_n (per $n\to\infty$), e tale limite non dipende dalla scelta dei punti ξ_j. Allora si pone

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

*Si legge «*integrale da *a* a *b* in *dx*» *$f(x)$ si chiama funzione integranda e x è la variabile d'integrazione ed è una variabile muta*:

$\int_a^b f(t)dt$ *ha lo stesso significato di* $\int_a^b f(x)dx$

Calcolo integrale

$$\int_a^b f(x)dx, \ \int_I f(x)dx, \ \int_a^b f$$

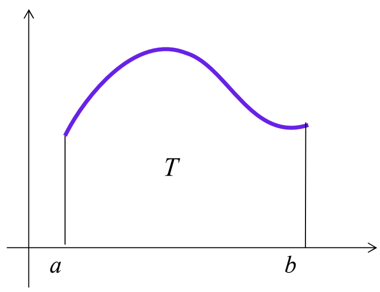
$I = [a,b]$ è il dominio di integrazione, a e b sono gli estremi di integrazione.

Se $f(x)$ è positiva allora $\int_a^b f(x)dx$ *rappresenta l'area del «sottografico» di $f(x)$.*
Infatti la somma S_n rappresenta un'approssimazione dell'area del «trapezoide T» individuato da f:

$$T : \{(x,y) \in R^2 : \ a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x)\}$$

Calcolo integrale

$$Se \ f \ge 0 \ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = area \ di \ T$$



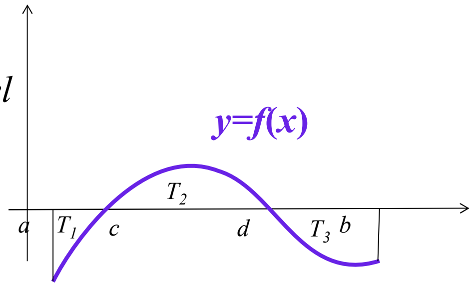
Se in $[a,b]$, f cambia segno allora $\int_a^b f(x)dx$ *è sempre un numero ma non rappresenta più l'area del sottografico di f.*

Osservazione $\int_a^b f(x)dx$ *è un numero, non dipende da x.*

Calcolo integrale

Integrale definito, interpretazione geometrica

Se f cambia segno in $[a,b]$, *e si vuole calcolare l'area del sottografico di f, allora si deve suddividere l'intervallo in tanti intervalli in cui f assume segno costante:*

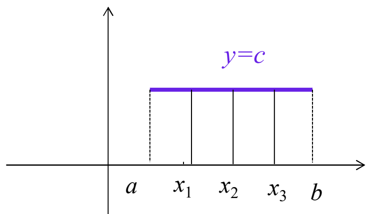


$$\left(\text{area del sottografico di } f\right) = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx$$

Calcolo integrale

L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in $I=[a,b]$ *si indica con* $R(I)$ *o* $R([a,b])$.
$R(I)$ *non è vuoto, infatti ogni funzione costante* $y=c$ *è integrabile su qualunque intervallo* $[a,b]$ *e si ha*

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$$



Per qualunque suddivisione di $[a,b]$ *si ha*

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{c} = (b-a)\,c$$

$\boxed{c+c+\ldots+c \text{ (n volte)}}$

Calcolo integrale

Teorema.
Se f:[a,b]→R è continua, allora è integrabile.

Teorema.
Se f:[a,b]→R è monotona e limitata, allora è integrabile.

Teorema.
Se f:[a,b]→R è limitata in [a,b] con un numero finito di punti di discontinuità, allora è integrabile.

Questo teorema si può estendere alle funzioni limitate con una infinità numerabile di punti di discontinuità, cioè i punti di discontinuità possono essere infiniti ma non devono essere «troppi».

Calcolo integrale

La funzione di Dirichlet su [a,b]:

$$f(x)=\begin{cases}1 & se\ x\in Q\cap[a,b]\\ 0 & se\ x\in[\mathrm{a,b}]-Q\end{cases}$$

è limitata e non è integrabile secondo Riemann (i punti di discontinuità sono «troppi»: tutto [a,b])
Infatti se si scelgono i punti ξ_j razionali si ha

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)\cdot(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n}1\cdot(x_j-x_{j-1})=(b-a)$$

Se invece si scelgono i punti ξ_j irrazionali si ha

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)\cdot(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n}0\cdot(x_j-x_{j-1})=0$$

Calcolo integrale

Integrale definito, proprietà

Siano f e g integrabili in [a,b], allora:

1. *Linearità dell'integrale: se α e β sono costanti la funzione αf(x)+βg(x) è integrabile e si ha*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

2. *Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione:*

Se $a \leq s \leq b$ *allora f è integrabile anche su* [a,s] e [s,b] e:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^s f(x)dx + \int_s^b f(x)dx$$

Calcolo integrale

Integrale definito, proprietà

3. *Positività e monotonia:*

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

In particolare

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Per convenzione, se a<b si pone $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Calcolo integrale

Teorema della media integrale

i) *Sia f limitata e integrabile secondo Riemann in* $[a,b]$

Allora $$\boxed{m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M}$$

Dove $m = \inf_{[a,b]} f \quad e \quad M = \sup_{[a,b]} f$

ii) *Se f è continua su* $[a,b]$ $\exists x_0 \in (a,b)$:

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x_0)}$$

(*valor medio integrale di f su* $[a,b]$)

Calcolo integrale

Teorema della media integrale

Dimostrazione

i) *Essendo* $f(x)$ *limitata si ha*

$$m \le f(x) \le M$$

Integrando membro a membro su $[a,b]$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

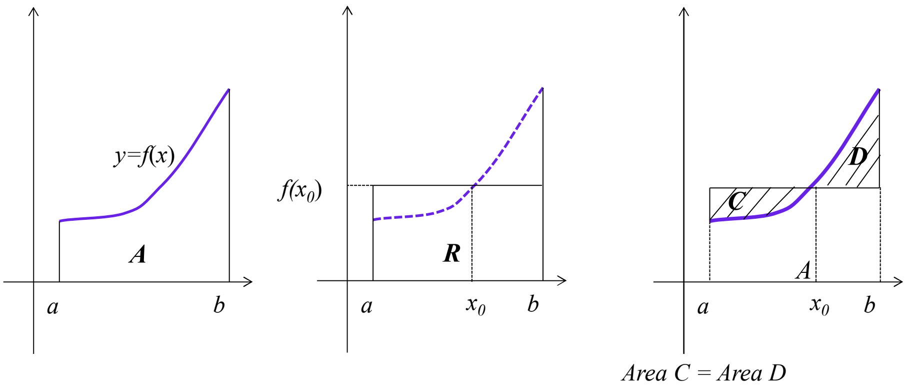
ii) *Indichiamo con* y_0 *il valore* $y_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

che è un valore compreso tra m ed M.

Essendo f continua, per il teorema dei valori intermedi, esisterà $x_0 \in (a,b)$: $f(x_0) = y_0$ *cioè la tesi*

Calcolo integrale

Teorema della media integrale



Area (A)=area(R)