Polinomio di Taylor

Polinomi di Taylor

Data una funzione f derivabile n volte in x_0 , esiste uno e un solo polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$ con la proprietà che

$$T_n(x_0) = f(x_0), \qquad T_n'(x_0) = f'(x_0), \dots, T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Tale polinomio si chiama polinomio di Taylor ed è

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinomio di centro x_0 e grado n

Polinomi di Taylor

In forma compatta

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Polinomi di Taylor

Quando il punto è $x_0 = 0$ *otteniamo polinomio di Maclaurin*

Ossia:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{f''(x_0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

In forma compatta

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}x^n$$

Polinomi di Taylor

Quando si approssima f(x) con $T_n(x)$ si commette un errore

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Tale errore può essere espresso in due forme

a) Resto di Peano

$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ *per* $x \to x_0$

ossia $$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Polinomi di Taylor

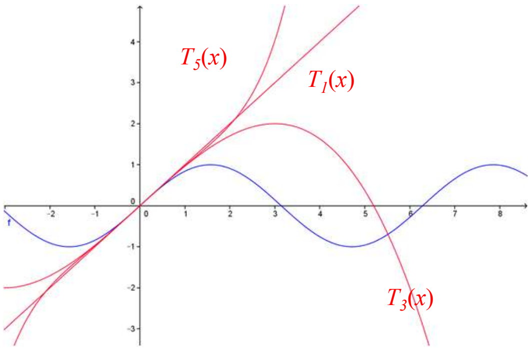
b) Se *f è derivabile* $n+1$ *volte in* (a,b) *escluso al più* x_0,

$\forall x \in (a,b),\ \exists c$ *compreso tra* x *e* x_0 :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$ *Formula di Lagrange*

Polinomi di Taylor

Esempio.
y=sinx in x=0, $T_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ *solo potenze dispari*



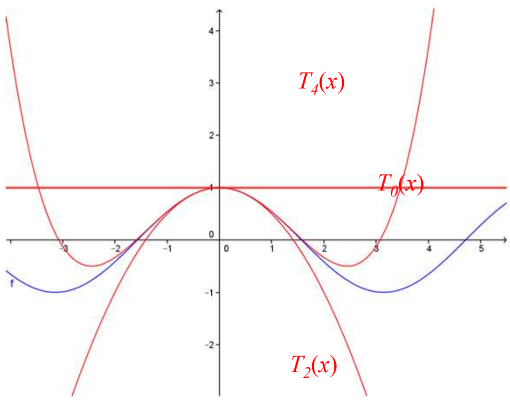
$$T_1(x)=x$$

$$T_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

Polinomi di Taylor

Esempio
y=cosx in x=0 $T_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ *solo potenze pari*



$$T_0(x)=1$$

$$T_2(x)=1-\frac{x^2}{2!}$$

$$T_4(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

Polinomi di Taylor

Analogamente in $x_0=0$, si ottiene

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x)$$

Polinomi di Taylor

Esercizio

Scrivere il polinomio di Maclaurin di grado 2 che approssima $f(x)=ln(1-3x)$

Polinomi di Taylor

Esercizio
Utilizzando la formula di Maclaurin calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right)$$

Polinomi di Taylor

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

Polinomi di Taylor

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\text{con} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$