Il formalismo hilbertiano

Francesco Paoli

Filosofia della scienza, 2025-26

David Hilbert (1862-1943)

I *Fondamenti della geometria* (1899)

Nel 1899 Hilbert dà una fondazione assiomatica completa alla geometria euclidea tridimensionale, colmando certe lacune del sistema assiomatico di Euclide.
Per i geometri pre-hilbertiani (Riemann, Helmholtz, Klein), la geometria è ancora la scienza dello spazio reale, e la sua organizzazione deduttiva dipende strettamente da tale interpretazione privilegiata: le sue proposizioni fondamentali hanno un *contenuto* precisamente individuato.
Per Hilbert (anticipato in ciò da Peano), gli assiomi geometrici non esprimono nessun contenuto che non sia quello delle loro mutue relazioni di tipo puramente logico. Gli assiomi sono definizioni implicite dei concetti in essi contenuti. Qualunque sistema di enti che soddisfa gli assiomi ha lo stesso diritto di essere chiamato e inteso come costituito di punti, piani e rette. Non sono gli oggetti specifici che contano in geometria, ma le loro relazioni, le strutture che esse formano.

Metodo assiomatico e dimostrazione di coerenza

Grazie ad un assioma di continuità che introduce nel suo calcolo, Hilbert può dimostrare la *categoricità* del calcolo stesso: ogni suo modello è isomorfo al modello che si ottiene prendendo come punti le triple ordinate di numeri reali.

Hilbert ritiene essenziale un'indagine *metamatematica* che abbia per oggetto i sistemi assiomatici stessi. L'esistenza di un ente che non sia concretamente dato è solo un'espressione metaforica per dire che le condizioni che lo specificano non sono contraddittorie, e questa dimostrazione spetta alla metamatematica.

La coerenza dell'aritmetica

In un lavoro del 1904 (*Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica*), Hilbert individua come problema metamatematico fondamentale la dimostrazione della coerenza dell'aritmetica: tutte le altre teorie matematiche sono state dimostrate coerenti relativamente all'aritmetica, ma in quest'ultimo caso non è più possibile scaricare il problema su un'altra teoria. Hilbert fornisce anche un'intelaiatura generale di una prova di coerenza per un calcolo **C**:

- mostrare che gli assiomi di **C** godono di una certa proprietà P;
- mostrare che le regole di inferenza di **C** preservano la proprietà P;
- mostrare che le contraddizioni non godono della proprietà P.

Per far ciò è essenziale ridurre l'aritmetica a un calcolo *formale* **PA** di formule su cui operare per derivazioni. Le dimostrazioni stesse divengono oggetti matematici le cui proprietà possono essere studiate.

Il finitismo

Tra il 1917 e il 1928, Hilbert scrive i suoi lavori fondamentali di filosofia della matematica, tra cui *Il pensiero assiomatico* (1917) e *Sull'infinito* (1926).

Le antinomie indicano che il concetto di infinito, se pur indispensabile per l'edificio matematico, è quello in cui si annidano i pericoli per la sua coerenza. Per Hilbert, "i modi di inferenza che impiegano l'infinito devono in generale essere sostituiti con processi finiti che danno precisamente lo stesso risultato".

Nella riduzione della matematica a un insieme di calcoli formali ciò che va assunto come dato sono "certi oggetti extralogici intuitivamente presenti come esperienza immediata antecedente a ogni pensiero [...] Dev'essere possibile osservare questi oggetti completamente in tutte le loro parti, e il fatto che essi occorrano, e che essi differiscano l'uno dall'altro e che si susseguano, o siano concatenati, è immediatamente dato in modo intuitivo, assieme agli oggetti, come qualcosa che [non] può essere ridotta a qualcos'altro".

Proposizioni reali e ideali

Queste *combinazioni finite di oggetti concreti*, che costituiscono la matematica finitista, sono la base sicura su cui fondare l'edificio matematico.

In generale, dal punto di vista finitista enunciati esistenziali della forma $\exists x P x$ non sono interpretabili, perché il dominio di variazione della variabile è infinito. Ma Hilbert non vuole rinunciare alle dimostrazioni puramente esistenziali, come fanno gli intuizionisti (la matematica non va mutilata!), bensì intende far vedere che anche queste *proposizioni ideali*, che implicano un riferimento diretto all'infinito, sono giustificabili sulla sola base delle *proposizioni reali* dell'aritmetica finitista, che presuppongono solo un ragionamento combinatorio finito su oggetti concreti.

La soluzione proposta

Per Hilbert, non è necessario che ogni singolo enunciato ideale sia interpretabile finitisticamente, ma è il *sistema assiomatico nel suo complesso* che va analizzato e giustificato. Per fare questo, è necessario fornirne una dimostrazione di coerenza di **PA** che utilizzi solo i metodi intuitivamente giustificati che appartengono al pensiero finitista. Questo avviene in due passi:

1. Formalizzare l'aritmetica concreta entro specifici linguaggi in cui le regole di formazione delle espressioni e le regole di dimostrazione siano specificate in modo dominabile;
2. Prendere la teoria matematica formalizzata **PA** come oggetto di indagine matematica e dimostrare con metodi finitisti che in **PA** non esiste nessuna formula α tale che $\vdash_{\mathbf{PA}} \alpha, \vdash_{\mathbf{PA}} \neg\alpha$.

Vantaggi del progetto finitista

Gli oggetti dell'indagine metamatematica — termini, formule, dimostrazioni, derivazioni — sono oggetti finiti, a differenza degli enti matematici di cui parlano. Hilbert è quindi convinto di poter condurre il suo progetto rimanendo nell'ambito del finito.
Per la legge di Duns Scoto $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$, inoltre, dimostrare la coerenza di **PA** equivale a far vedere che, ad esempio, la formula $0 = 1$ non è dimostrabile in essa. Quindi, la condizione di coerenza implica che la matematica delle proposizioni ideali è un'*estensione conservativa* della matematica delle proposizioni reali: se **PA** contiene una contraddizione, questa è già presente nella sua parte reale.

Thoralf Skolem (1887-1963)

Quali sono i metodi finitisticamente accettabili?

Hilbert, per molto tempo, non è chiaro su questo punto. Successivamente si convince che i metodi finitisti siano quelli formalizzabili nell'*aritmetica ricorsiva primitiva* di Skolem, una sottoteoria senza quantificatori di **PA** in cui l'assioma di induzione viene rimpiazzato dalla più debole *regola di induzione*:

$$\frac{\alpha(0) \qquad \alpha(x) \to \alpha(S(x))}{\alpha(y)}$$

Altre applicazioni della metamatematica

Oltre che a dimostrare la coerenza di **PA**, la metamatematica dovrebbe anche servire a dimostrarne la *completezza sintattica*: per ogni enunciato α formulato nel linguaggio dell'aritmetica formalizzata , o α o $\neg\alpha$ dev'essere dimostrabile in **PA**.
Se **PA** è *corretta*, ossia dimostra solo enunciati veri nel modello standard dei numeri naturali, allora la completezza sintattica di **PA** equivale alla sua completezza semantica: ogni enunciato α vero nel modello dei numeri naturali è dimostrabile in **PA**.

John von Neumann (1903-1957)

Successi parziali

Nel 1927, John von Neumann riesce a dimostrare in modo finitista la coerenza dell'aritmetica con l'assioma di induzione limitato a proprietà esprimibili senza quantificatori. Von Neumann commenta:

> *"Il sistema di Hilbert ha superato il primo test di efficacia: è stata stabilita con metodi finitari costruttivi la validità di un sistema matematico non finitario, non puramente costruttivo. Se qualcuno riuscirà ad estendere questa garanzia al sistema più impegnativo e importante della matematica classica, potrà dirlo solo il futuro".*

Kurt Gödel (1906-1978)

Il fallimento del programma hilbertiano

In una celebre memoria del 1931, Gödel fa crollare tutti i capisaldi del progetto fondazionale hilbertiano. Dimostra infatti che:

1. Il sistema **PA** è sintatticamente incompleto: esistono enunciati aritmetici α *indecidibili* tali che **PA** non è in grado di dimostrare né α, né $\neg\alpha$. Quindi **PA**, se corretto, è anche semanticamente incompleto: esistono enunciati aritmetici veri che non sono dimostrabili in **PA**. Tale risultato, inoltre, si estende a tutti i sistemi formali che presentano certe caratteristiche. In particolare, **PA** è dunque anche *incompletabile*: l'aggiunta di ulteriori assiomi, purché fatta in modo ricorsivo, produce nuovi enunciati indecidibili.
2. Non è possibile dimostrare la coerenza di **PA** utilizzando metodi formalizzabili all'interno del sistema stesso (quindi, in particolare, usando metodi finitisti).