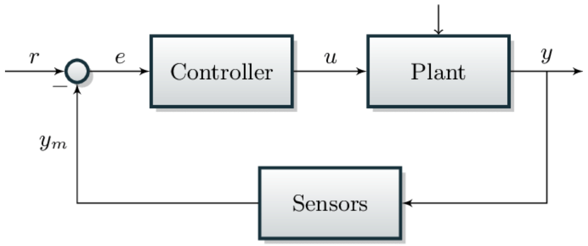


Controlli automatici

Tracciamento e interpretazione del luogo delle radici

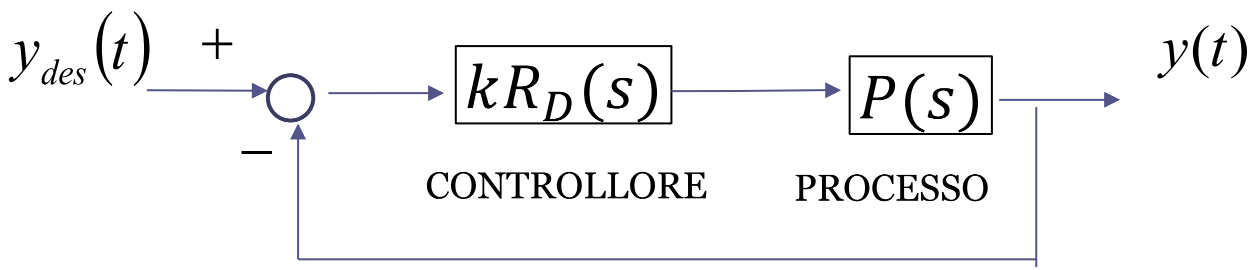
Prof. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

Il luogo delle radici nasce per risolvere il seguente problema:

Dati due polinomi P1(s) e P2(s), determinare come variano, al variare del numero reale positivo k, le radici del polinomio

$$P(s) = P_1(s) + kP_2(s) \qquad k \in [0, \infty)$$

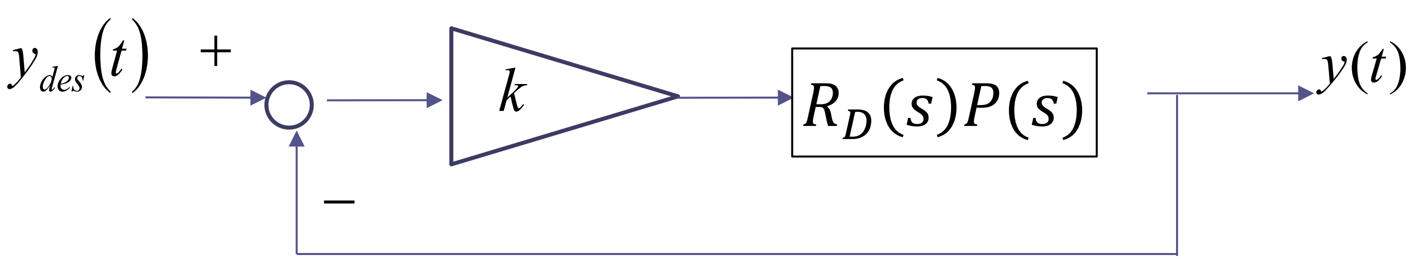
Nel contesto della teoria dei controlli, tale problema si incontra nel momento in cui si considera il seguente sistema di controllo in retroazione

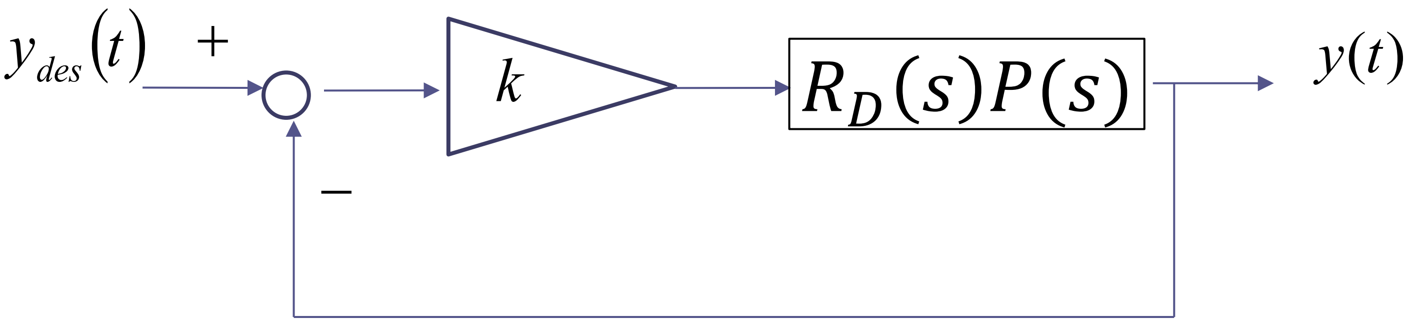


in cui k è un guadagno che deve essere tarato mentre $R_D(s)$ è gia stato assegnato, e ci si pone il problema di determinare la dipendenza dei poli della FdT a ciclo chiuso dal guadagno k (che è parte del controllore).

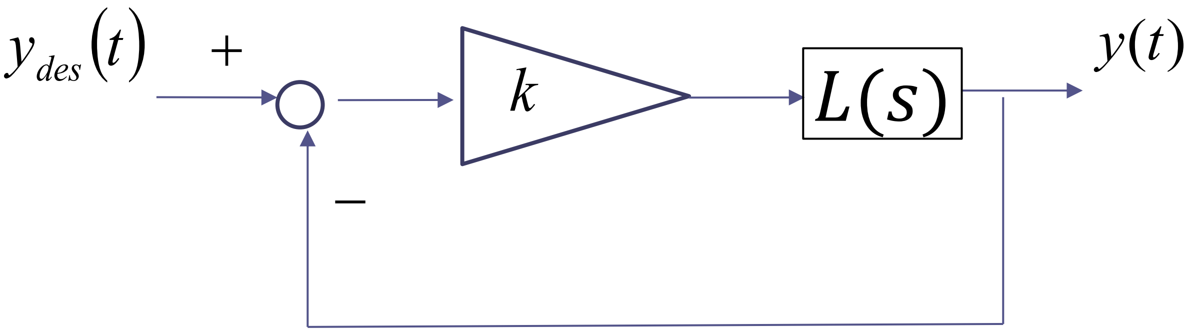
La FdT $R_D(s)$ definisce i poli e gli zeri del controllore, e viene detta «parte dinamica» del controllore.

Il sistema di controllo può essere rappresentato in forma del tutto equivalente come segue





$$L(s) = R_D(s)P(s)$$



FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita:

$$y_{des}(t) \longrightarrow \boxed{\frac{kL(s)}{1+kL(s)}} \longrightarrow y(t)$$

$$L(s) = R_D(s)P(s)$$

Sia $L(s) = \dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}$

Numeratore di L(s)

Denominatore di L(s)

La FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita è espressa in forma estesa come segue

$$W_{y_{des}}^{y}(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)} = \frac{k\dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}}{1+k\dfrac{N_L(s)}{D_L(s)}} = \frac{kN_L(s)}{D_L(s)+kN_L(s)}$$

I **poli** della FdT a ciclo chiuso sono le radici del "polinomio caratteristico"

$$P_{car}(s) = D_L(s) + kN_L(s)$$

che può essere espresso nella forma

$$P_{car}(s) = P_1(s) + kP_2(s) \qquad P_1(s) = D_L(s) \qquad P_2(s) = N_L(s)$$

Al fine di poter scegliere adeguatamente il valore del guadagno k onde garantire che il sistema di controllo sia as. stabile a ciclo chiuso e caratterizzato da prestazioni adeguate (ad esempio, con una risposta ad un set-point a gradino gradino esente da oscillazioni), risulta fondamentale comprendere come il guadagno k influenzi la posizione nel piano dei poli della FdT a ciclo chiuso, cioè le radici del polinomio caratteristico.

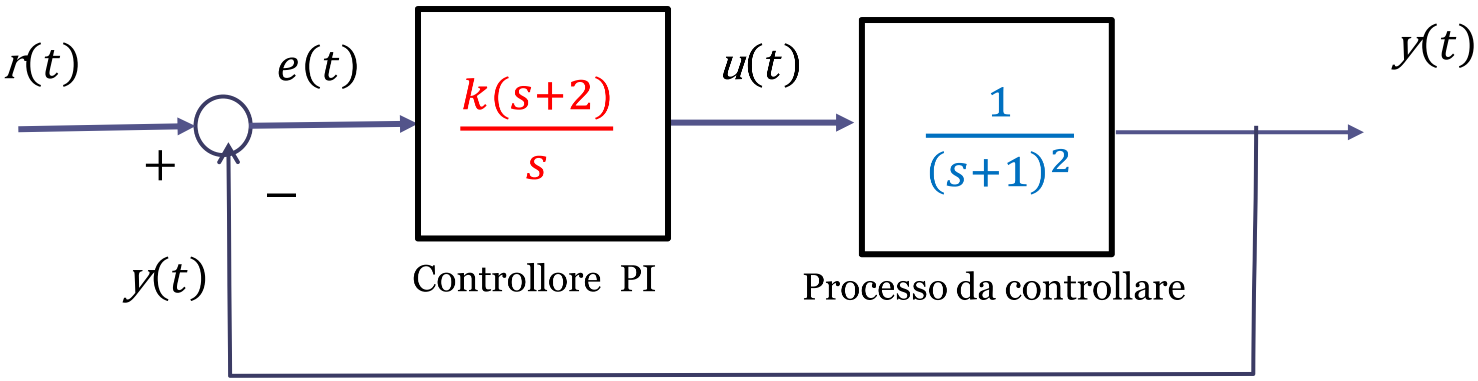
Lo scopo del Luogo delle Radici (LdR) è esattamente quello di caratterizzare in maniera semplice (in forma grafica) la dipendenza dei poli della FdT a ciclo chiuso dal guadagno k.

Ciò ci permetterà di garantire, se possibile, che questi siano vincolati all'interno di una particolare regione del piano, denominata «regione ammissibile», affinché nel sistema di controllo in esame sia garantito il soddisfacimento delle specifiche sul comportamento transitorio.
Tale concetto sarà introdotto un po più avanti.

$$W_{y_{des}}^{y}(s) = \frac{kN_L(s)}{D_L(s) + kN_L(s)}$$

NB Gli zeri della FdT a ciclo chiuso non dipendono dal guadagno k, e sono sempre costituiti dagli zeri del controllore più gli zeri del processo, cioè dagli zeri della L(s).

Esempio



FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita

$$W_r^y(s) = \frac{\frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}}{1+\frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{k(s+2)}{s(s+1)^2+k(s+2)}$$

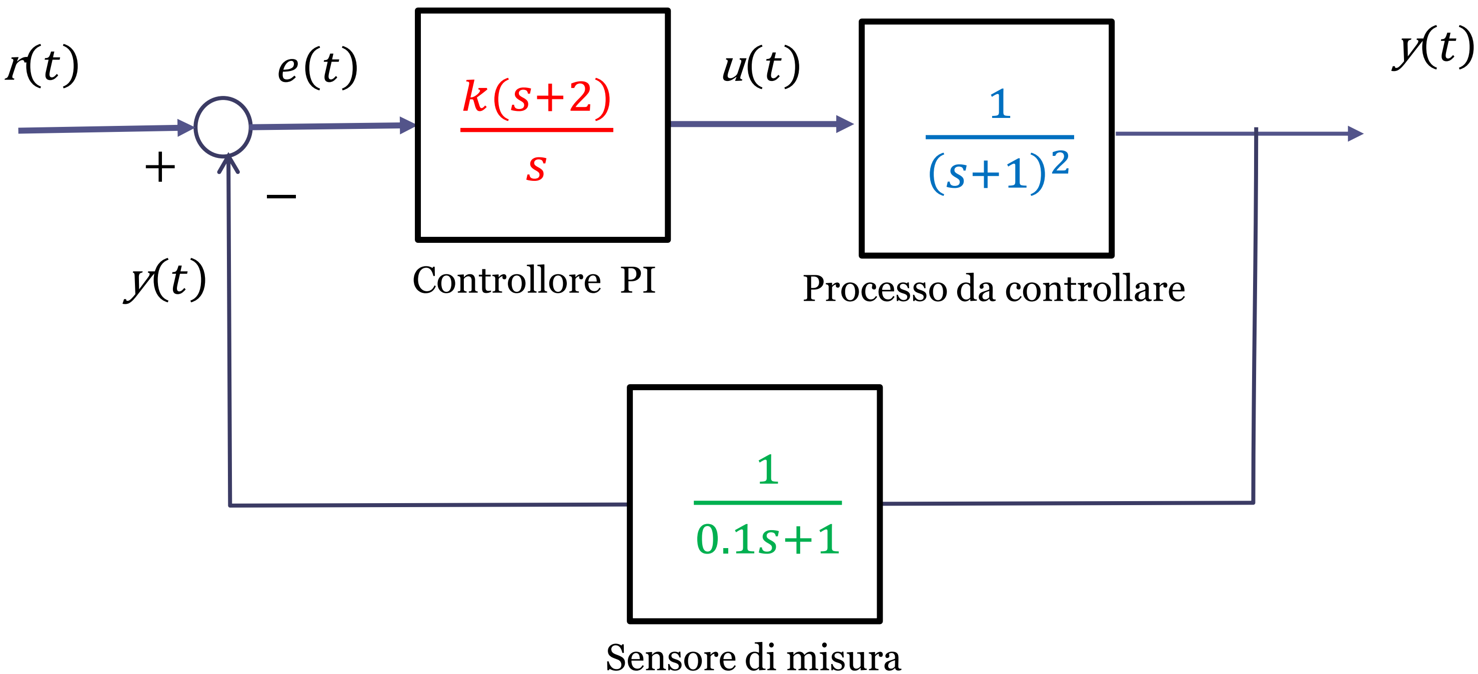
Polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = s(s+1)^2 + k(s+2)$$

I poli della $W_r^y(s)$ dipendono dal valore del guadagno k

Gli zeri invece sono fissi e indipendenti da k (in questo caso abbiamo unicamente lo zero del regolatore PI)

Esempio Una simile espressione per il polinomio caratteristico si deriva anche per sistemi di controllo a retroazione non unitaria



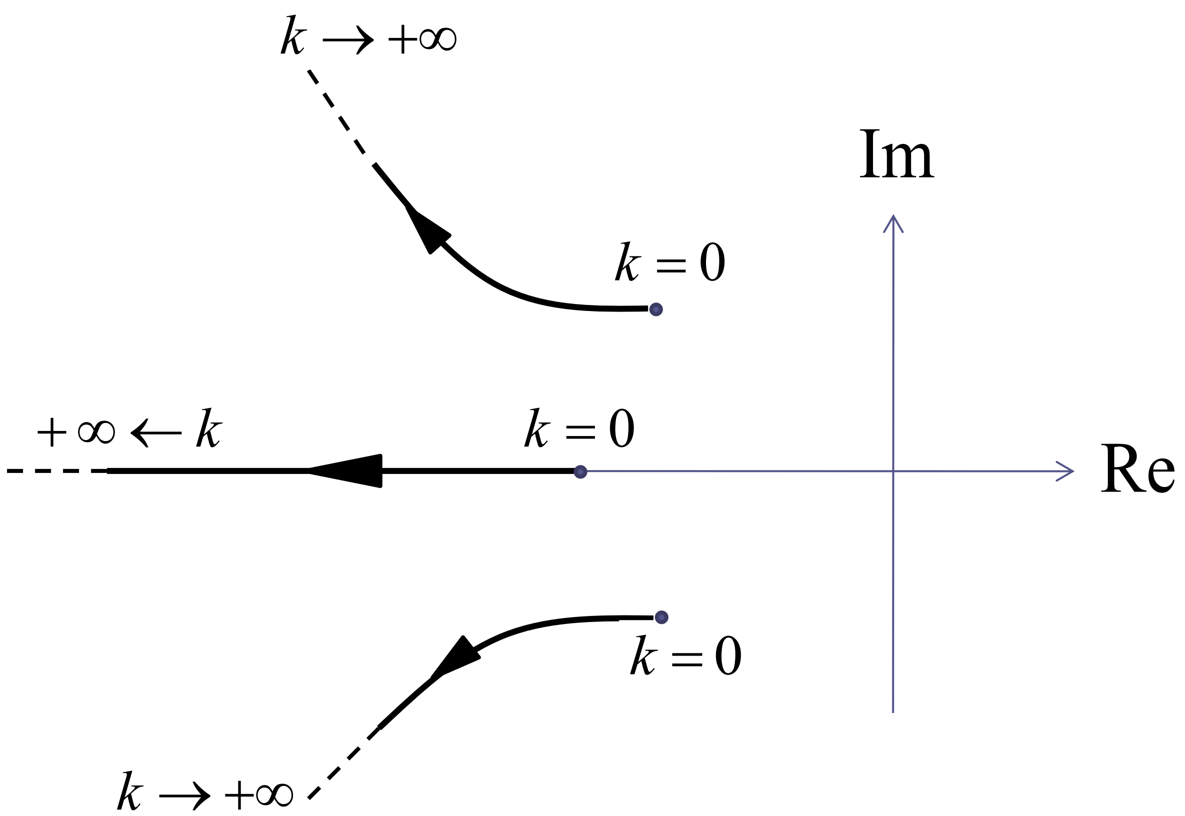
$$W_r^y(s) = \frac{\frac{k(s+2)}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)^3}}{1+\frac{k(s+2)}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}\cdot\frac{1}{0.1s+1}} = \frac{k(s+2)}{s(s+1)^2(0.1s+1)+k(s+2)}$$

$$P_{car}(s) = s(s+1)^2(0.1s+1) + k(s+2)$$

Il LdR è una costruzione grafica che consiste nell'insieme delle "traiettorie" che i poli a ciclo chiuso (le n radici del polinomio $P_{car}(s)$) percorrono nel piano complesso quando il guadagno k varia tra zero e infinito.

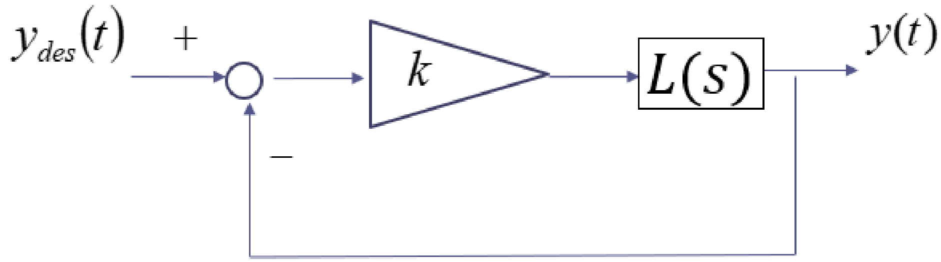
Si avranno pertanto **n** curve parametriche nel piano (chiamate «rami» del LdR), **orientate** secondo il verso crescente del parametro k

Es. Un possibile LdR
per n=3



Questo ipotetico andamento per i rami del LdR ci rivelerebbe che il sistema di controllo in esame è asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di k, e inoltre il sistema mostra una risposta oscillatoria per qualunque valore di k

Per tracciare il LdR è conveniente riferirsi alla seguente rappresentazione



$$L(s) = R_D(s)P(s)$$

Sia n il numero di poli di L(s), ed m il numero di zeri di L(s)

Siano $p_1, p_2, \dots, p_n$ i poli di L(s), e $z_1, z_2, \dots, z_m$ gli zeri di L(s)

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \bar{k}\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

Fattorizzazione «poli-zeri» di L(s)

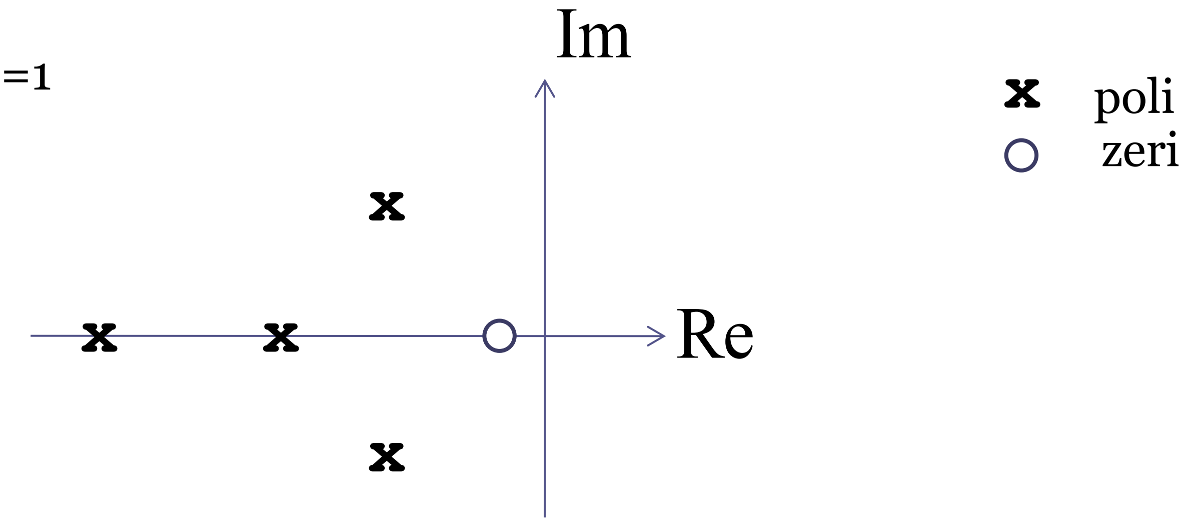
$$P_{car}(s) = D_L(s) + kN_L(s) =$$

$$= \underbrace{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}_{\text{Poli della FdT a ciclo aperto L(s)}} + k\bar{k}\underbrace{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}_{\text{Zeri della FdT a ciclo aperto L(s)}}$$

Grado n

La costruzione del LdR ha inizio riportando sul piano complesso le posizione dei poli p_i e degli zeri z_i della FdT $L(s) = R_D(s)P(s)$

Es. n=4 m=1



I punti di partenza (k=0) degli n rami del LdR sono gli n poli di L(s)

Dove tendono i rami del LdR per k che tende a infinito?

Andamento dei rami per $k \to +\infty$

Il luogo ha n rami, dei quali, per $k \to +\infty$

m convergono verso gli m zeri di L(s)

I restanti n-m convergono verso direzioni asintotiche (una "stella" di n-m semirette che si dipartono dal punto dell'asse reale – detto **CENTRO STELLA** - avente ascissa x_s)

ASINTOTI

Ascissa del centro stella

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

Angoli formati con l'asse reale positivo

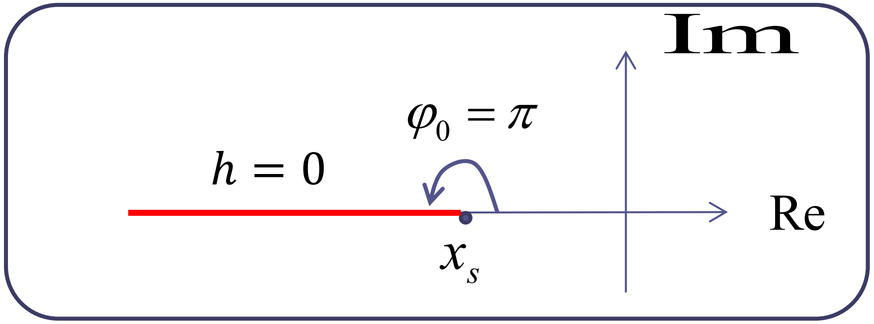
$$\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m} \qquad h = 0,1,\dots,n-m-1$$

Sia il luogo delle radici che l'insieme delle direzioni asintotiche risultano essere simmetrici rispetto all'asse reale.

$$\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m} \qquad h = 0, 1, \dots, n-m-1$$

$n - m = 1$

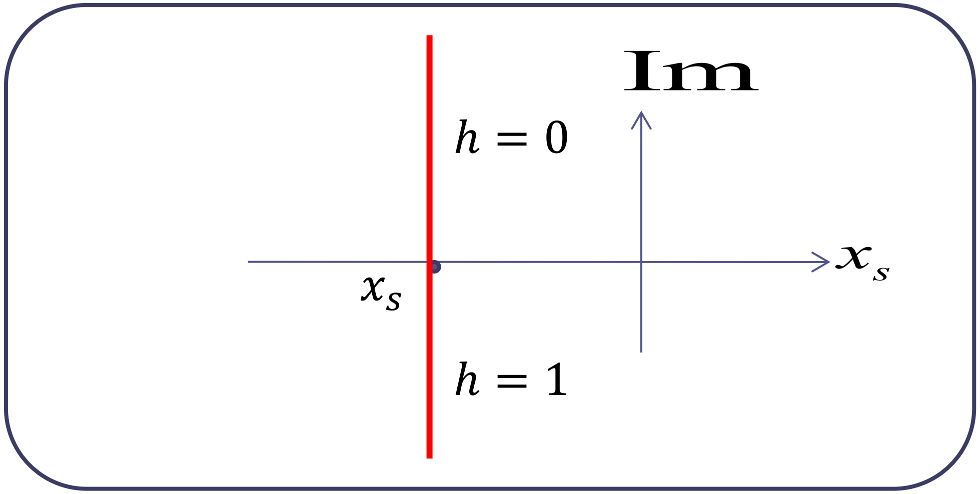
$\varphi_0 = \pi$



$n - m = 2$

$\varphi_0 = \pi/2$

$\varphi_1 = 3\pi/2$



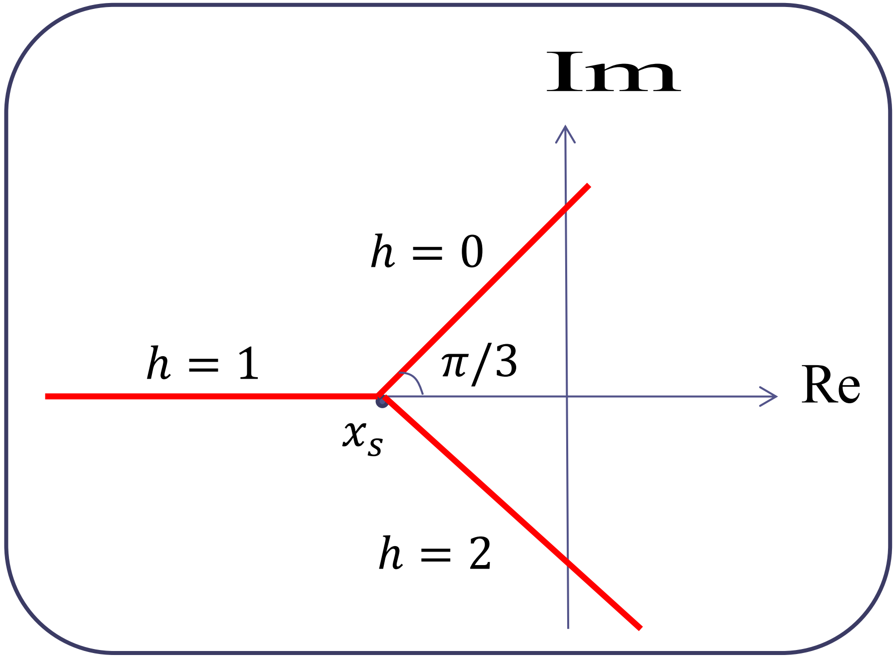
$$\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m} \qquad h = 0, 1, \dots, n-m-1$$

$n - m = 3$

$\varphi_0 = \pi/3$

$\varphi_1 = \pi$

$\varphi_2 = 5\pi/3$



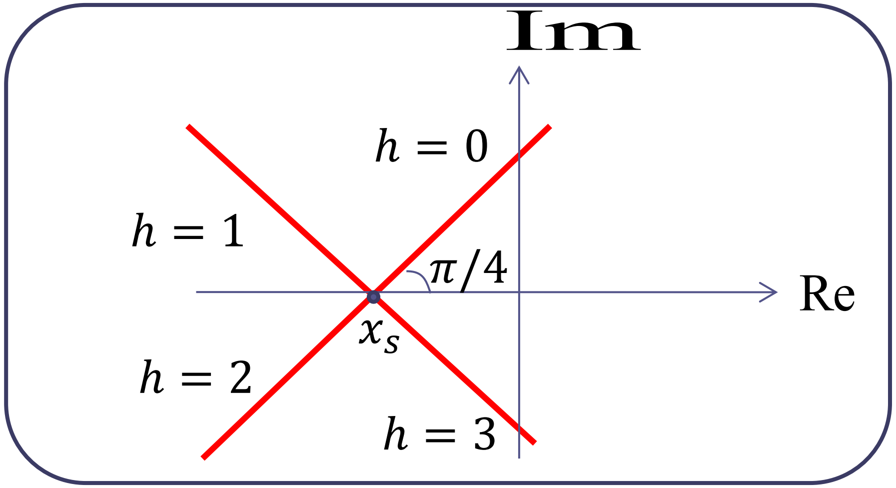
$n - m = 4$

$\varphi_0 = \pi/4$

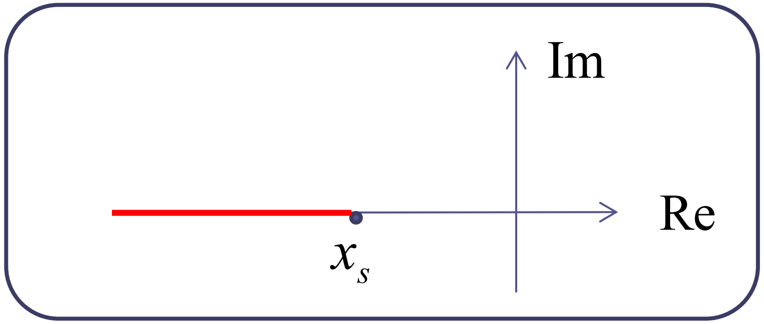
$\varphi_1 = 3\pi/4$

$\varphi_2 = 5\pi/4$

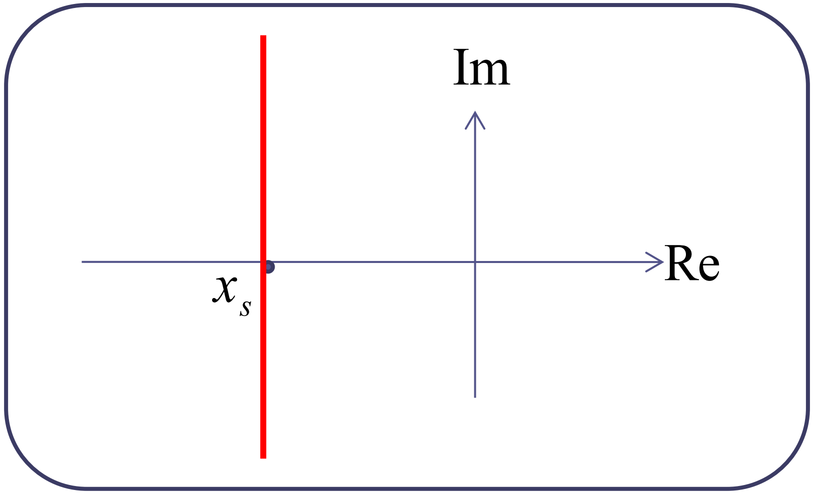
$\varphi_3 = 7\pi/4$



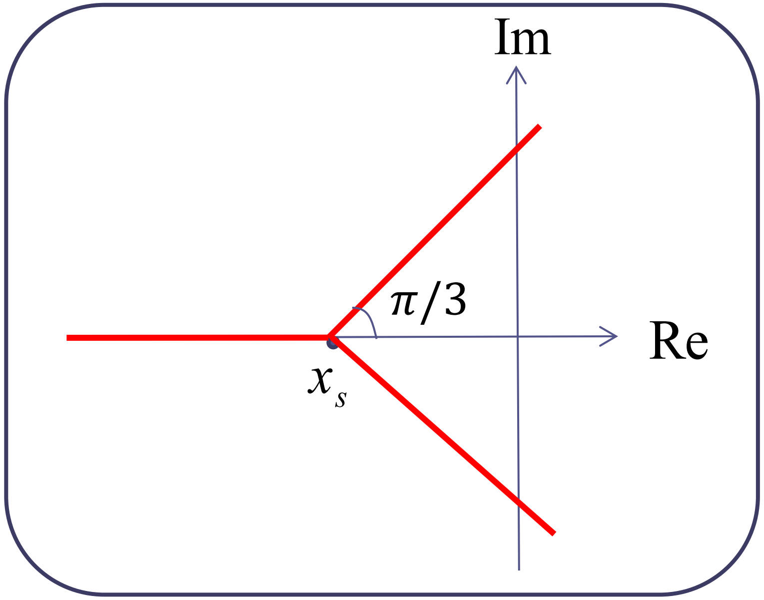
$\boldsymbol{n - m = 1}$



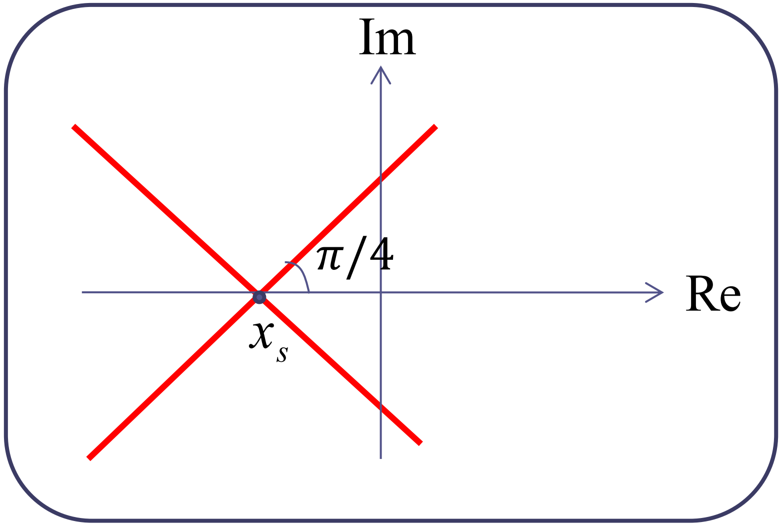
$\boldsymbol{n - m = 2}$



$\boldsymbol{n - m = 3}$



$\boldsymbol{n - m = 4}$



Regola di appartenza al LdR dei segmenti dell'asse reale

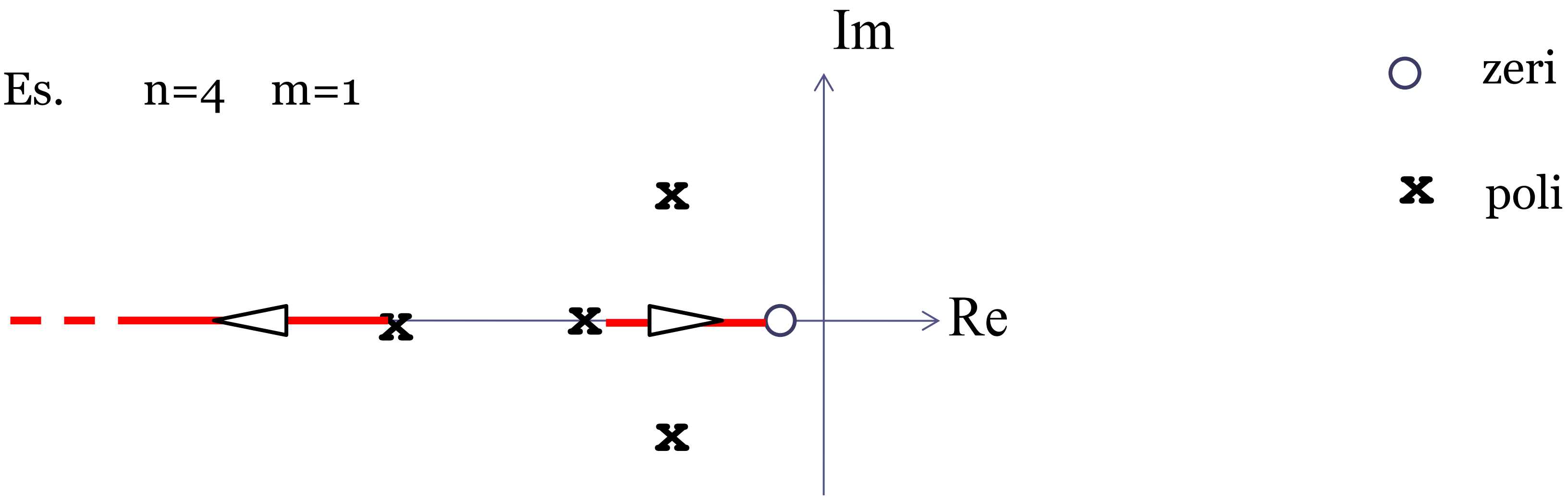
Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero DISPARI di poli e zeri di L(s)

N.B. Nell'applicazione di questa regola, si considerano unicamente i poli e gli zeri della L(s) posizionati sull'asse reale.

Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero DISPARI di poli e zeri di L(s)

N.B. Nell'applicazione di questa regola, si considerano unicamente i poli e gli zeri della L(s) posizionati sull'asse reale.

Es. n=4 m=1



I segmenti dell'asse reale identificati a seguito di tale proprietà sono tali che:

se uno di essi unisce un polo ad uno zero allora tale segmento costituisce uno dei rami del luogo delle radici.

se uno di essi parte da un polo e poi evolve verso meno infinito allora tale segmento costituisce uno dei rami del luogo delle radici.

Capita talvolta che due (o più) rami del luogo delle radici confluiscano l'uno verso l'altro fino a incontrarsi in un punto.

Tali punti vengono chiamati punti doppi.

I punti doppi s*, **se ve ne sono**, soddisfano la relazione

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s^*-p_i}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s^*-z_i}=0$$

detta "equazione dei punti doppi"

NB L'equazione dei punti doppi può fornire anche soluzioni addizionali "non ammissibili" (in quanto non appartenenti al luogo delle radici) che vanno scartate.

L'insieme di tutte le "regole di tracciamento" date consente di definire in maniera pressoché completa l'andamento del luogo delle radici

Lista delle regole di tracciamento

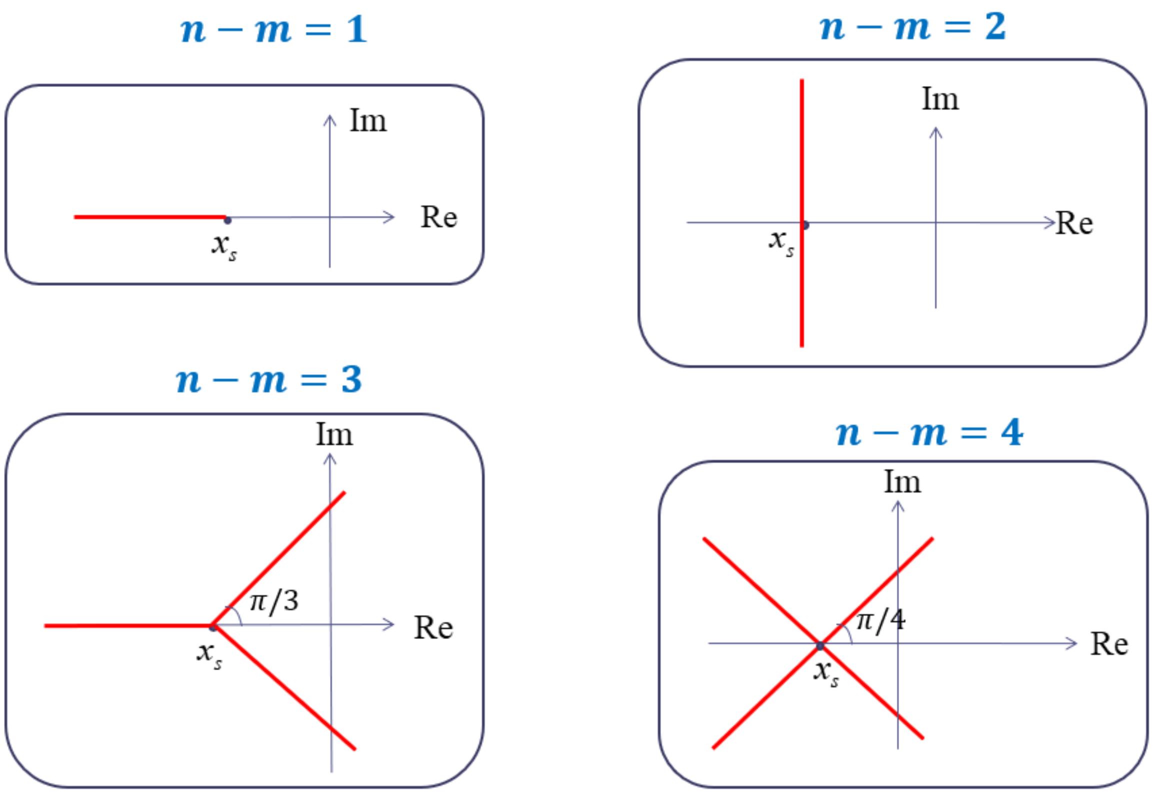
1. Si riporta sul piano complesso le posizione dei poli p_i e degli zeri z_i della L(s)

2. Gli n rami partono per k=0 dai poli p_i e convergono, per valori di k tendenti a $+\infty$, verso gli zeri z_i o verso le direzioni asintotiche

3. Centro stella degli asintoti

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

4. Direzioni asintotiche



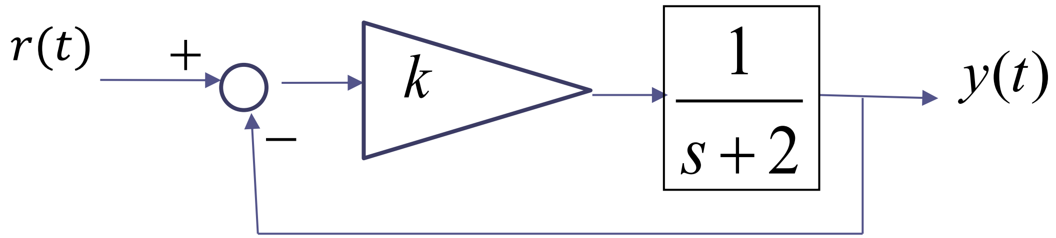
5. Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

6. Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri. Se qualcuno di tali segmenti unisce un polo ad uno zero, oppure se va da un polo verso meno infinito, allora costituisce uno dei rami del luogo delle radici.

7. Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s^* - p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s^* - z_i}$$

Esempio 1 Con riferimento al seguente sistema in retroazione



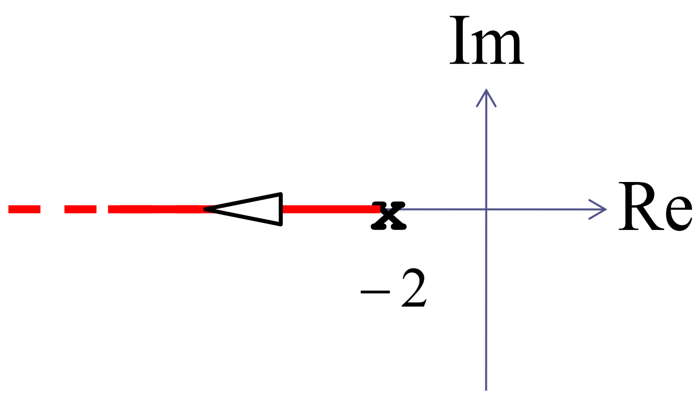
valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.

$$L(s)=\frac{1}{s+2}$$

n=1 m=0

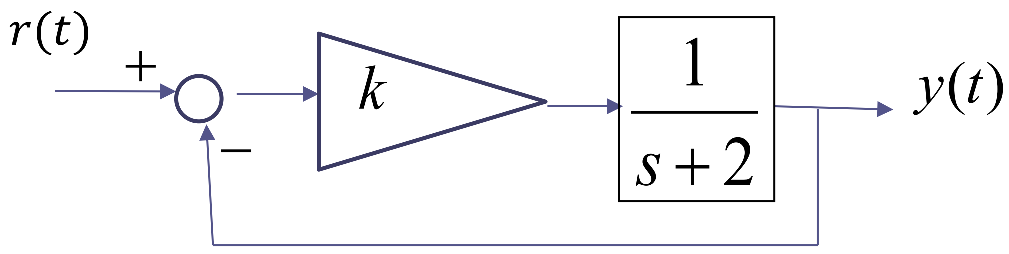
Il sistema a ciclo chiuso è caratterizzato da un unico polo, quindi il LdR avrà un solo ramo. Vediamo quale «traiettoria» viene percorsa dal polo del sistema a ciclo chiuso al variare di k da zero a infinito.

Riportiamo nel piano il polo della L(s).



Segmenti dell'asse reale che appartengono al LdR.

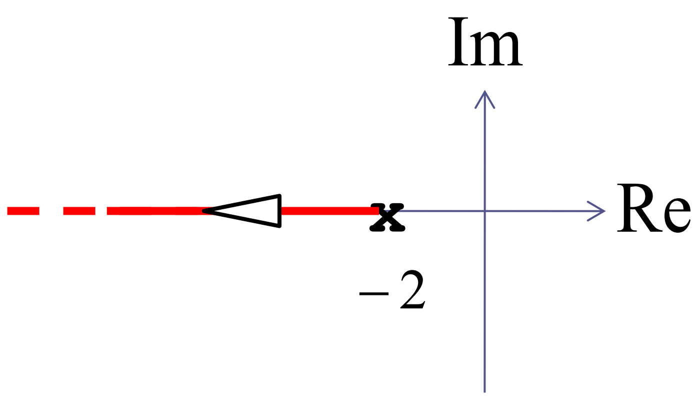
Tale segmento va da un polo verso meno infinito, quindi è anche un ramo, in questo caso l'unico ramo, del LdR.



FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{k}{s+2+k}$$

$p = -2 - k$ polo a ciclo chiuso



Che conclusioni possiamo trarre?

Il sistema di controllo è sempre as. stabile a ciclo chiuso perchè il ramo è interamente contenuto nel semipiano sinistro

La risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso è sempre monotona esponenziale perchè il polo si mantiene sempre sull'asse reale

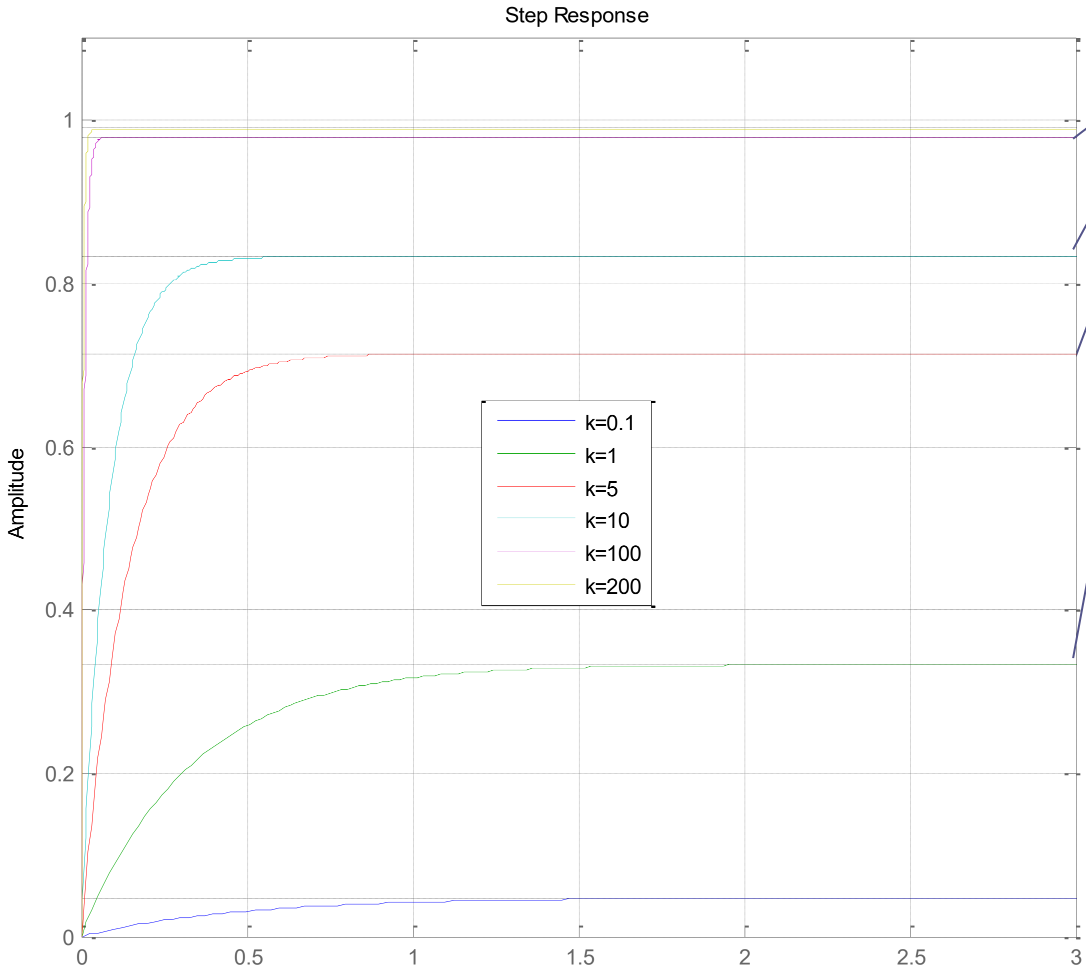
Al crescere di k la risposta si velocizza (il tempo di assestamento si riduce)

Guadagno statico

$$\mu = W_r^y(0) = \frac{k}{2+k}$$

Il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso dipende da k, e al crescere di k diventa sempre piu prossimo all'unità

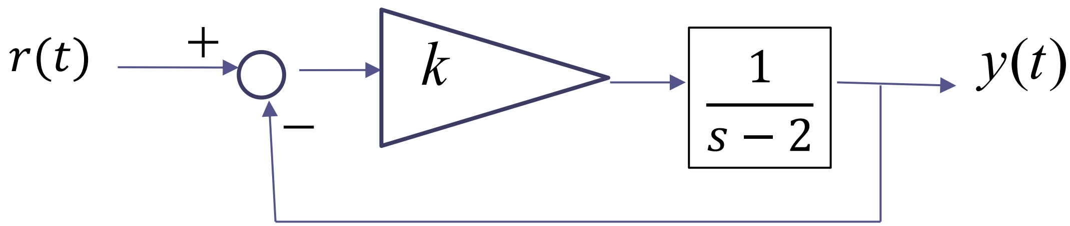
Risposta al gradino per valori crescenti di k



$$\mu = \frac{k}{2+k}$$

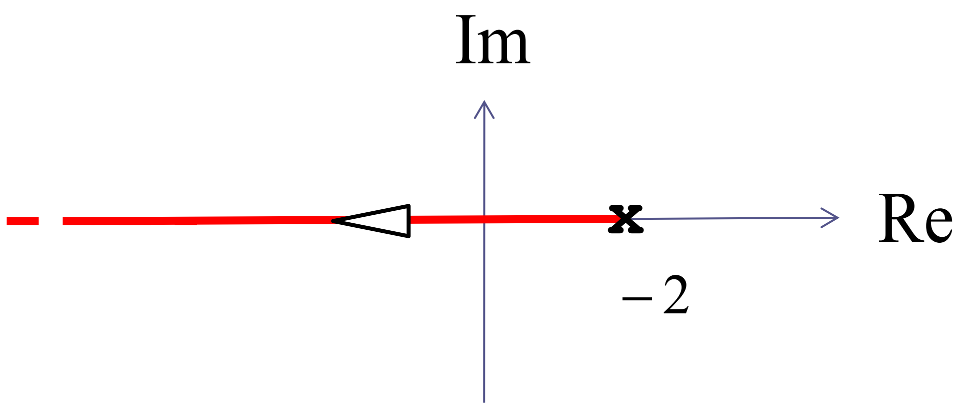
Il guadagno statico μ determina il valore di regime della risposta al gradino unitario.

Esempio 2 Con riferimento al seguente sistema in retroazione



valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.

Con procedimento del tutto analogo a prima si ottiene:



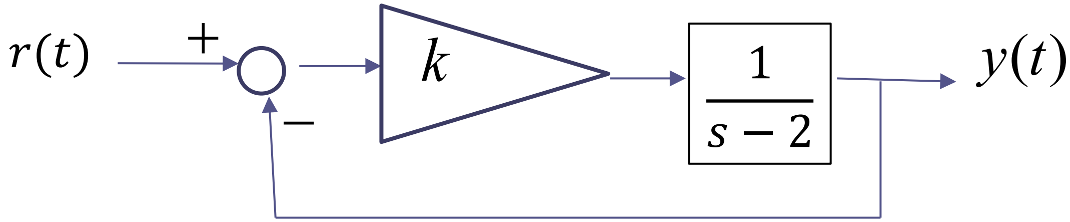
$$W_r^y(s) = \frac{k}{s-2+k}$$

$p = 2 - k$ polo a ciclo chiuso

Che conclusioni possiamo trarre?

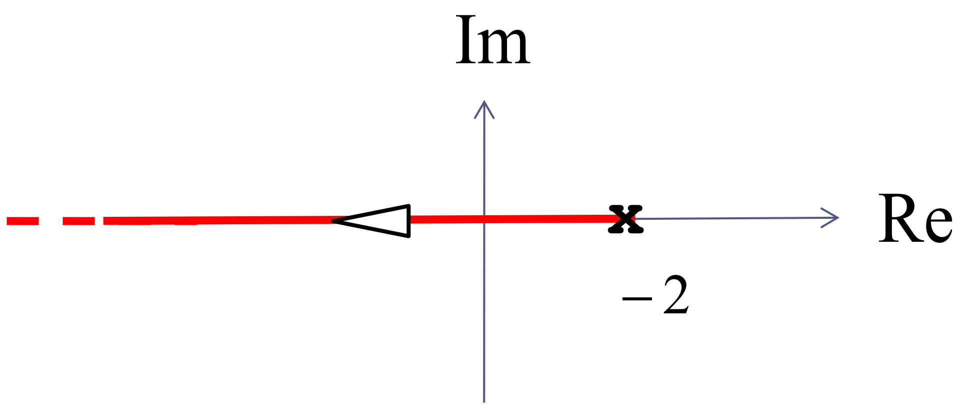
A. Il sistema di controllo è as. stabile a ciclo chiuso solo se il guadagno k è maggiore di una soglia (che in questo caso vale 2). Inizialmente (per $k < 2$) il ramo del LdR è contenuto nel semipiano destro e successivamente (per $k > 2$) «entra» nel semipiano sinistro.

Esempio 2 Con riferimento al seguente sistema in retroazione



valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.

Con procedimento del tutto analogo a prima si ottiene:



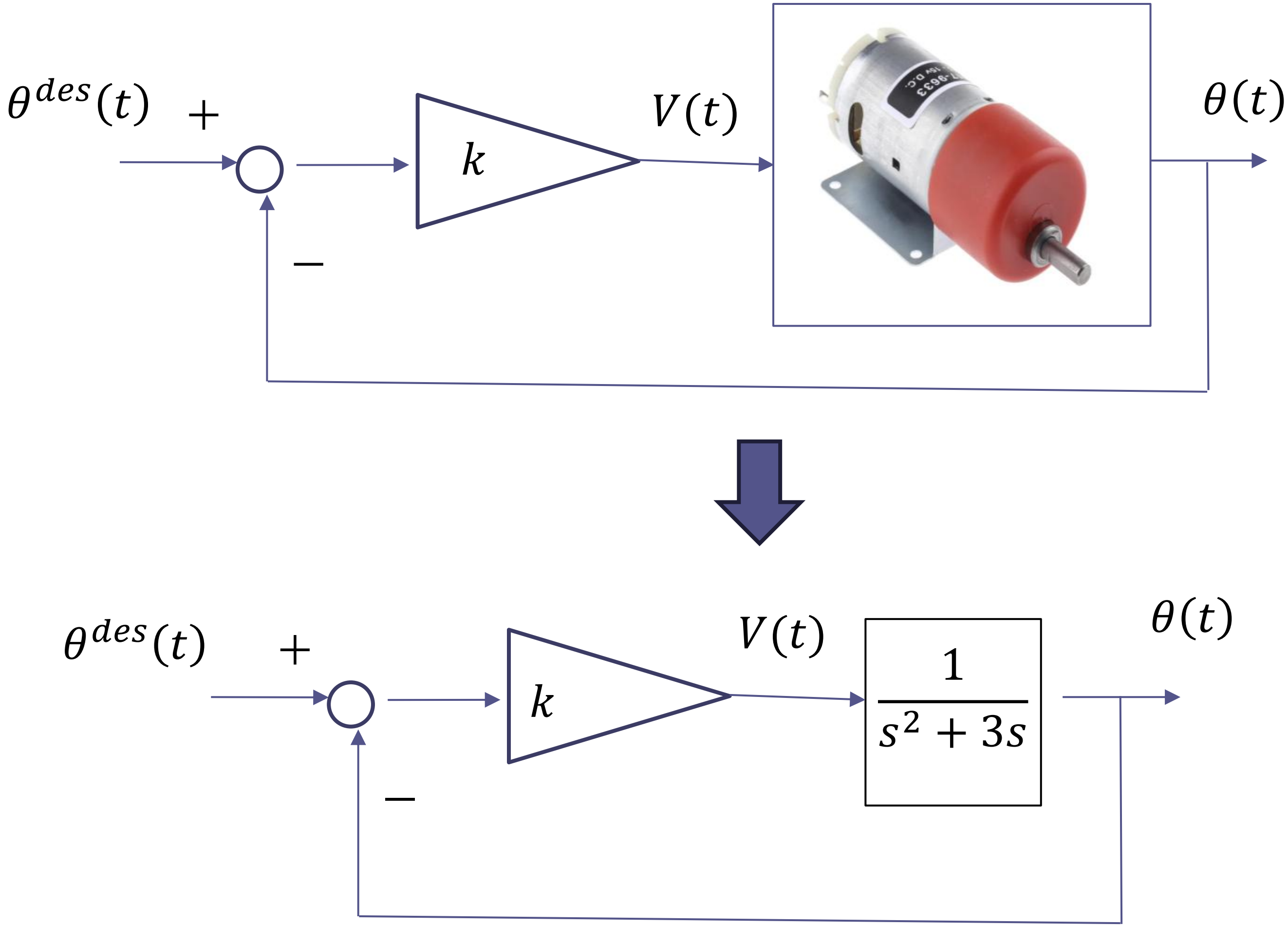
$$W_r^y(s) = \frac{k}{s - 2 + k}$$

$p = 2 - k$ polo a ciclo chiuso

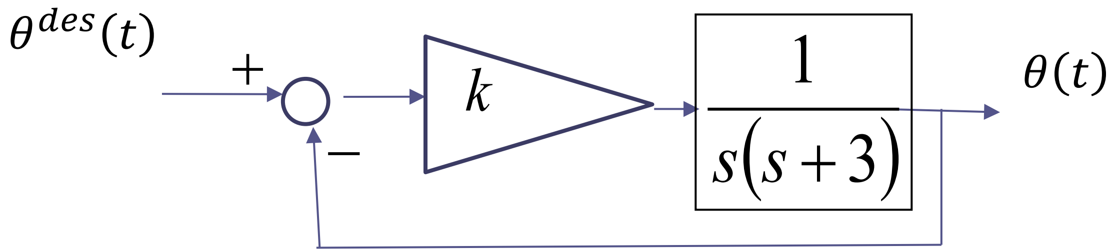
Che conclusioni possiamo trarre?

B. Se $k > 2$ la risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso è sempre monotona crescente perchè il polo si mantiene sempre sull’asse reale negativo, ed al crescere di k la risposta si velocizza (il tempo di assestamento si riduce)

Esempio 3 Con riferimento al seguente sistema di controllo in retroazione della posizione angolare di un servomotore, valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.



$$G_V^{\theta}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s}$$

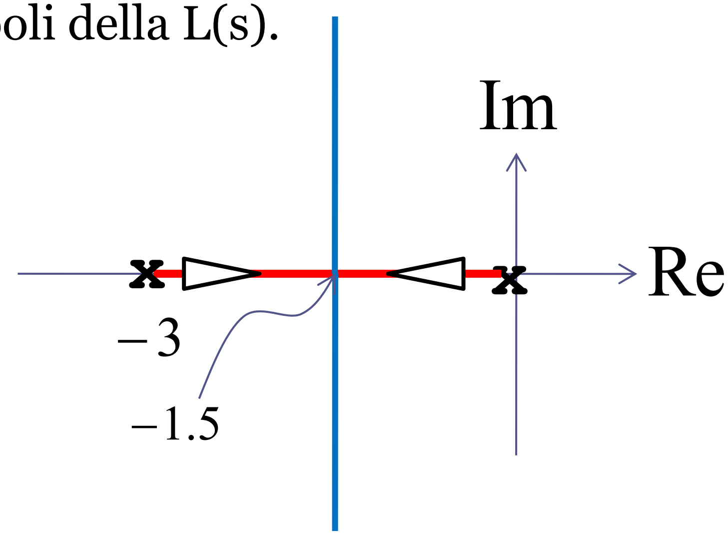


$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

$n = 2 \quad m = 0$

Riportiamo nel piano i poli della L(s).

Il LdR ha 2 rami



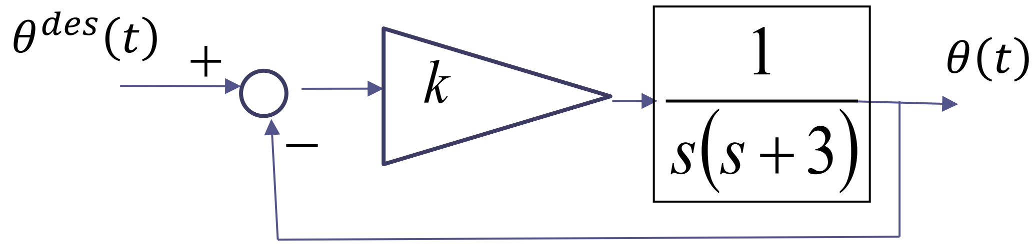
Appartiene al LdR il segmento che unisce i due poli

Ci sarà necessariamente un punto doppio compreso tra 0 e -3.

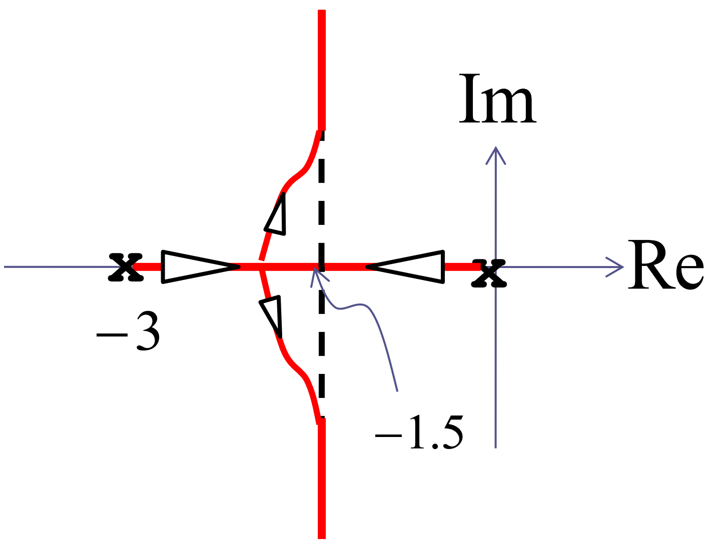
Centro stella $\quad x_s = \frac{-3-0}{2} = -1.5$

$n - m = 2 \Rightarrow$ **Asintoti a + e – 90 gradi**

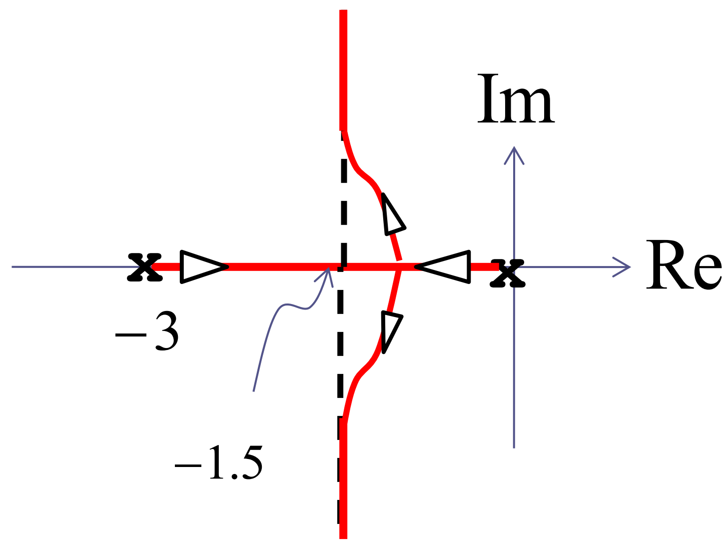
$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

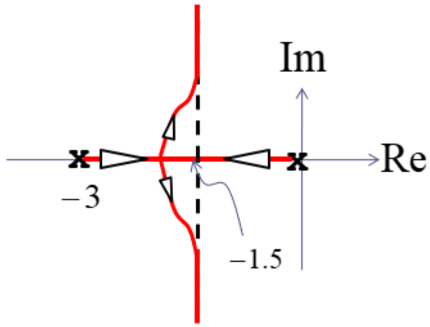


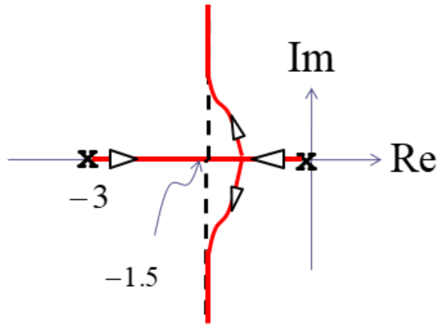
Se il punto doppio sta a sinistra del centro stella si avra un LdR:

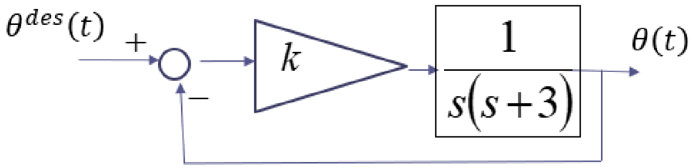


Se il punto doppio sta a destra del centro stella si avra un LdR:









Entrambi questi LdR implicano la medesima interpretazione per le proprieta del sistema di controllo al variare di k:

Il sistema di controllo è sempre as. stabile per qualunque valore di k.

Esiste una soglia k^* (che è il valore di k associato al punto doppio tale che)

$k \leq k^*$	La risposta ad un set-point costante è monotona esponenziale. Incrementando k da 0 a k^* la risposta diventa progressivamente piu rapida.
$k > k^*$	La risposta ad un set-point costante è oscillatoria smorzata

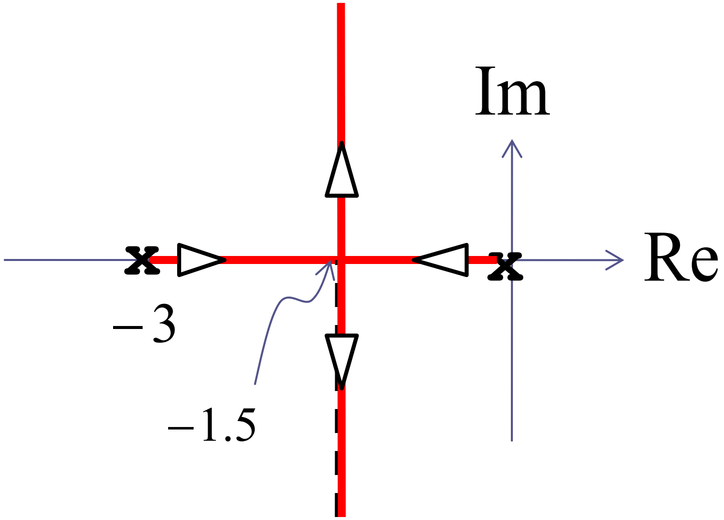
Ora calcoliamo la coordinata esatta del punto doppio.

Equazione dei punti doppi $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s^* - p_i} - \cancel{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s^* - z_i}} = 0$ $\quad p_1 = 0 \quad p_2 = -3$

$$\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^* + 3} = 0 \Rightarrow \frac{s^* + 3 + s^*}{s^*\left(s^* + 3\right)} = \frac{2s^* + 3}{s^*\left(s^* + 3\right)} = 0 \Leftrightarrow s^* = -3/2 = -1.5$$

I punto doppio si trova a **metà strada tra i due poli**.
Quando L(s) ha 2 poli reali e nessuno zero, come il sistema nel presente esempio, questo vale sempre.

I rami del LdR avranno il seguente andamento

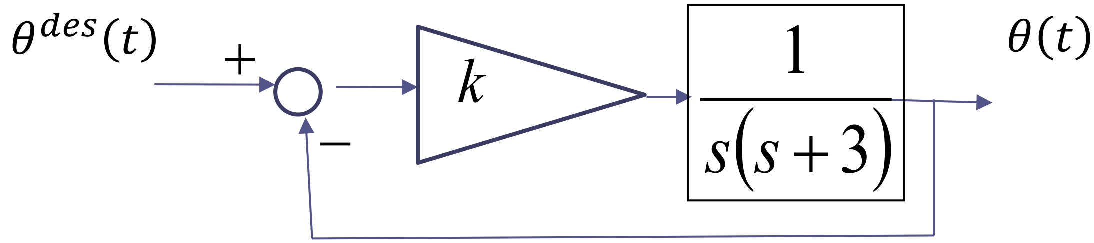


Interpretazione

Il sistema di controllo è sempre as. stabile per qualunque valore di k?

Che tipo di risposta si ottiene?

$$L(s)=\frac{1}{s(s+3)}$$

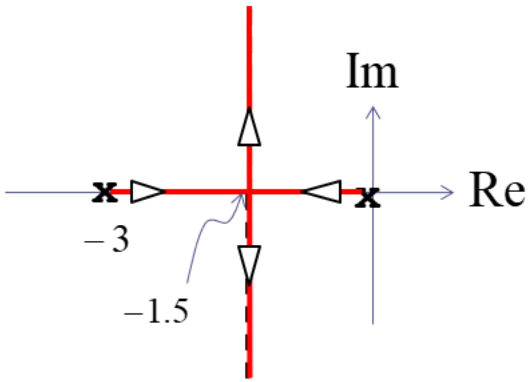


$$W_{\theta_{des}}^{\theta}(s) = \frac{k}{s(s+3)+k} \qquad P_{car}(s)=s^2+3s+k \qquad p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-k}$$

Per 0<k < 9/4=2.25 abbiamo a ciclo chiuso due poli reali distinti

Per k =2.25 abbiamo a ciclo chiuso due poli reali coincidenti (entrambi pari a -3/2)

Per k >2.25 abbiamo a ciclo chiuso due poli complessi coniugati (con parte reale pari a -3/2)



Soglia: **k =2.25**

Al di sotto la risposta è monotona esponenziale, al di sopra oscillatoria smorzata.

Guadagno statico della FdT a ciclo chiuso:

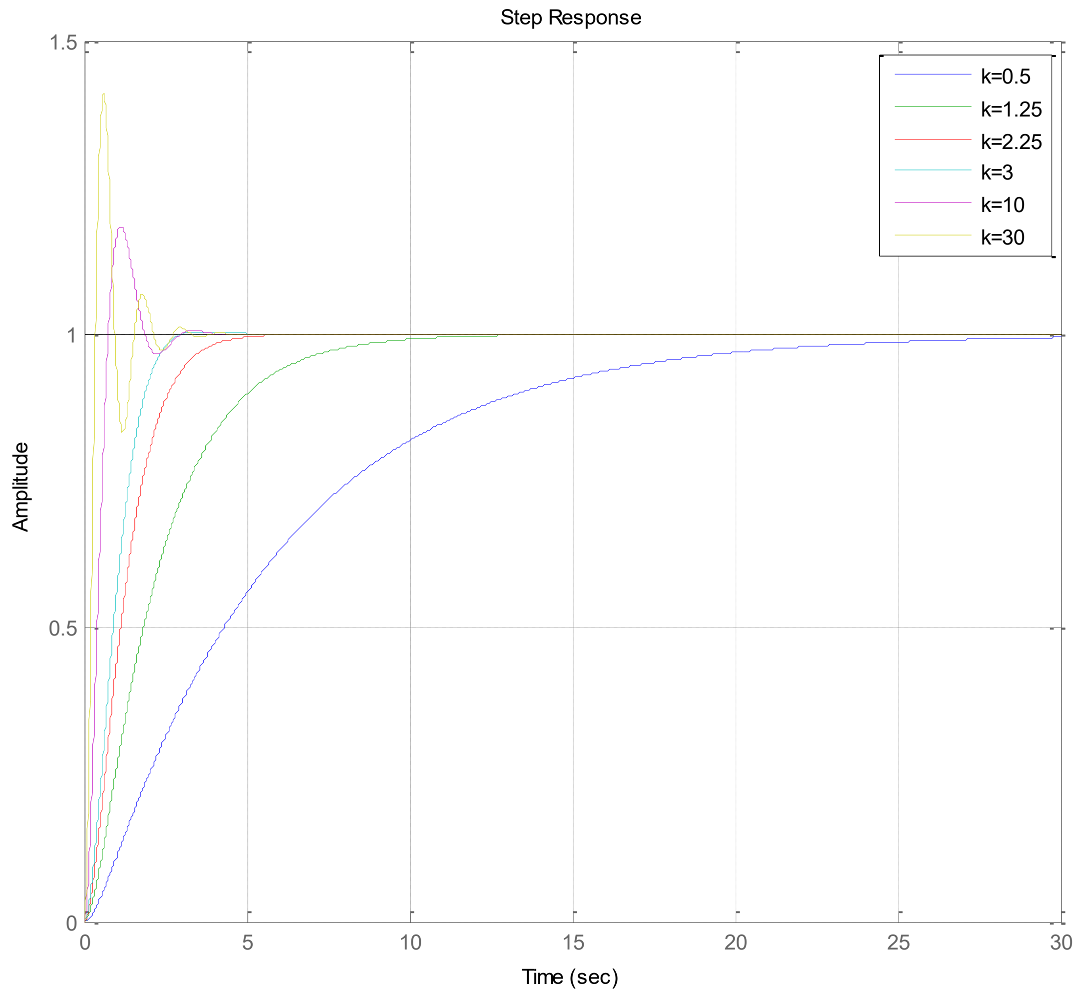
$$W_{\theta_{des}}^{\theta}(s) = \frac{k}{s(s+3)+k}$$

$$\Downarrow$$

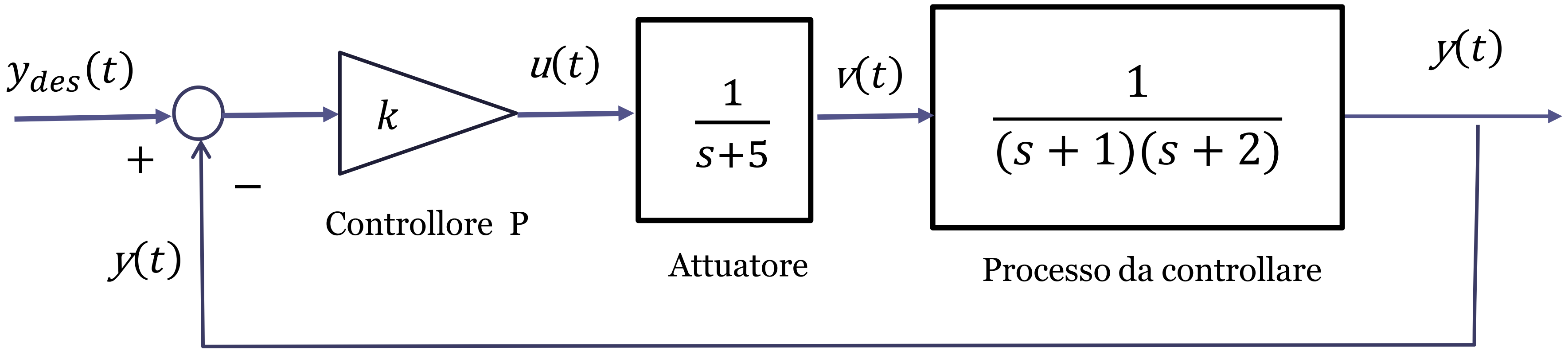
$$\mu = W_{\theta_{des}}^{\theta}(0) = 1$$

Il guadagno statico μ della FdT a ciclo vale sempre 1, indipendentemente dal valore di k.

Grafici della posizione angolare θ del motore in risposta ad un set point θ_{des} unitario per valori crescenti di k.



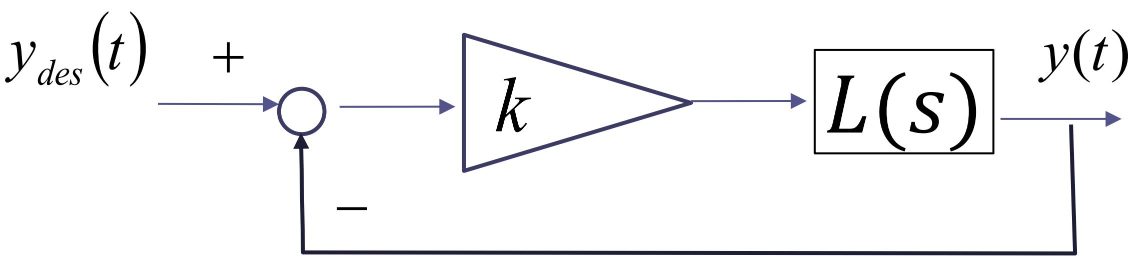
Esempio 4 Con riferimento al seguente sistema in retroazione



valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.

Schema equivalente:

$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$



$n = 3$ ordine della L(s) (sarà anche il grado del polinomio caratteristico)

$m = 0$ grado del numeratore della L(s)

$p_1 = -1$ $p_2 = -2$ $p_3 = -5$ poli della L(s)

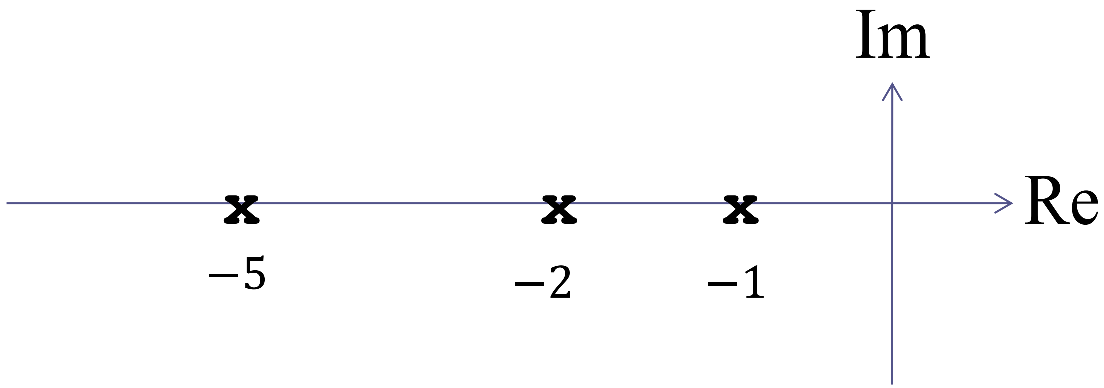
FdT a ciclo chiuso fra il set-point e l'uscita

$$W_{y_{des}}^{y}(\mathrm{s}) = \frac{\dfrac{\mathrm{k}}{(s+1)(s+2)(s+5)}}{1+\dfrac{\mathrm{k}}{(s+1)(s+2)(s+5)}} = \frac{\mathrm{k}}{\color{red}{(s+1)(s+2)(s+5)+k}}$$

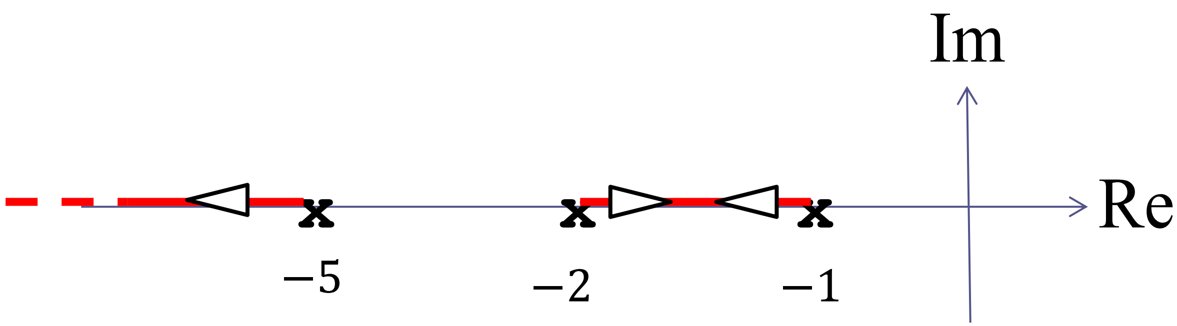
Polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = (s+1)(s+2)(s+5)+k = s^3+8s^2+17s+10+k$$

Mappa poli-zeri di L(s)



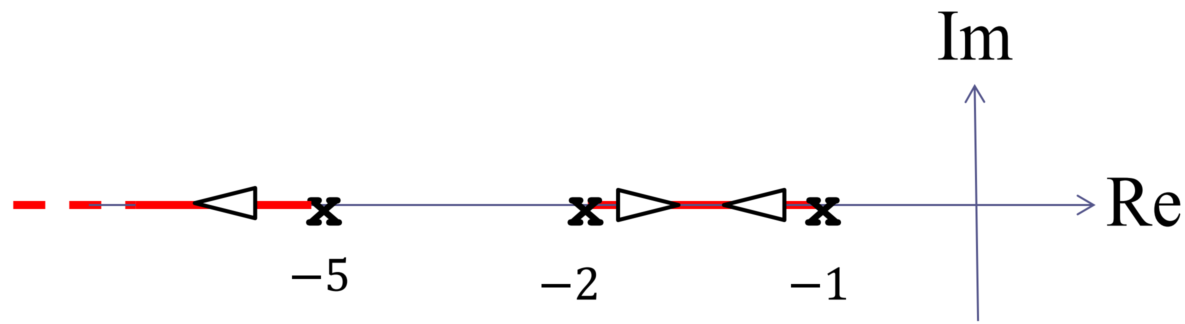
Regola di appartenenza al LdR dei segmenti dell'asse reale



Il segmento che va dal polo in -5 verso meno infinito è uno dei rami del LdR.

Il segmento che unisce i due poli in -1 e -2 invece non è un ramo del luogo.

I due rami che partono rispettivamente dai poli in -1 e -2 vanno l'uno verso l'altro e si incontrano in un punto doppio appartenente all'intervallo $-2\ ,\ -1$ per poi abbandonare l'asse reale e convergere verso gli asintoti.



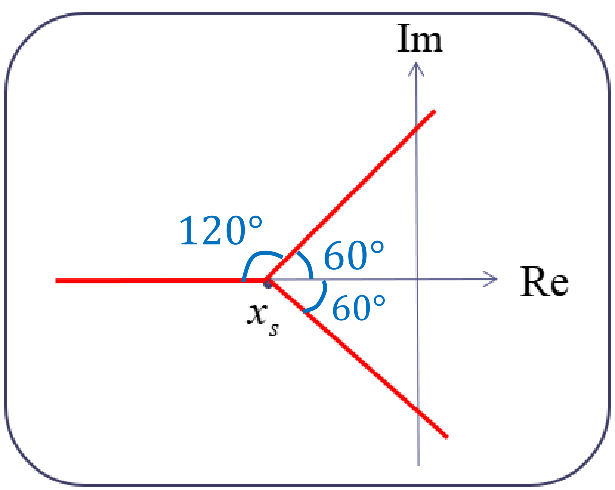
Individuiamo il centro stella e tracciamo gli asintoti.

Ascissa del centro stella:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \cancel{\sum_{i=1}^{m} z_i}}{n-m}$$

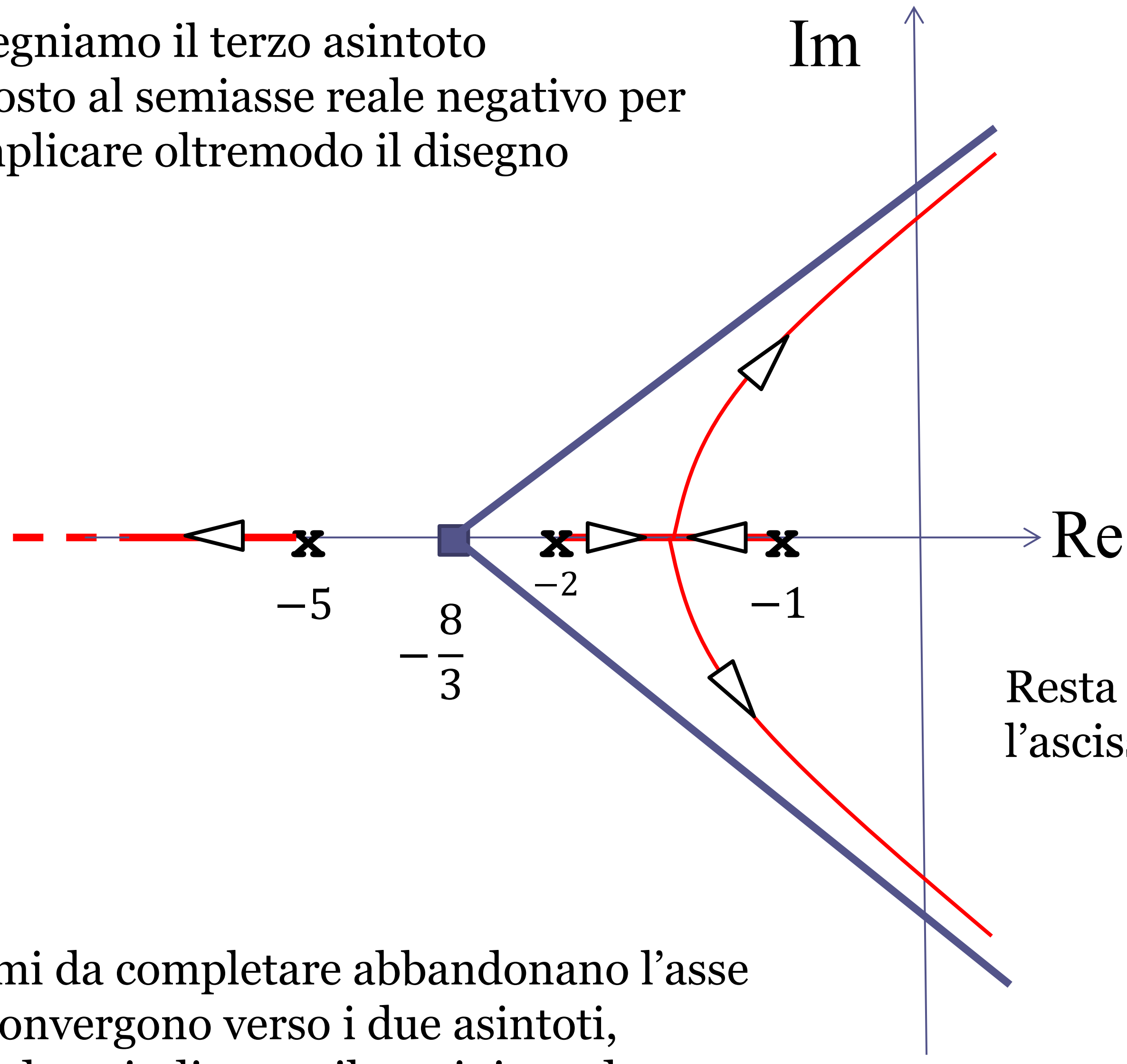
$$x_s = \frac{-1-2-5}{3} = -\frac{8}{3}$$

$n - m = 3$



Asintoti a +60, 180, e – 60 gradi

Non disegniamo il terzo asintoto sovrapposto al semiasse reale negativo per non complicare oltremodo il disegno



Resta da determinare l'ascissa del punto doppio

I due rami da completare abbandonano l'asse reale e convergono verso i due asintoti, confluendo quindi verso il semipiano destro per valori del guadagno sufficientemente elevati.

Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s^*-p_i}-\cancel{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s^*-z_i}}=0 \qquad p_1=-1 \qquad p_2=-2 \qquad p_3=-5$$

$$\frac{1}{s^*+1}+\frac{1}{s^*+2}+\frac{1}{s^*+5}=0$$

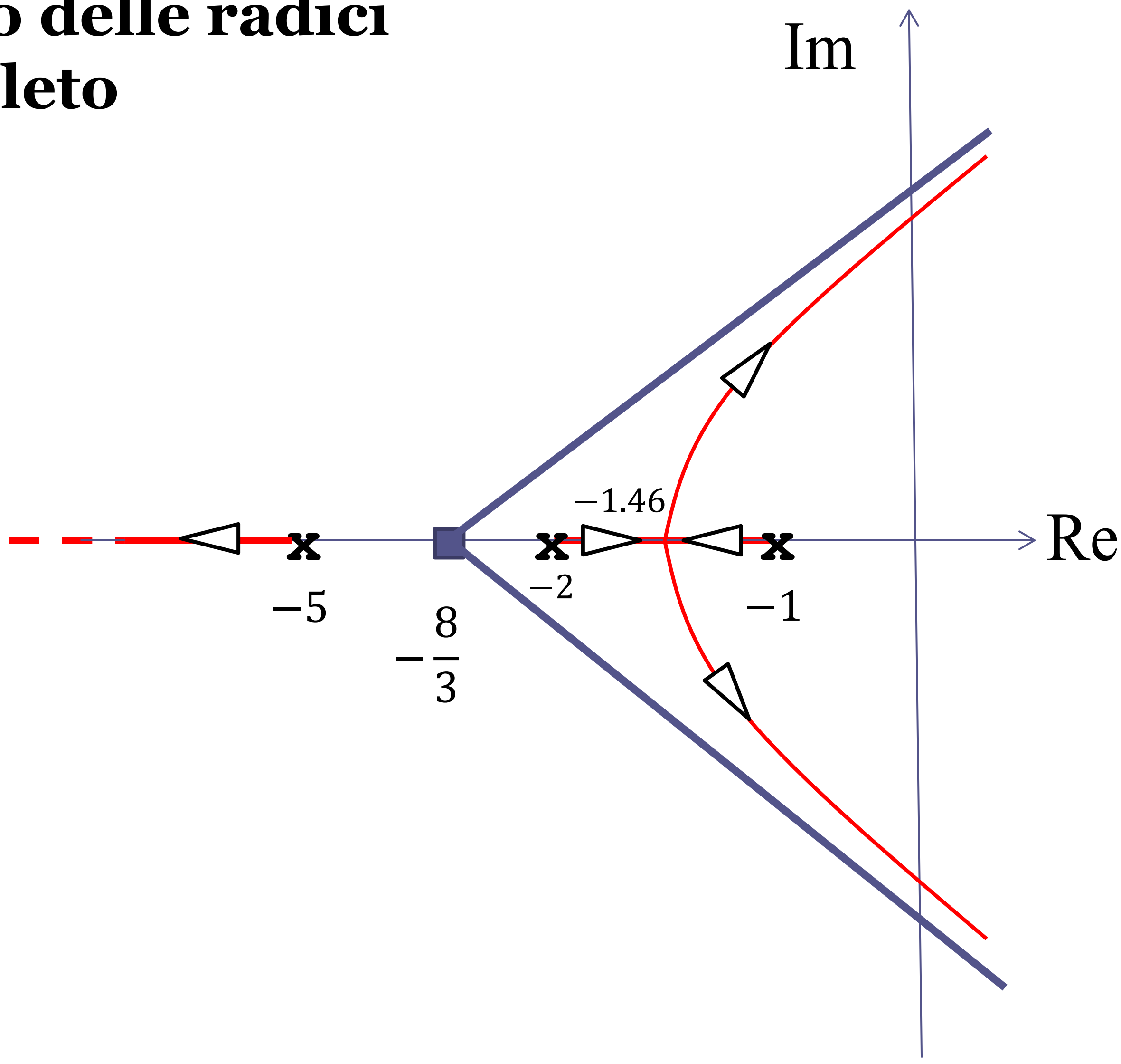
$$\frac{(s^*+2)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+2)}{(s^*+1)(s^*+2)(s^*+5)}=0$$

$$(s^*+2)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+5)+(s^*+1)(s^*+2)=3s^2+16s+7$$

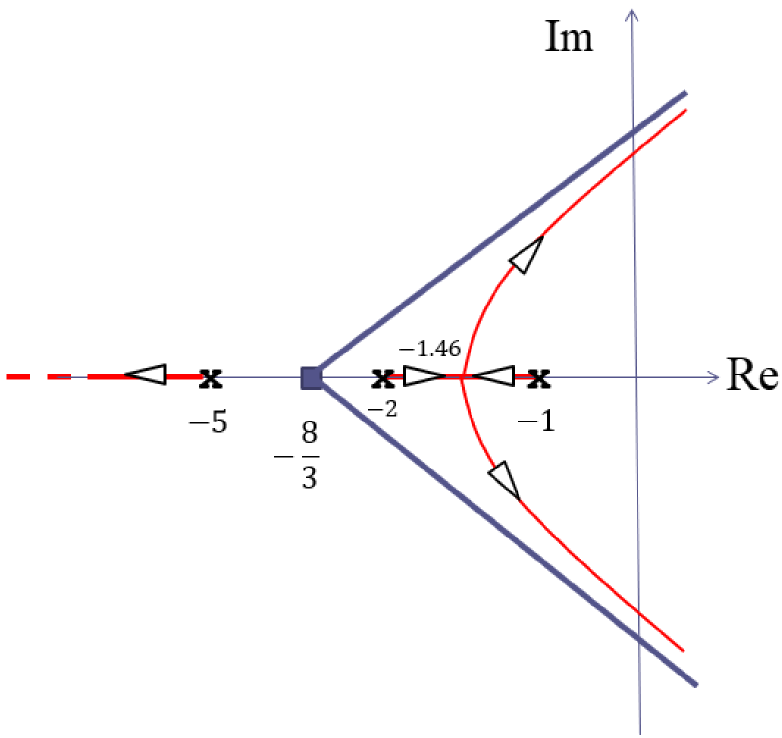
Il polinomio $3s^2+16s+7$ ammette le radici $r_1=-1.46$ e $r_2=-3.86$

Fra le due radici r_1 e r_2 è accettabile unicamente r_1 in quanto il punto -3.86 non appartiene al LdR. Il punto doppio sta pertanto nel punto -1.46

Luogo delle radici completo



Interpretazione



Esiste un valore limite per il guadagno k (guadagno critico k_{cr}) al di sopra del quale il sistema a ciclo chiuso diventa instabile.

Tale valore può essere determinato applicando al polinomio caratteristico della FdT il criterio di Routh-Hurwitz

$$P_{car}(s) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 + k$$

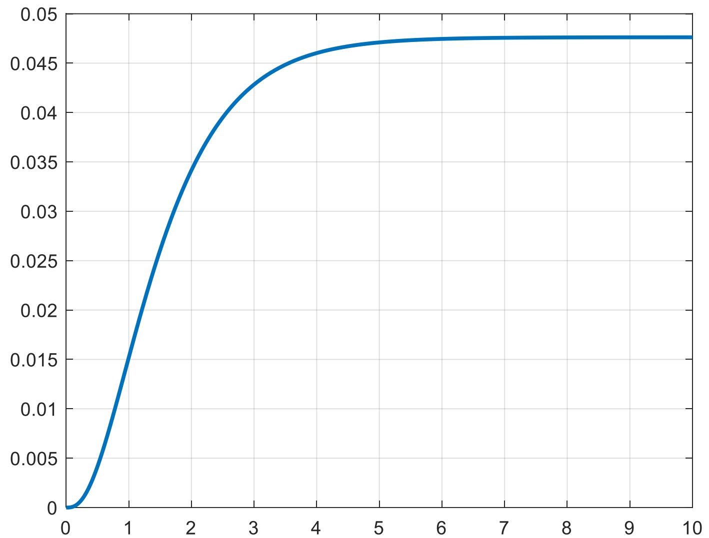
$$\Downarrow$$

$$8 \cdot 17 > 10 + k \quad \Rightarrow \quad k_{cr} = 8 \cdot 17 - 10 = 126$$

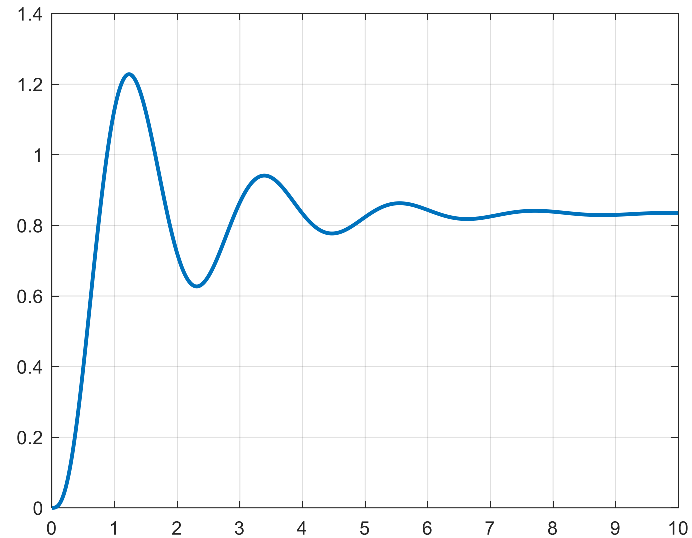
Per valori sufficientemente piccoli di k la risposta al gradino a ciclo chiuso è monotona esponenziale, e diventa progressivamente più rapida all'aumentare di k

Superato il valore di k associato al punto doppio (che ancora non sappiamo determinare, ma che vale 0.88) due fra i tre poli a ciclo chiuso diventano complessi coniugati, e nella risposta compaiono pertanto delle oscillazioni. Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati decresce progressivamente all'aumentare di k da 0.88 fino a 126. In corrispondenza di $k = 126$ si ha una coppia di poli immaginari puri (limite di stabilità).

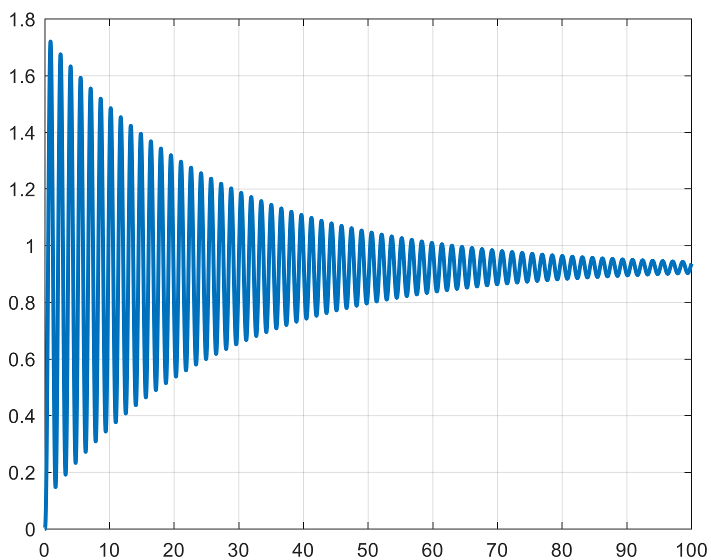
$k = 0.5$



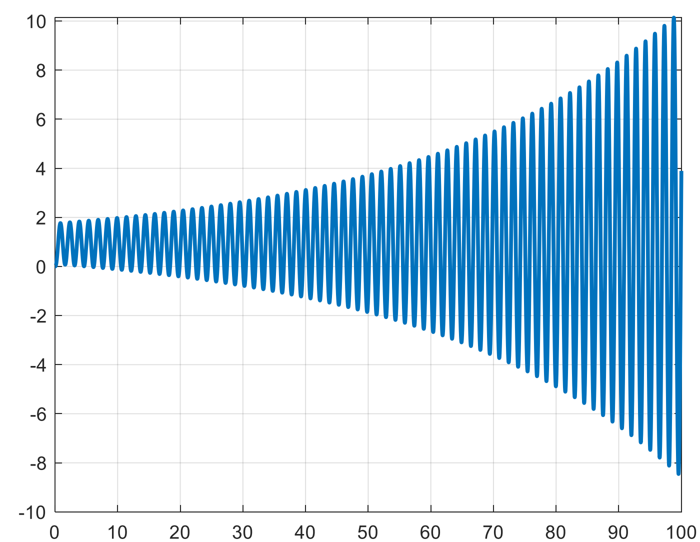
$k = 50$



$k = 120$



$k = 130$



Le risposte al gradino unitario corrispondenti ai valori $k = 0.5$, $k = 50$ e $k = 120$ visualizzate nella slide precedente convergono asintoticamente verso valori di regime differenti.

Determinare analiticamente tale valori.

Secondo quanto prescritto dal T.F.R.G., tali valori non sono altro che il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita, valutato in corrispondenza dei valori di k considerati

$$W_{y_{des}}^{y}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{k}}{(s+1)(s+2)(s+5)+k} \qquad \mu = W_{y_{des}}^{y}(0) = \frac{\mathrm{k}}{10+k}$$

$$k = 0.5 \qquad \mu = \frac{\mathrm{k}}{10+k} = \frac{0.5}{10+0.5} \approx 0.047$$

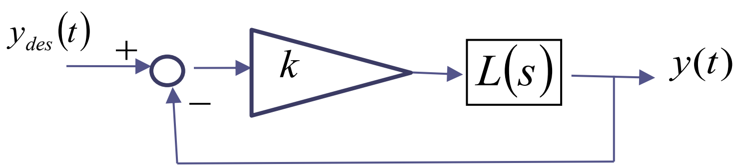
$$k = 50 \qquad \mu = \frac{\mathrm{k}}{10+k} = \frac{50}{10+50} \approx 0.83$$

$$k = 120 \qquad \mu = \frac{\mathrm{k}}{10+k} = \frac{120}{10+120} \approx 0.92$$

Taratura del luogo delle radici

Il problema della taratura del luogo delle radici consiste nella determinazione del valore del guadagno k associato ad un determinato punto P del luogo delle radici

$$L(s)=\bar{k}\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$



Formula di taratura di un punto P del luogo delle radici

$$\boxed{k=\frac{1}{\bar{k}}\,\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{r_1r_2\ldots r_m} \qquad \begin{aligned}\rho_i&=dist(P,p_i)\\ r_i&=dist(P,z_i)\end{aligned}}$$

$dist(P,p_i)$ Distanza del punto P dal generico polo p_i della L(s)

$dist(P,z_i)$ Distanza del punto P dal generico zero z_i della L(s)

$\bar{k}$ Guadagno in alta frequenza della FdT L(s)

Determinazione del guadagno in alta frequenza (HFG) di una FdT

Il guadagno in alta frequenza $\bar{k}$ di una generica funzione di trasferimento F(s) si calcola, analiticamente mediante la formula seguente

$$\bar{k} = \lim_{s \to \infty} s^{n-m} F(s)$$

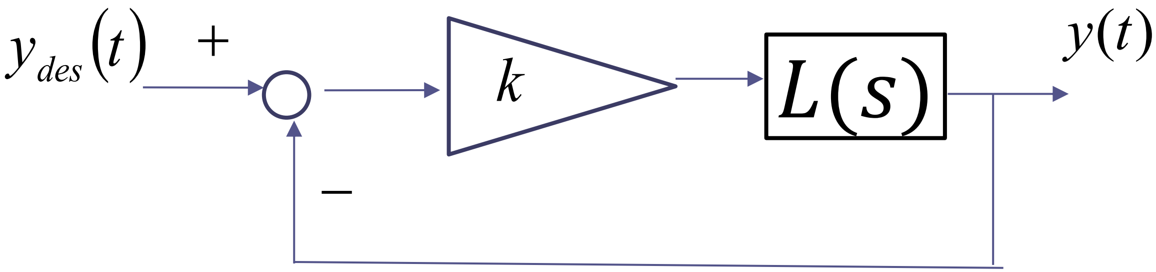
in cui n ed m sono rispettivamente il grado del polinomio a denominatore ed il grado del polinomio a numeratore. Non si confonda tale parametro con il guadagno statico, che ha tutt'altro significato.

Operativamente, il calcolo di tale parametro può essere effettuato in maniera molto più semplice individuando, a numeratore e denominatore della $F(s)$, i termini polinomiali di grado più elevato, e facendo il rapporto fra i rispettivi coefficienti

Esempio

$$F(s) = \frac{3s + 10}{2s^2 + s + 1} \qquad\qquad \bar{k} = 3/2$$

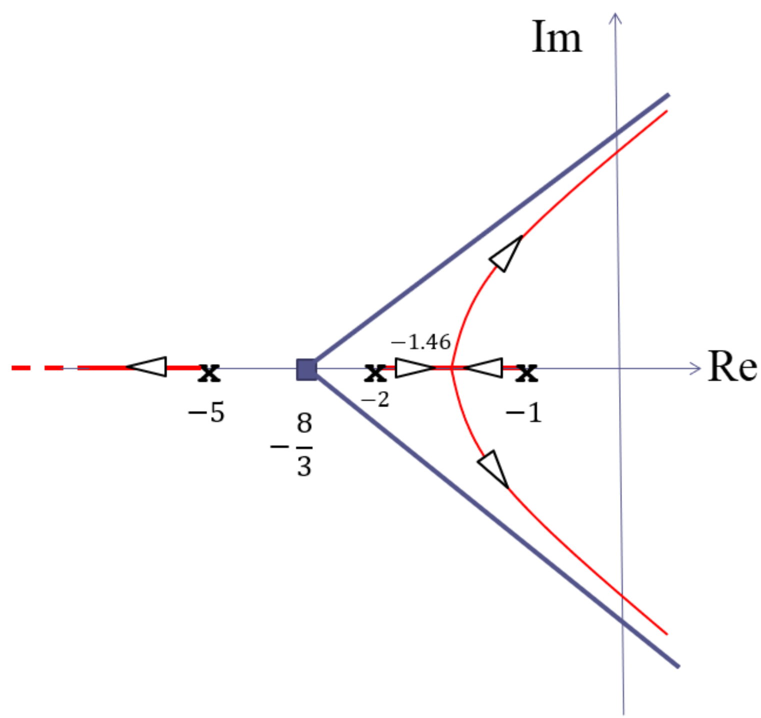
Torniamo all'esempio 4



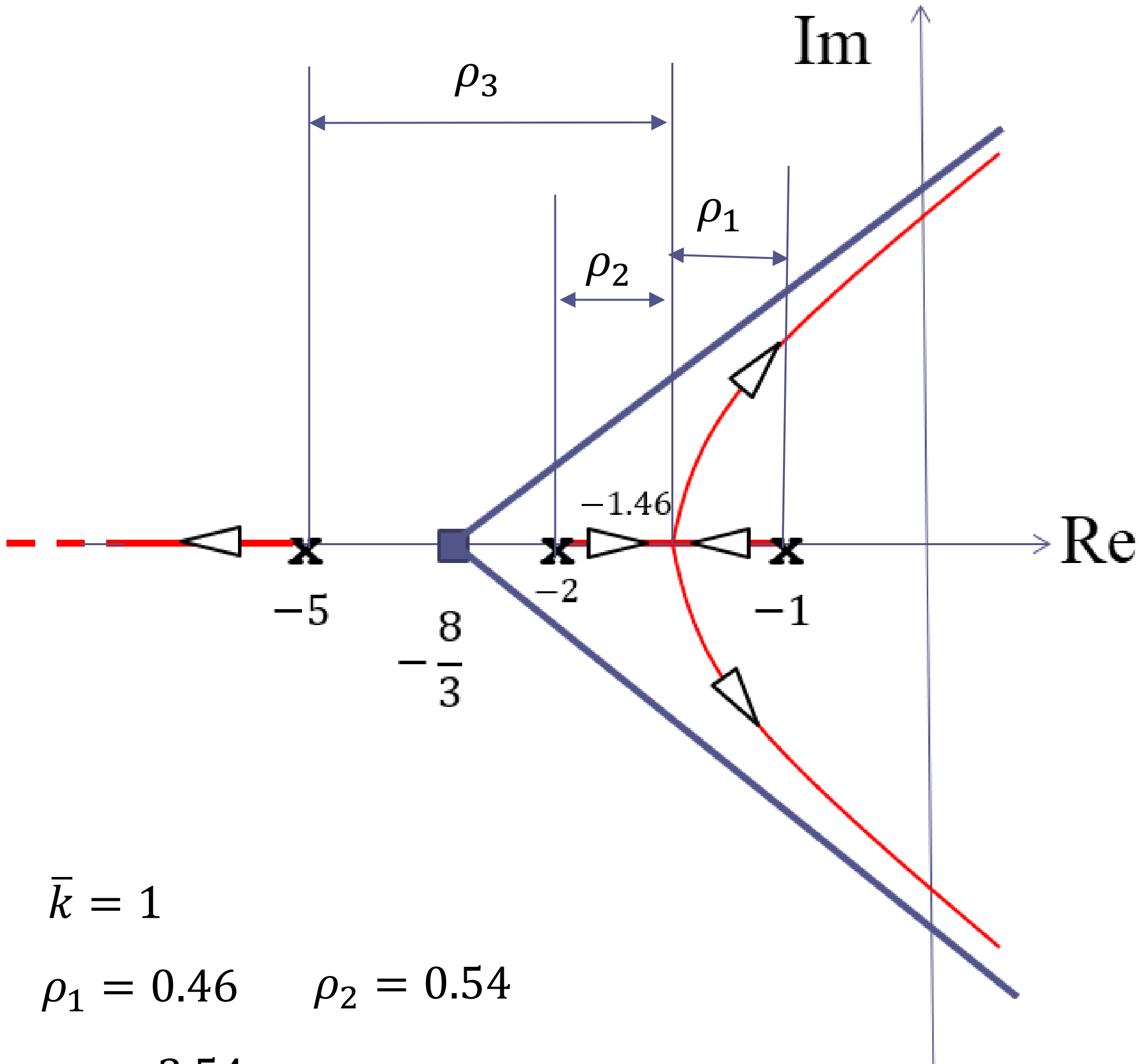
$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$\bar{k} = 1$ Guadagno in alta frequenza della L(s)

con riferimento al quale era stato tracciato il seguente LdR



Tariamo il punto doppio in −1.46 per identificare il valore del guadagno k oltre il quale si inducono oscillazioni nella risposta al gradino a ciclo chiuso



Taratura del punto doppio in -1.46

$$k = \frac{1}{\bar{k}}\rho_1\rho_2\rho_3$$

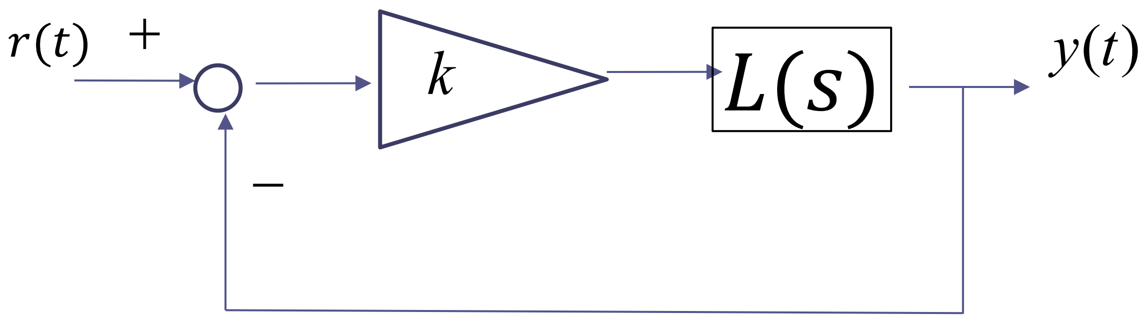
$\bar{k} = 1$

$\rho_1 = 0.46 \qquad \rho_2 = 0.54$

$\rho_3 = 3.54$

$k = 0.46 \cdot 0.54 \cdot 3.54 \approx 0.88$

Esempio 5 Con riferimento al seguente sistema in retroazione



$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k.

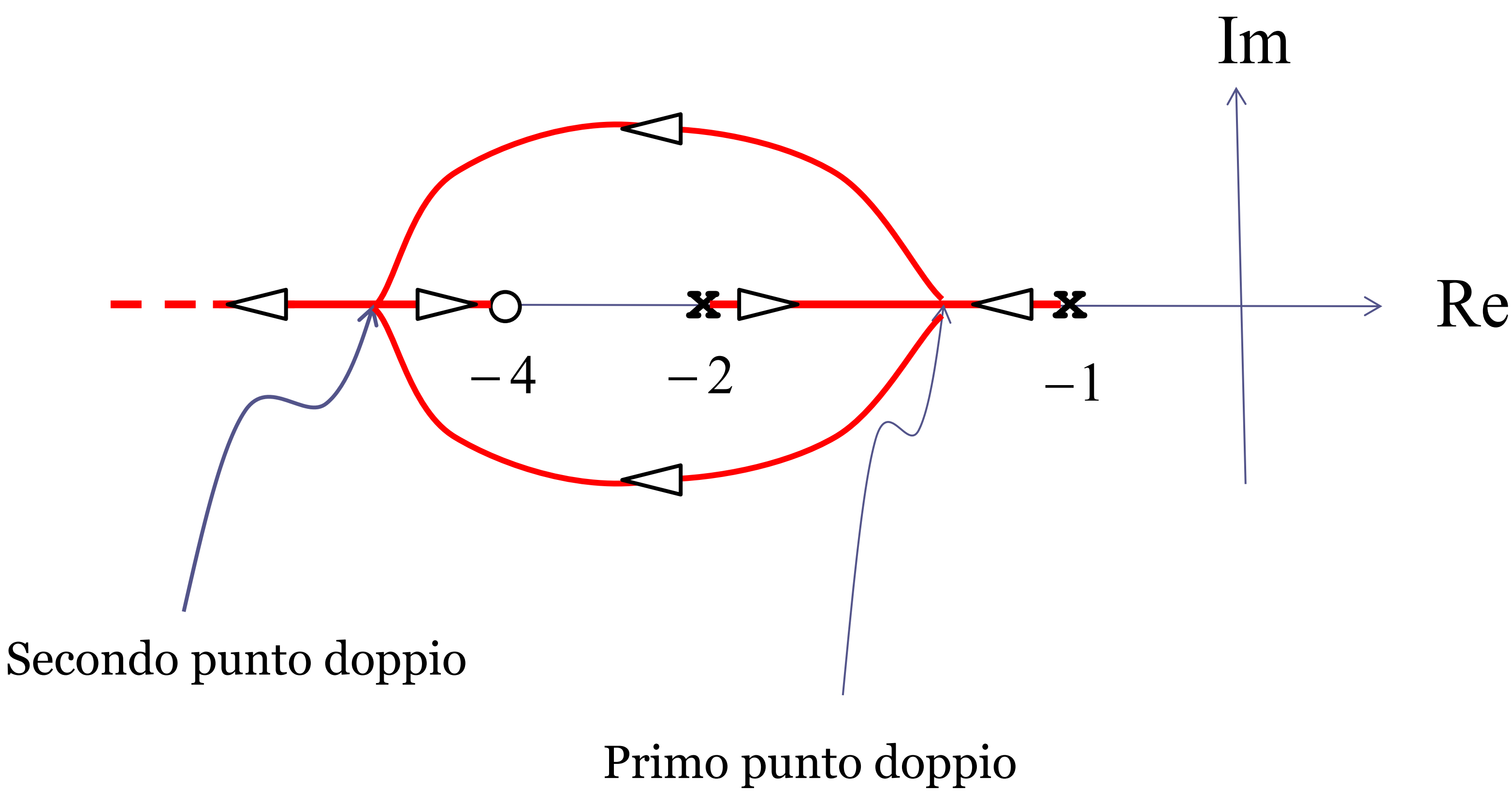
FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)} = \frac{\frac{2k(s+4)}{(s+1)(s+2)}}{1+\frac{2k(s+4)}{(s+1)(s+2)}} = \frac{2k(s+4)}{(s+1)(s+2)+2k(s+4)}$$

Guadagno statico della FdT a ciclo chiuso $\mu = W_r^y(0) = \frac{8k}{2+8k}$

$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Mappa poli-zeri della L(s) e segmenti dell'asse reale che appartengono al LdR. Nessuno di tali segmenti è un ramo del LdR.



Superato il primo punto doppio i rami abbandonano l'asse reale per farvi ritorno in corrispondenza di un secondo punto doppio posizionato alla sinistra dello zero.

Superato il secondo punto doppio, un ramo evolve verso lo zero, ed un ramo va verso meno infinito

$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Calcoliamo le coordinate dei due punti doppi

Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s^* - z_i} = 0$$

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -2, \qquad z_1 = -4$$

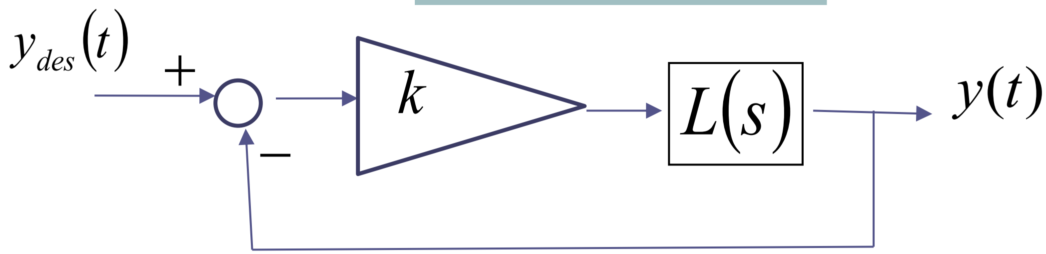
$$\frac{1}{s^* + 1} + \frac{1}{s^* + 2} - \frac{1}{s^* + 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{s^{*2} + 8s^* + 10}{(s^*+1)(s^*+2)(s^*+4)} = 0$$

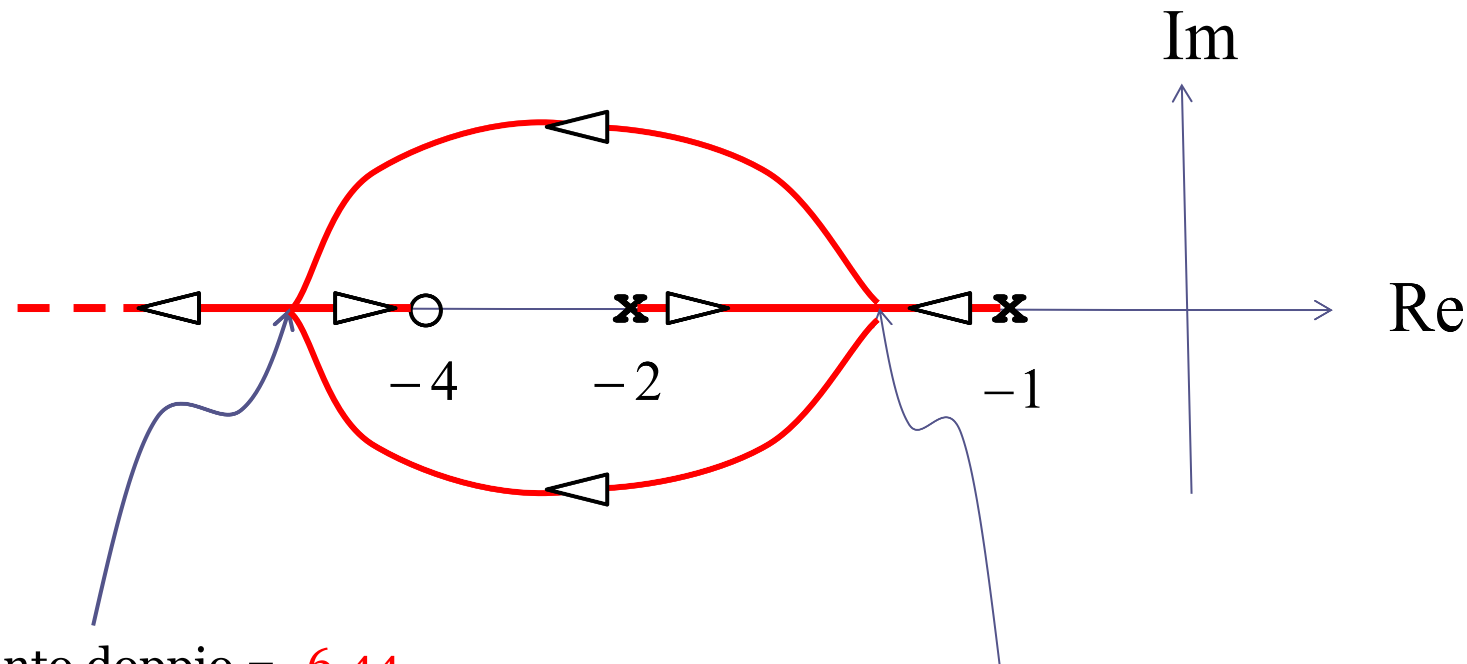
$$s^{*2} + 8s^* + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -1.55 \qquad s_2 = -6.44$$

Entrambi OK

$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\bar{k} = 2$$



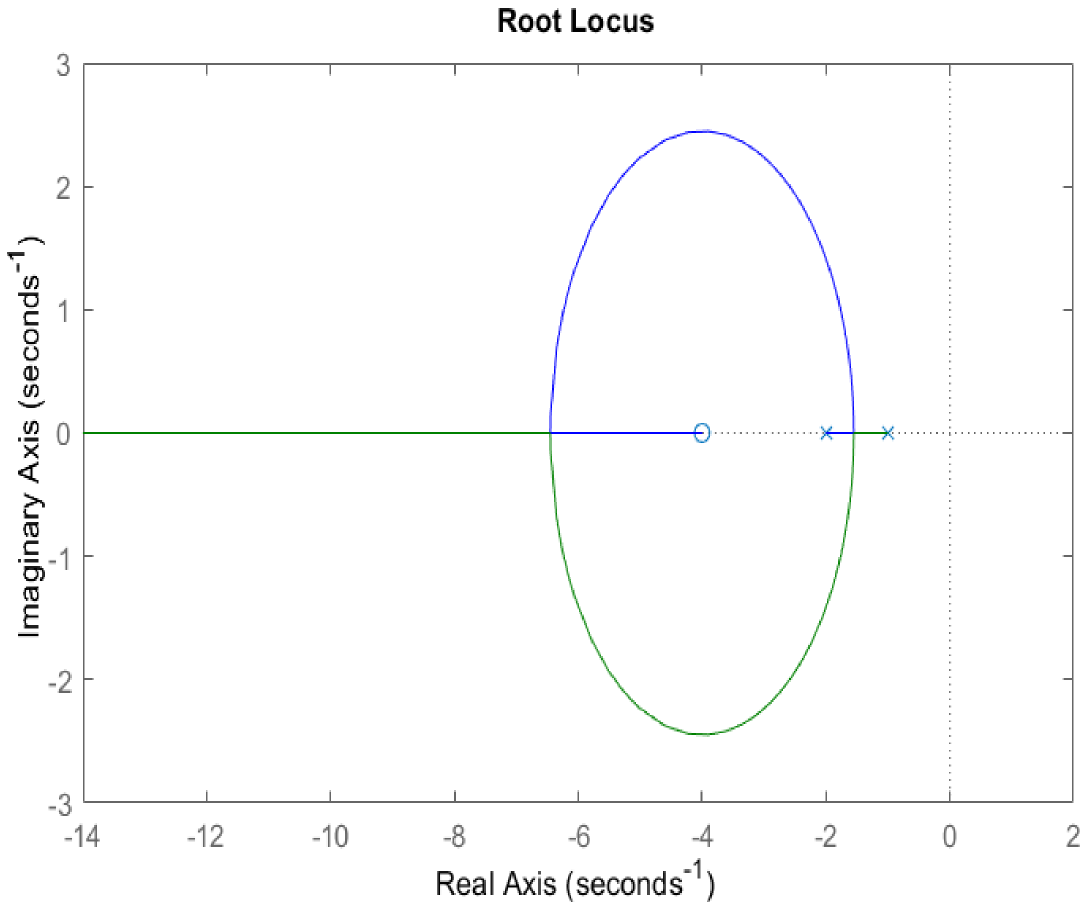


Punto doppio = -6.44

Punto doppio = -1.55

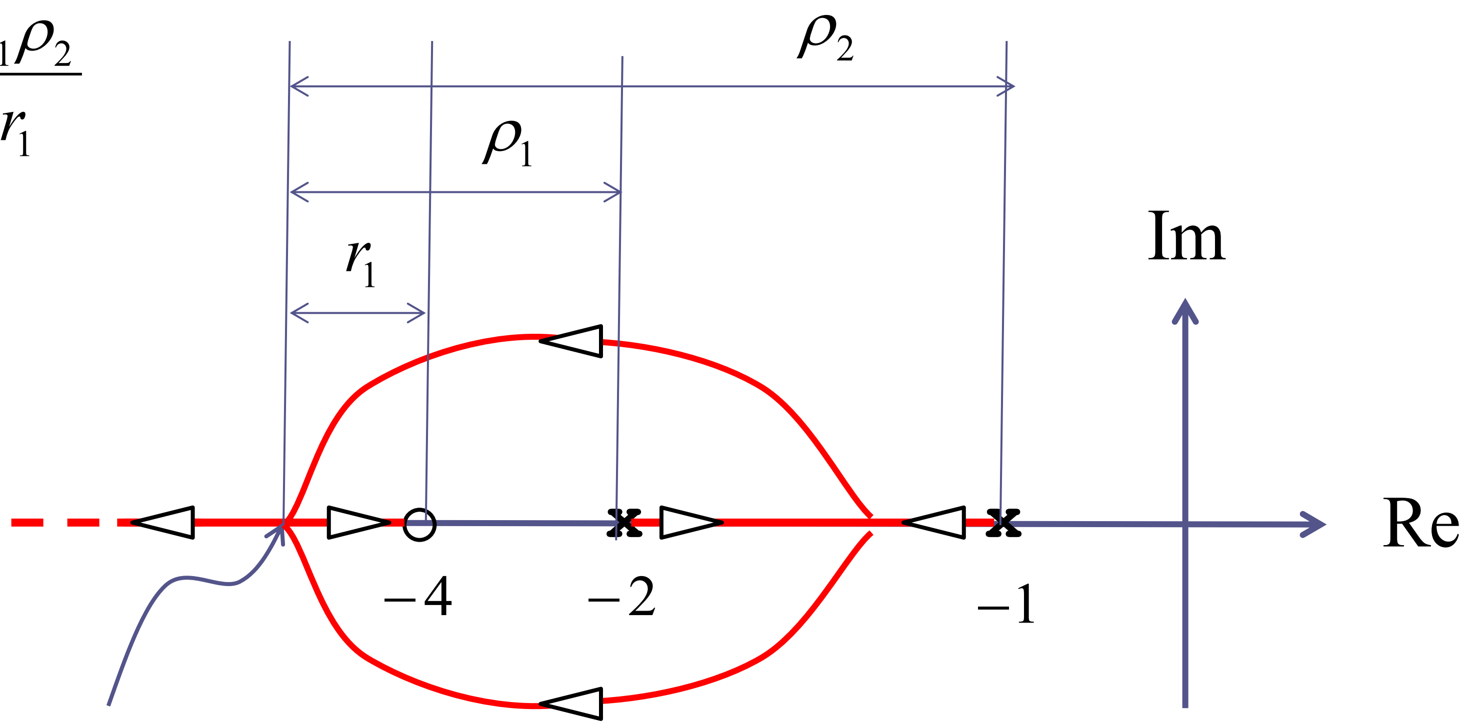
```
s=tf('s')
L=2*(s+4)/((s+1)*(s+2));

rlocus(L)
```



Per quale valore di k i due poli del sistema a ciclo chiuso sono pari entrambi a -6.44 ?

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1}$$



Punto doppio = -6.44

$r_1 = 2.44 \qquad \rho_1 = 4.44 \qquad \rho_2 = 5.44$

Taratura del
punto doppio in -6.44

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1} = \frac{1}{2} \frac{(4.44)\cdot(5.44)}{(2.44)} = 4.94$$

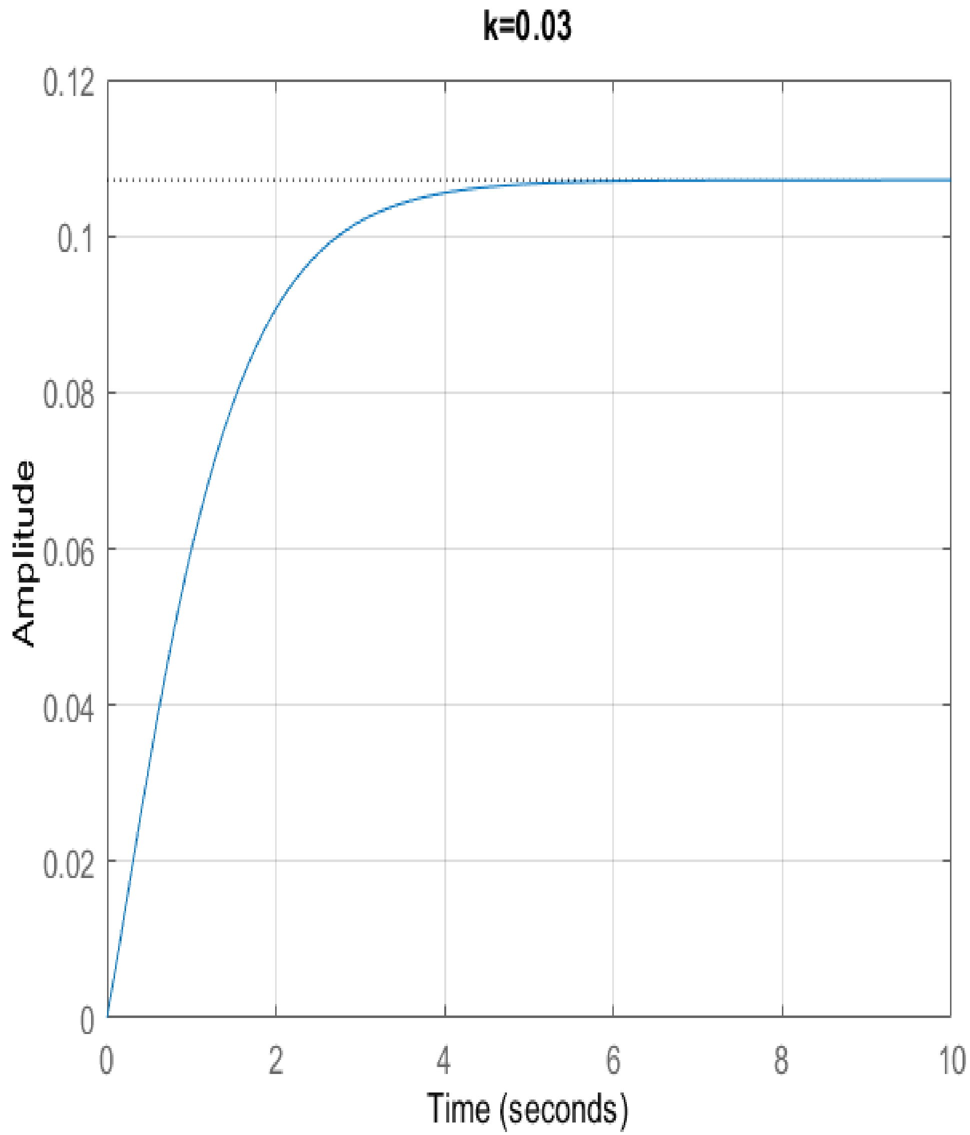
Taratura del punto doppio in -1.55

$$k = \frac{1}{2}\frac{(0.55)\cdot(0.45)}{2.45} = 0.05$$

$0 < k < 0.05$ Risposta monotona esponenziale (due poli reali negativi ed un o zero più in alta frequenza rispetto ai due poli).

$0.05 < k < 4.94$ Risposta oscillatoria

$k > 4.94$ Risposta con sovraelongazione seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime (due poli reali negativi ed uno zero più in bassa frequenza rispetto ai due poli)

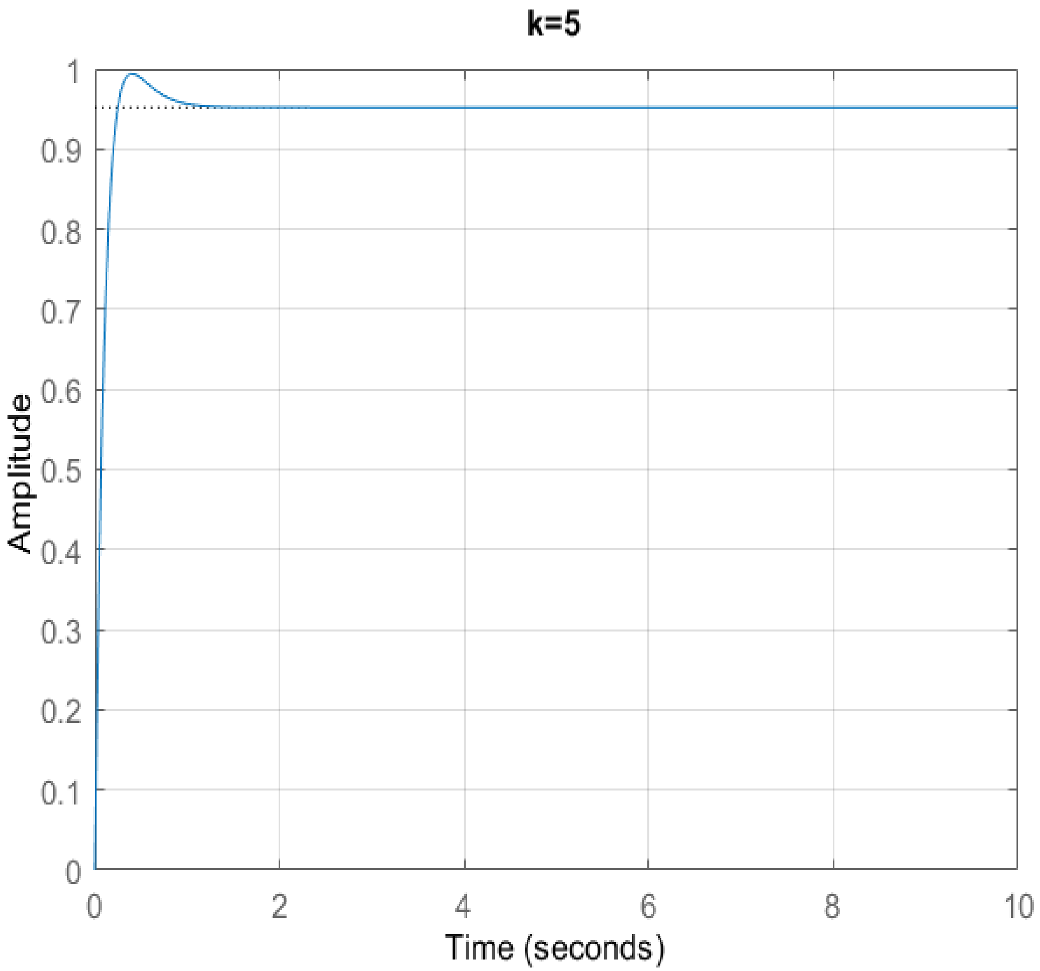


$$0 < k < 0.05$$

Risposta monotona esponenziale (due poli reali negativi ed uno zero più in alta frequenza rispetto ai due poli).

$$k = 0.03$$

$$\mu = \frac{8k}{2+8k} = 0.107$$



$k > 4.94$

Risposta con sovraelongazione seguita da una convergenza monotona verso il valore di regime (due poli reali negativi ed un o zero più in bassa frequenza rispetto ai due poli)

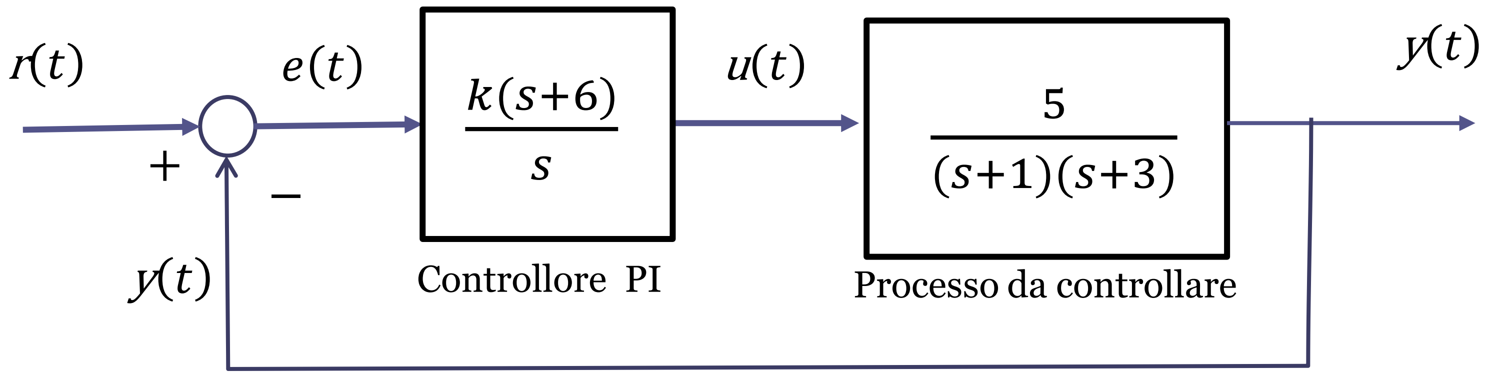
```
s=tf('s')

k=0.03;
G=2*k*(s+4)/((s+1)*(s+2)+2*k*(s+4));
figure(1)
step(G,[0:0.01:10]),grid
title ('k=0.03')

k=5;
G=2*k*(s+4)/((s+1)*(s+2)+2*k*(s+4));
figure(3)
step(G,[0:0.01:10]),grid
title ('k=5')
```

Esercizi di approfondimento da risolvere in autonomia

Esercizio



valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k. Individuare l'intervallo di valori del guadagno k in corrispondenza dei quali la risposta al gradino a ciclo chiuso è monotona crescente.

Soluzione

Stabilita a ciclo chiuso del sistema di controllo: $\leq \mathrm{k} \leq 1.2$

Risposta monotona crescente: $0 < k < 0.022$

Caratteristiche della risposta al variare del guadagno k

Valore di regime coincidente con l'ampiezza del set-point ($\mu = W_r^y(0) = 1$)

$0 < k < 0.022$

Risposta monotona esponenziale. All'aumentare di k la risposta al gradino va a regime più rapidamente.

$0.0022 < k < 1.2$

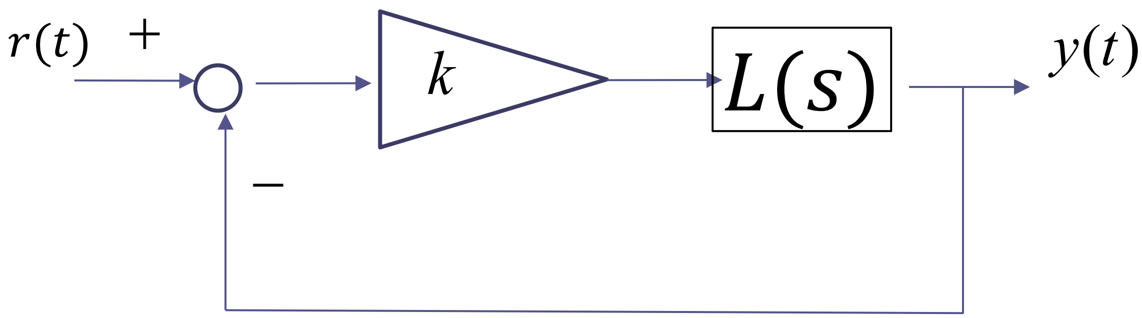
Risposta oscillatoria smorzata. All'aumentare di k si riduce progressivamente lo smorzamento (quindi aumenta la sovraelongazione) ed aumenta progressivamente la costante di tempo equivalente (quindi la risposta al gradino va a regime più lentamente)

$k > 1.2$

Sistema di controllo instabile. La risposta al gradino diverge

Svolgimento

Rappresentiamo il sistema di controllo secondo lo schema standard per il tracciamento del LdR



$$L(s) = \frac{(s+6)}{s} \cdot \frac{5}{(s+1)(s+3)} = \frac{5(s+6)}{s(s+1)(s+3)}$$

FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)} = \frac{\frac{5k(s+6)}{s(s+1)(s+3)}}{1+\frac{5k(s+6)}{s(s+1)(s+3)}} = \frac{5k(s+6)}{s(s+1)(s+3)+5k(s+6)}$$

Guadagno statico della FdT a ciclo chiuso $\mu = W_r^y(0) = 1$

$$P_{car}(s) = s(s+1)(s+3) + 5k(s+6) = s^3 + 4\mathrm{s}^2 + (3+5\mathrm{k})\mathrm{s} + 30\mathrm{k}$$

Deriviamo le condizioni sul guadagno k che garantiscono la stabilita a ciclo chiuso del sistema di controllo

$$4 \cdot (3+5\mathrm{k})\mathrm{s} > 30\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{k} \leq 1.2 = k_{cr}$$

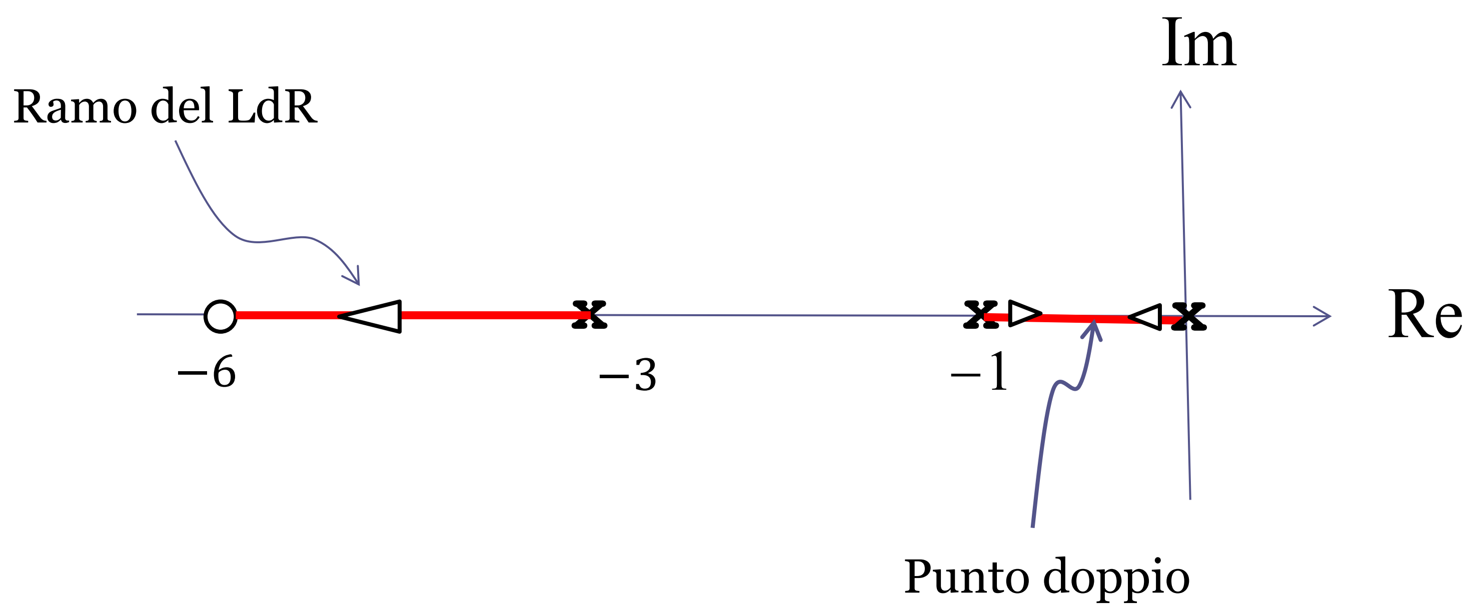
$0 \leq \mathrm{k} \leq 1.2$ Sistema di controllo asintoticamente stabile a ciclo chiuso

$\mathrm{k} = 1.2$ Sistema di controllo al limite di stabilita

$\mathrm{k} > 1.2$ Sistema di controllo instabile a ciclo chiuso

$$L(s) = \frac{5(s+6)}{s(s+1)(s+3)}$$

Mappa poli-zeri della L(s) e segmenti dell'asse reale che appartengono al LdR. Il segmento che unisce il polo in -3 con lo zero in -6 uno dei tre rami del LdR.

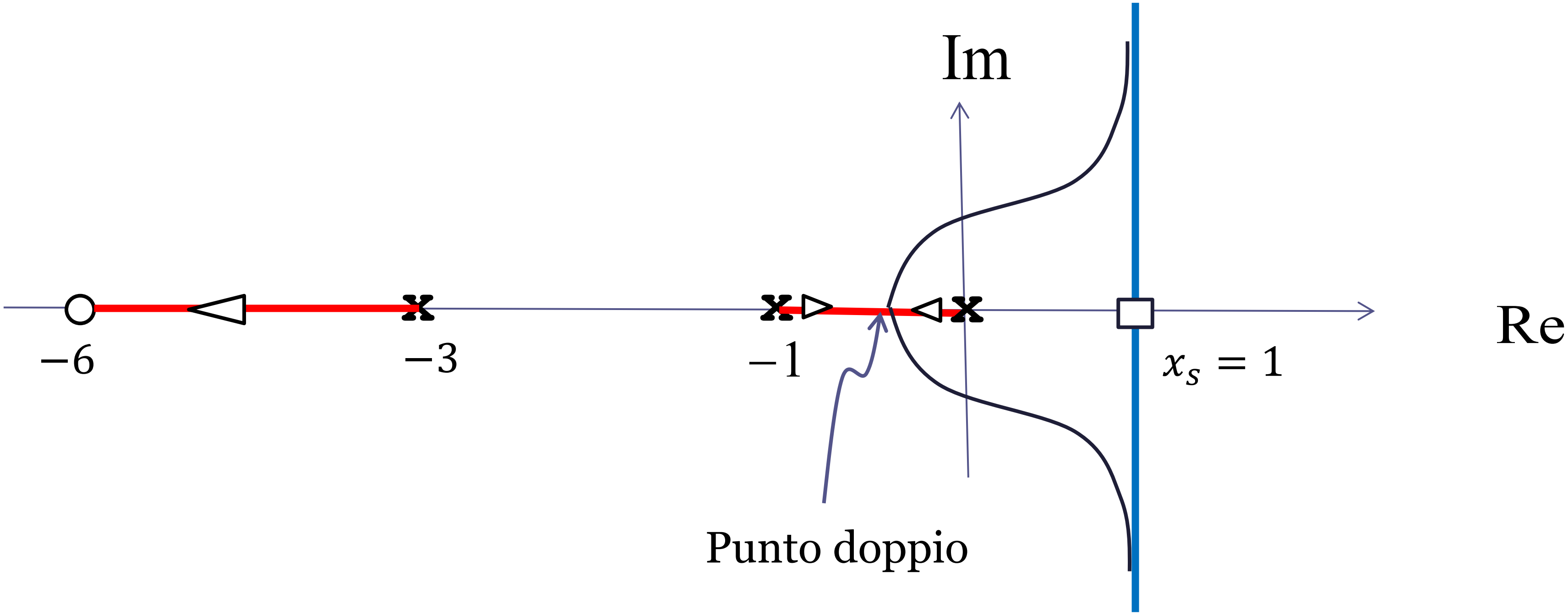


Superato il punto doppio i due rami del LdR che partono dall'origine e dal polo in -1 abbandonano l'asse reale per convergere verso i due asintoti.

Individuiamo il centro stella e tracciamo gli asintoti.

Ascissa del centro stella:

$$x_s = \frac{-1-3-(-6)}{2} = 1$$



Eq. dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s^* - z_i} = 0$$

$p_1 = 0, \quad p_2 = -1,$

$p_1 = -3, \; z_1 = -6$

$$\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^* + 1} + \frac{1}{s^* + 3} - \frac{1}{s^* + 6} = 0$$

$$\frac{1}{s^*}+\frac{1}{s^*+1}+\frac{1}{s^*+3}-\frac{1}{s^*+6}=0$$

$$\frac{2s^{*3}+22s^{*2}+48s^*+18}{s(s^*+1)(s^*+3)(s^*+6)}=0$$

$$2s^{*3}+22s^{*2}+48s^*+18=0$$

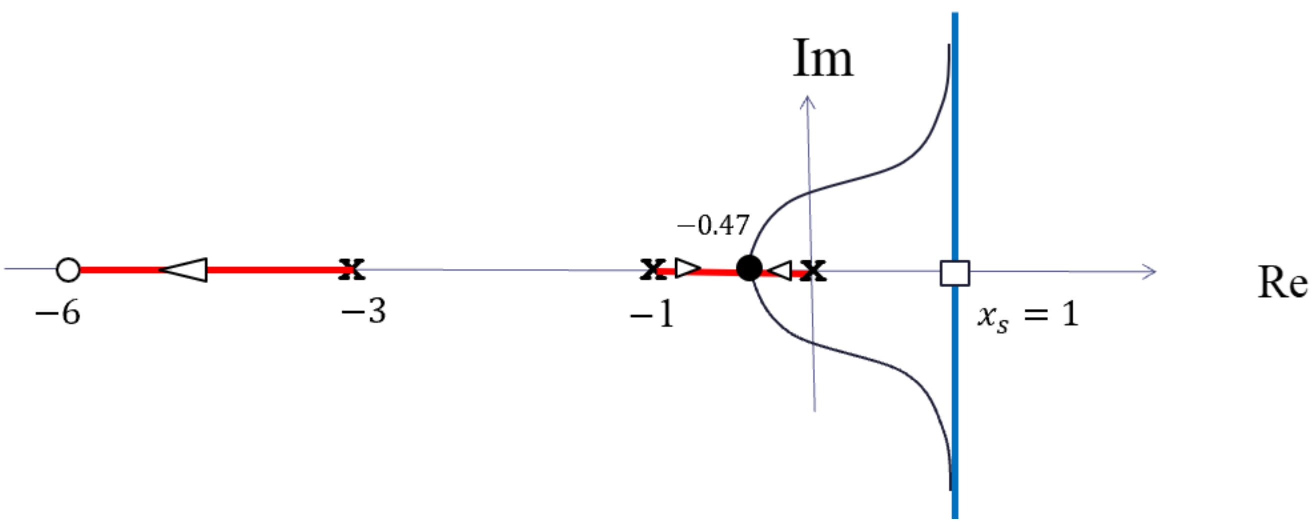
$$s^{*3}+11s^{*2}+24s^*+9=0$$

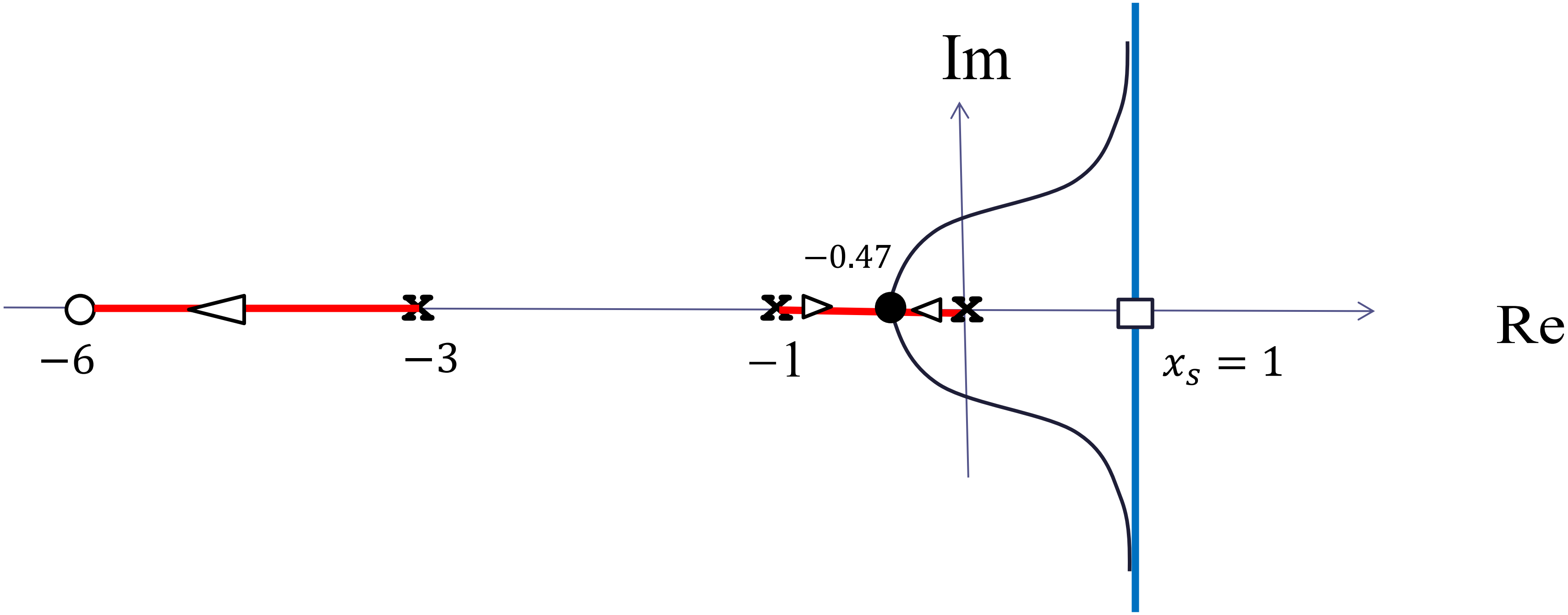
Radici calcolate con Matlab

$s_1=-0.47$ OK

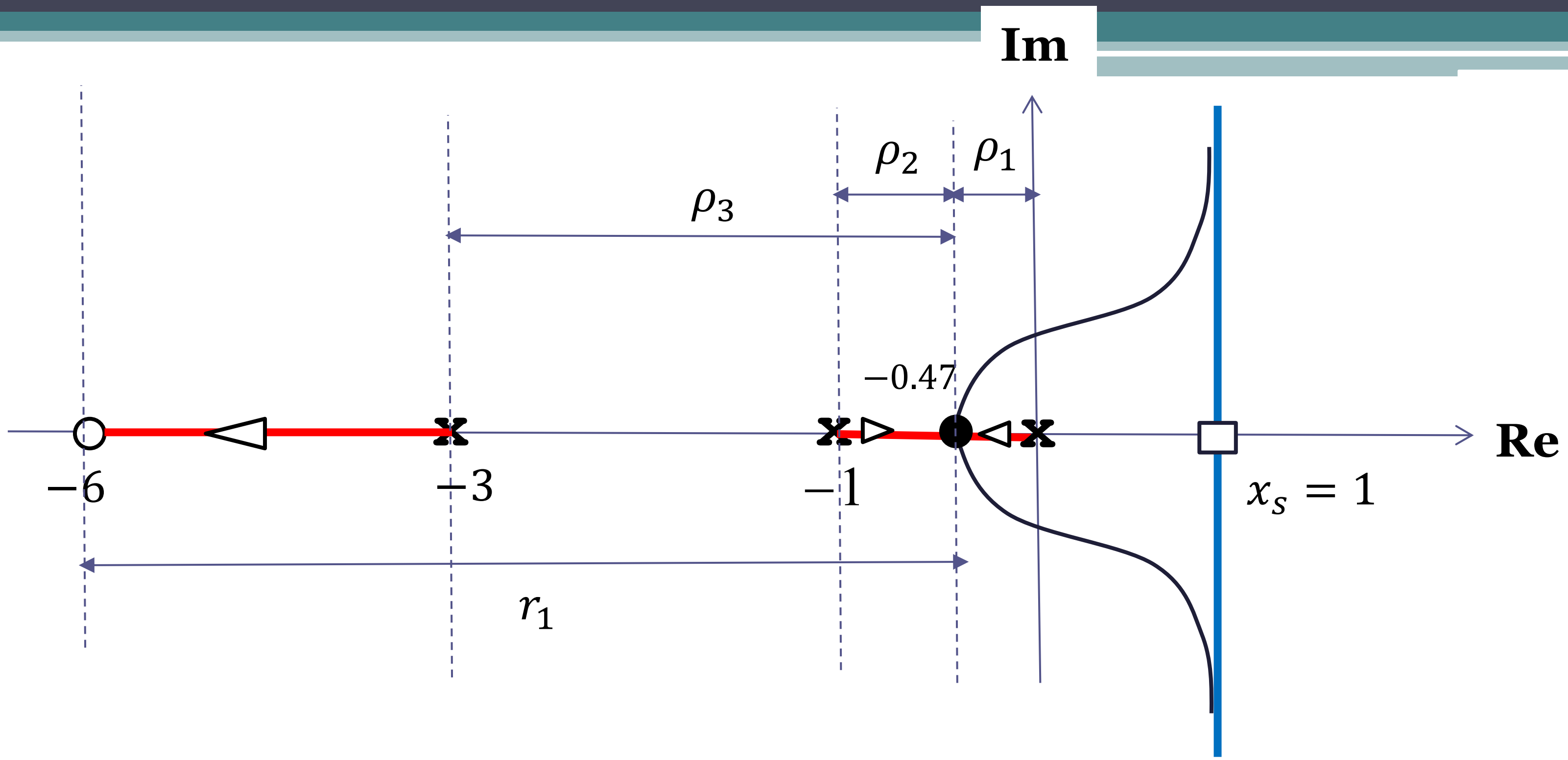
$s_2=-2.31$ Non appartiene al LdR

$s_3=-8.21$ Non appartiene al LdR





l’intervallo di valori del guadagno k in corrispondenza dei quali la risposta al gradino a ciclo chiuso è monotona crescente è l’intervallo che va da zero fino al valore del guadagno associato al punto doppio, al di sopra del quale due dei tre poli a ciclo chiuso diventano complessi coniugati e danno luogo as oscillazioni.
Si deve pertanto tarare il punto doppio, collocato in -0.47



Taratura del punto doppio in -0.47

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{r_1}$$

$\bar{k} = 5$

$\rho_1 = 0.47$ $\quad r_1 = 5.53$

$\rho_2 = 0.53$

$\rho_3 = 2.53$

$$k = \frac{0.47 \cdot 0.53 \cdot 2.53}{5 \cdot 5.53} \approx 0.022$$

$0 < k < 0.022$

Risposta monotona esponenziale (tre poli reali negativi ed un o zero più in alta frequenza rispetto ai tre poli). All'aumentare di k la risposta al gradino va a regime più rapidamente.

$0.0022 < k < 1.2$

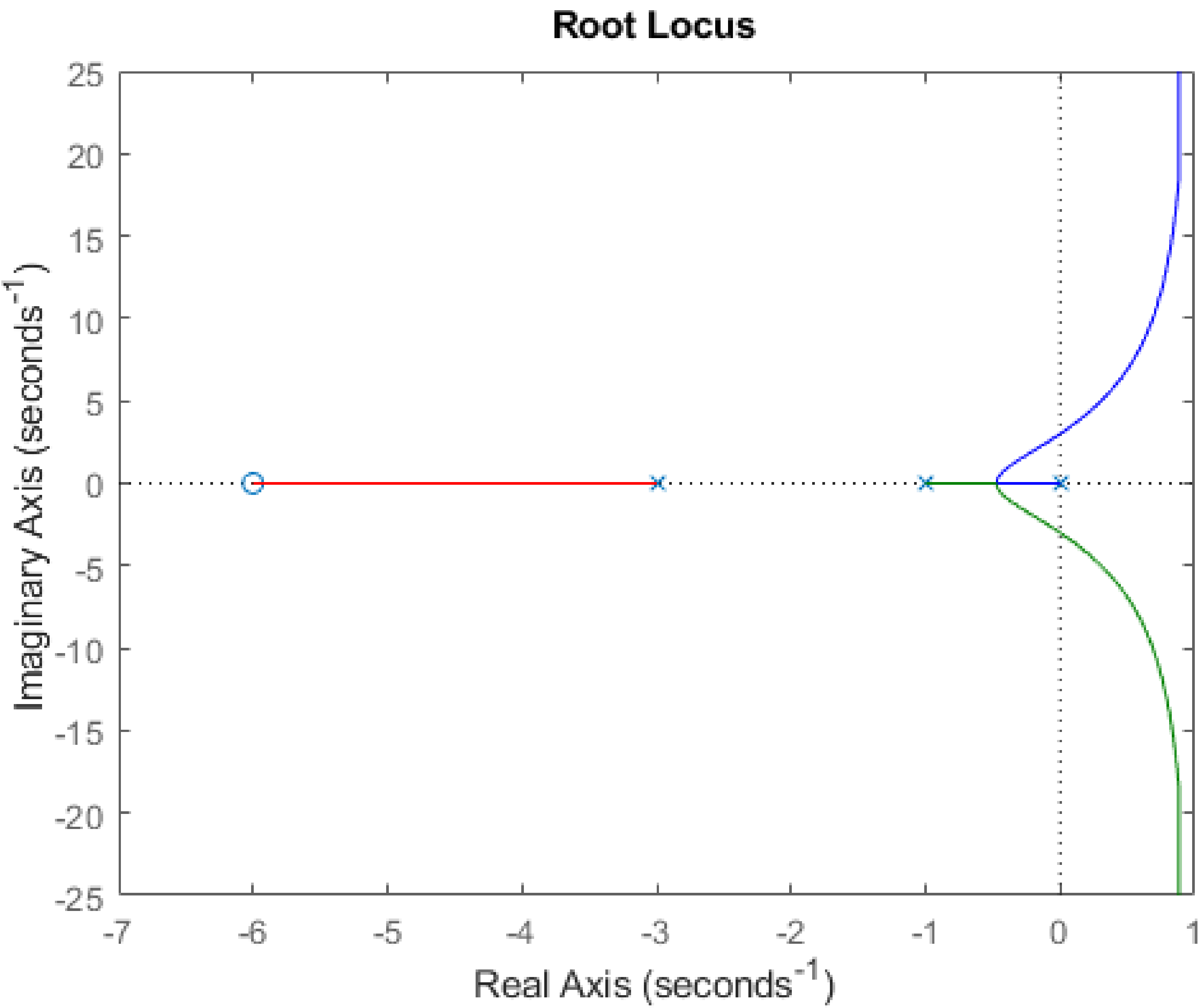
Risposta oscillatoria smorzata. All'aumentare di k si riduce progressivamente lo smorzamento (quindi aumenta la sovraelongazione) ed aumenta progressivamente la costante di tempo equivalente (quindi la risposta al gradino va a regime piu lentamente)

$k > 1.2$

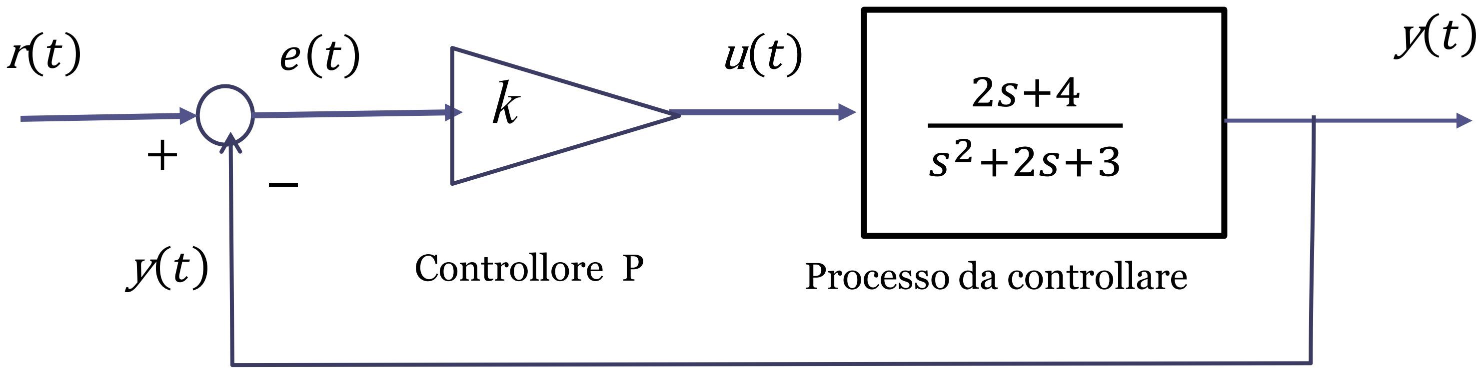
Sistema di controllo instabile. La risposta al gradino diverge

Il valore di regime della risposta a ciclo chiuso ad un set-point $r(t)$ a gradino unitario è sempre pari ad 1 (in conseguenza del fatto che $\mu = W_r^y(0) = 1$), indipendentemente dal valore di k (ovviamente cio è vero fintantoché k non eccede il valore critico di 1.2)

```
s=tf('s')
L=5*(s+6)/(s*(s+1)*(s+3));
rlocus(L),
```



Esercizio



valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k. Individuare l'intervallo di valori del guadagno k in corrispondenza dei quali la risposta al gradino a ciclo chiuso è esente da oscillazioni

Soluzione

Stabilita a ciclo chiuso del sistema di controllo: $\forall\ \mathrm{k} > 0$

Risposta esente da oscillazioni: $k \geq 2.72$

Caratteristiche della risposta al variare del guadagno k

Valore di regime $\dfrac{4k}{3+4k}$

$0 < k < 2.72$ Risposta oscillatoria smorzata.

$k \geq 2.72$ Risposta con sovraelongazione ma esente da oscillazioni

Svolgimento

$$L(s) = \frac{2s+4}{s^2+2s+3}$$

Il polinomio $s^2 + 2s + 3$ ha radici: $s_{1,2} = -\frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i$

FdT a ciclo chiuso

$$W_r^y(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)} = \frac{k \cdot \frac{2s+4}{s^2+2s+3}}{1+k \cdot \frac{2s+4}{s^2+2s+3}} = \frac{k(2s+4)}{s^2+(2+2k)s+3+4k}$$

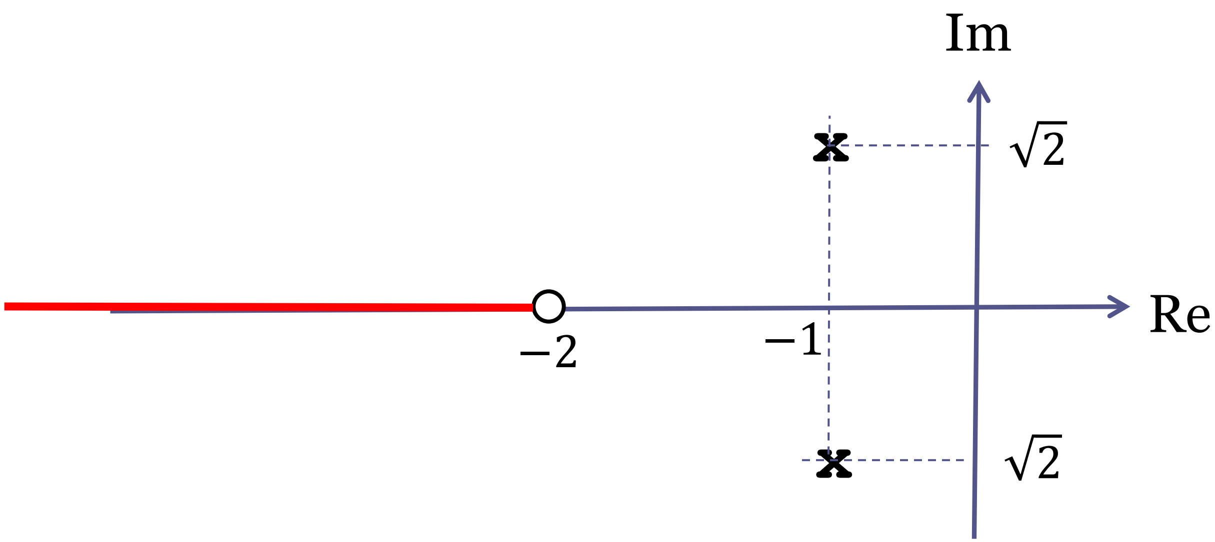
Guadagno statico della FdT a ciclo chiuso $\mu = W_r^y(0) = \frac{4k}{3+4k}$

$$P_{car}(s) = s^2 + (2+2k)s + 3 + 4k$$

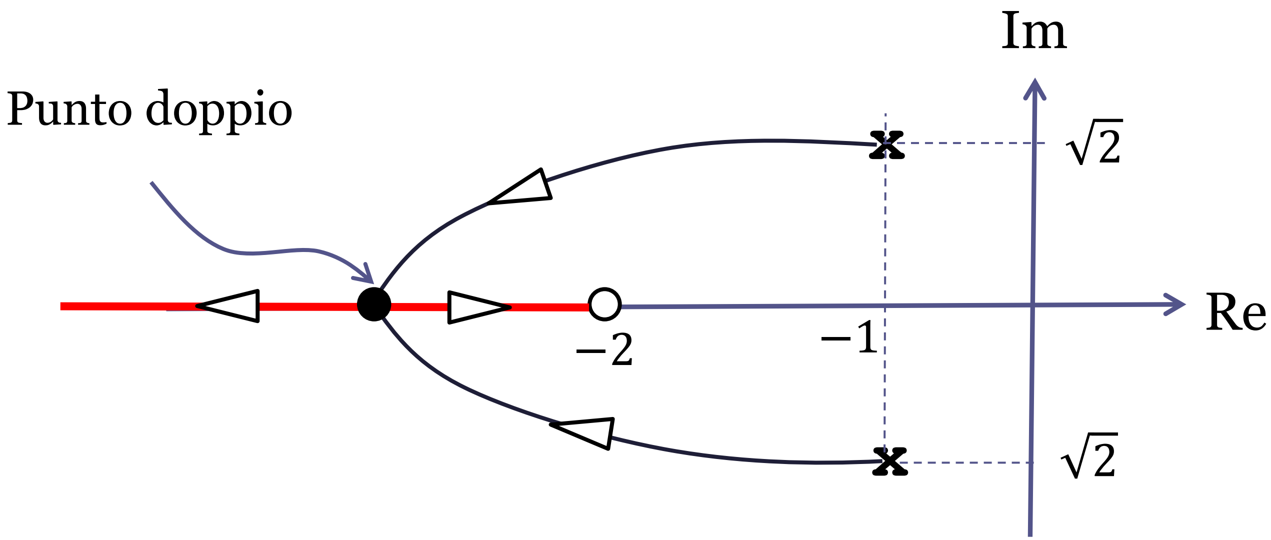
Sistema di controllo asintoticamente stabile a ciclo chiuso per ogni valore positivo di k (regola di Cartesio)

$$L(s) = \frac{2s+4}{s^2+2s+3}$$

Mappa poli-zeri della L(s) e segmenti dell'asse reale che appartengono al LdR. Il segmento evidenziato in rosso NON è un ramo del LdR.



I due rami del LdR, che originano dai due poli di L(s), devono obbligatoriamente convergere verso un punto doppio sull'asse reale collocato alla sinistra del punto -2, e dopo avere raggiunto tale punto doppio un ramo andrà verso destra (per tendere asintoticamente verso lo zero) mentre l'altro ramo convergerà verso sinistra e andrà verso la direzione asintotica.



I due rami del LdR, che originano dai due poli di L(s), devono obbligatoriamente convergere verso un punto doppio sull'asse reale collocato alla sinistra del punto -2 , e dopo avere raggiunto tale punto doppio un ramo andrà verso destra (per tendere asintoticamente verso lo zero) mentre l'altro ramo convergerà verso sinistra e andrà verso la direzione asintotica.

Eq. dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-z_i} = 0$$

$$p_1 = -1 + \sqrt{2}i$$

$$p_2 = -1 - \sqrt{2}i$$

$$z_1 = -2$$

$$\frac{1}{s+1-\sqrt{2}i} + \frac{1}{s+1+\sqrt{2}i} - \frac{1}{s+2} = 0$$

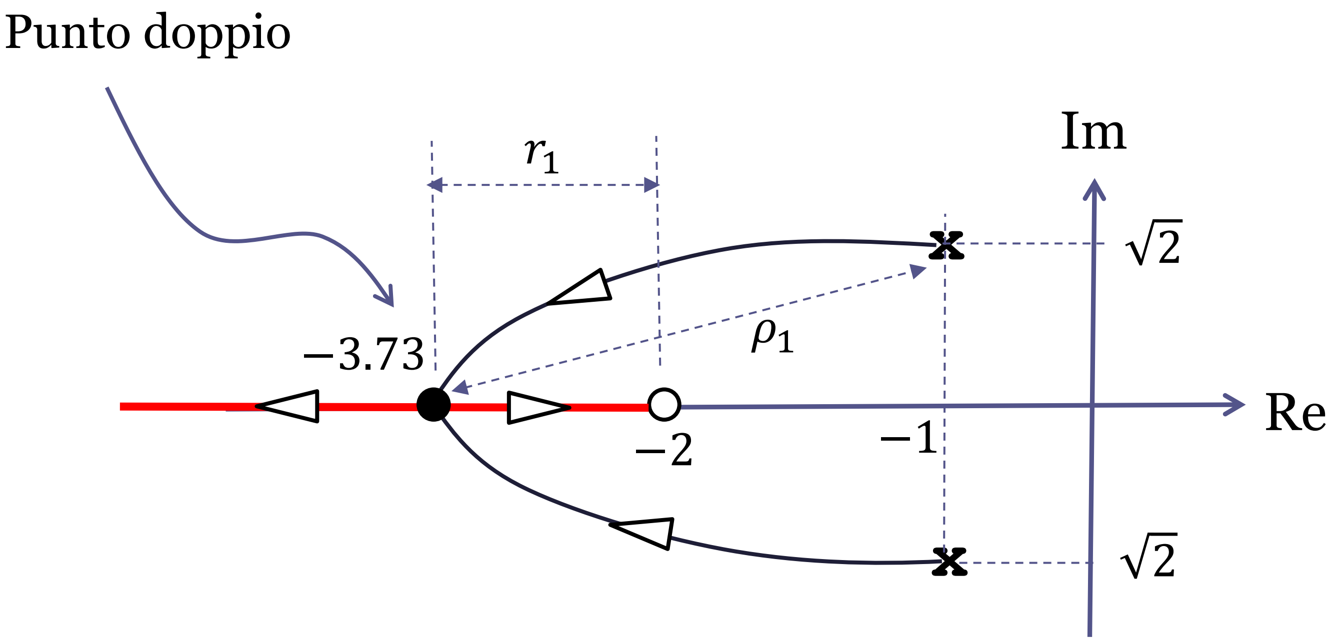
$$\frac{2(s+1)}{s^2+2s+3} - \frac{1}{s+2} = \frac{2(s+1)(s+2)-(s^2+2s+3)}{(s^2+2s+3)\cdot(s+2)} = \frac{s^2+4s+1}{(s^2+2s+3)\cdot(s+2)} = 0$$

$$2s^2+4s+1=0$$

$s_1 = -2-\sqrt{3} \approx -3.73$ OK

$s_2 = -2+\sqrt{3} \approx -0.26$ Non appartiene al LdR

Il punto doppio ha ascissa ≈ -3.73



Taratura del punto doppio in -3.73

$\bar{k}$ = guadagno in alta frequenza di $L(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+2s+3}$

$\bar{k} = 2$

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1}$$

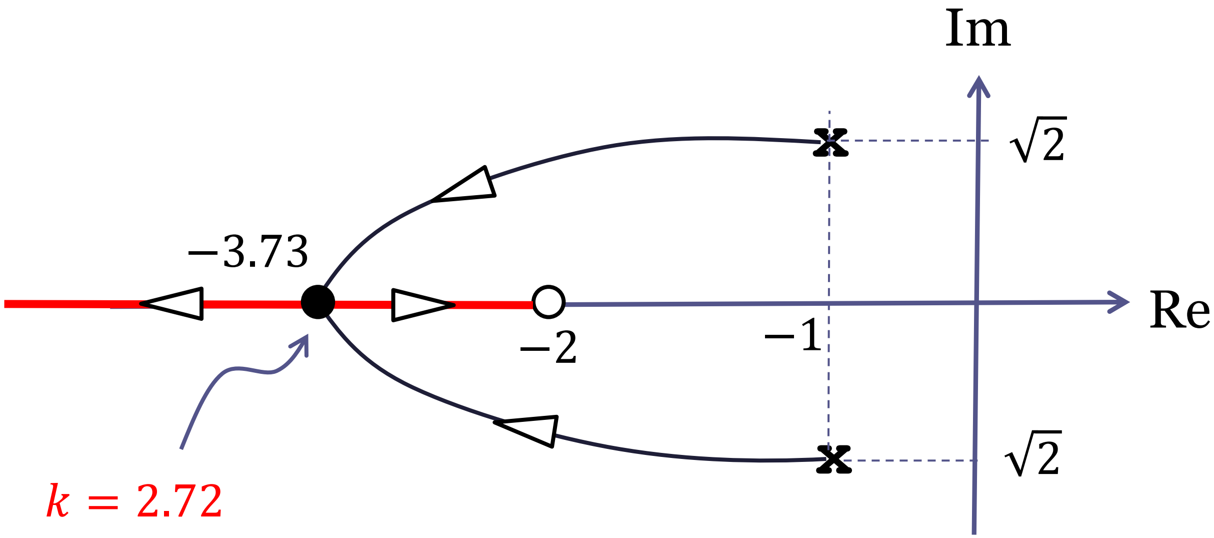
$$\rho_1 = \sqrt{(2.73)^2 + 2} \approx 3.07$$

$$\rho_2 = \rho_1$$

$$r_1 = 1.73$$

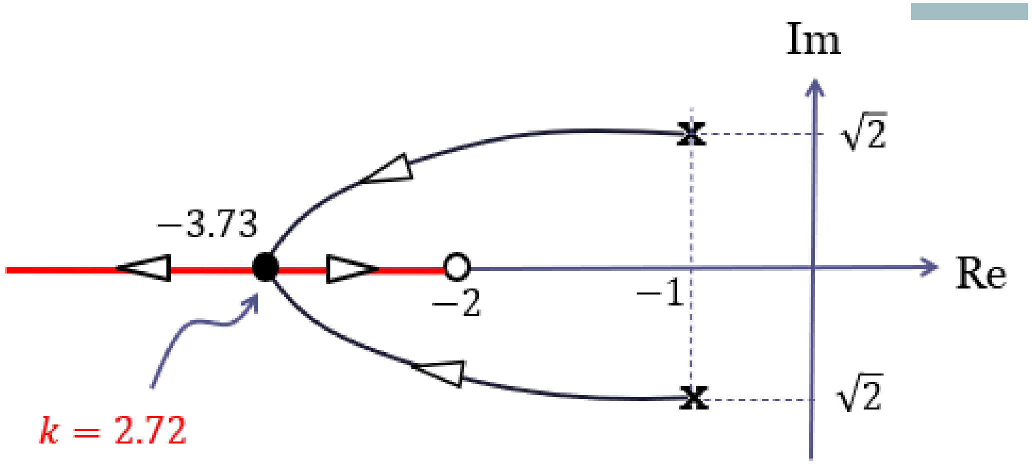
$$k = \frac{1}{2}\frac{(3.07)^2}{1.73} \approx 2.72$$

Luogo delle radici completo



Caratteristiche della risposta al gradino al variare di k

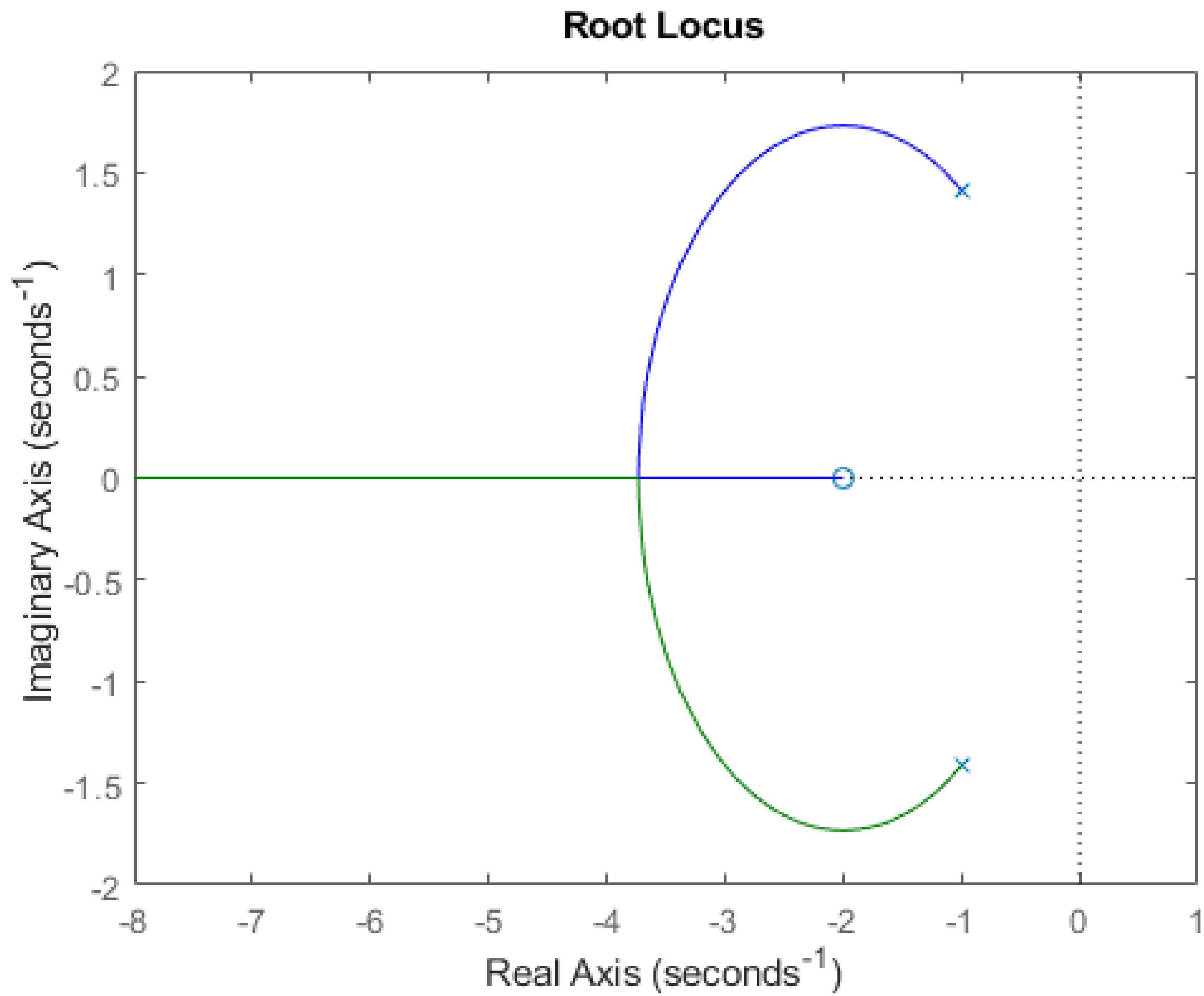
Valore di regime della risposta al gradino unitario $\frac{4k}{3+4k}$



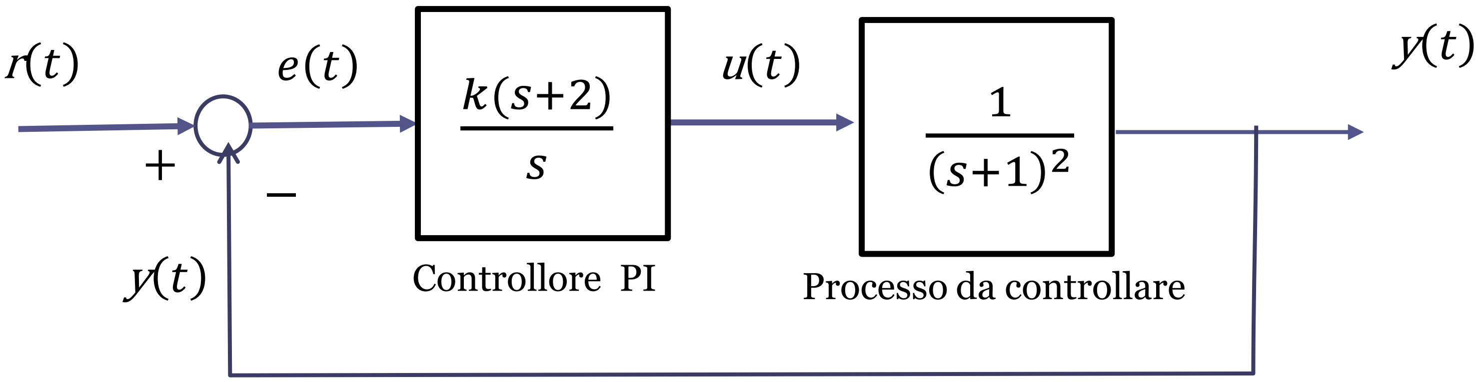
$0 < k < 2.72$ Risposta **oscillatoria** smorzata (due poli complessi coniugati e uno zero reale).

$k \geq 2.72$ Risposta con sovraelongazione ma esente da oscillazioni (due poli reali negativi ed un o zero più in bassa frequenza rispetto ai poli). All'aumentare di k il tempo di assestamento aumenta.

```
s=tf('s')
L= (2*s+4)/(s^2+2*s+3);
rlocus(L),
```



Esercizio



valutare le proprietà di stabilita a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta al gradino a ciclo chiuso al variare del guadagno k. Individuare l'intervallo di valori del guadagno k in corrispondenza dei quali la risposta al gradino a ciclo chiuso è monotona crescente.

```
s=tf('s')
L=(s+2)/(s*(s+1)^2);
rlocus(L),
```