



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
FACOLTÀ DI SCIENZE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
(Classe LM-40 Matematica)

Introduzione all'analisi complessa

Dispense per il corso di Analisi superiore 1
A.A. 2025/2026
Docente: Claudia Anedda

Introduzione

Queste dispense ricalcano sostanzialmente le lezioni fatte in aula. In alcuni casi, però, sono riportati (per completezza) anche alcuni risultati e dimostrazioni aggiuntive. L'oggetto delle domande durante la prova d'esame, in ogni caso, riguarda contenuti specificati nel programma dettagliato, disponibile sul sito docente nella sezione insegnamenti relativo all'anno accademico di riferimento (le dimostrazioni da conoscere saranno specificate con la dicitura c.d. = con dimostrazione). Anche il diario ufficiale delle lezioni viene pubblicato sul sito a corso concluso.

Non fatevi quindi spaventare dal numero delle pagine! Gli argomenti sono trattati, tra l'altro, in maniera molto discorsiva; molti teoremi sono presentati con più formulazioni per dare un'idea di come possano essere enunciati in maniera differente in testi diversi; sono presenti molte note con richiami di definizioni (utili per lo studente che, non ricordando una tal definizione, non deve perdere tempo a cercarla).

Il Capitolo 1 contiene i prerequisiti necessari per Capitolo 2, che è l'effettiva parte di programma oggetto d'esame. Nella Bibliografia sono riportati sia dei testi concretamente citati nelle dispense sia altri testi di riferimento per l'introduzione all'analisi complessa.

Sono ben accette (anzi gradite) segnalazioni su eventuali errori e/o refusi.

Indice

1	I numeri complessi	3
1.1	Il campo dei numeri complessi	3
1.2	Proprietà e operazioni tra numeri complessi	5
1.3	Il piano di Gauss	11
1.4	Forma trigonometrica di un numero complesso	13
1.5	Forma esponenziale di un numero complesso	19
1.6	La rappresentazione sferica	26
2	Funzioni complesse	29
2.1	Funzioni complesse di variabile complessa	29
2.2	Limiti di funzioni complesse	30
2.3	Funzioni olomorfe	38
2.4	La condizione di Cauchy-Riemann	42
2.5	L'operatore di Cauchy-Riemann	50
2.6	Alcune particolari funzioni complesse	56
2.7	Funzioni armoniche	76

2.8	Curve nel piano complesso	78
2.9	Mappe conformi	80
2.10	Integrali curvilinei complessi	89
2.11	Funzioni primitive	93
2.12	Teoremi di Cauchy	100
2.13	Serie di potenze	117
2.14	Proprietà delle funzioni analitiche	124
2.15	Serie di Laurent	144
2.16	Il teorema dei residui	169
2.17	Calcolo di integrali col metodo dei residui	188

Bibliografia	205
---------------------	------------

Capitolo 1

I numeri complessi

1.1 Il campo dei numeri complessi

Consideriamo l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali e indichiamo con \mathbb{R}^2 il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definiamo in \mathbb{R}^2 le due operazioni di somma e prodotto seguenti:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y') \quad \text{e} \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Si verifica facilmente che tali operazioni sono commutative e associative (ciò segue dalla commutatività e associatività di $+$ e \cdot in \mathbb{R}).

Osserviamo che

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

mentre

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e quindi le coppie $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono l'elemento neutro per la somma e, rispettivamente, per il prodotto.

Inoltre, l'elemento $(-x, -y)$ è l'opposto (unico) di (x, y) :

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0),$$

mentre, se $(x, y) \neq (0, 0)$, la coppia $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ è l'inverso (unico) di (x, y) , essendo

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0).$$

Infine, vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma; pertanto \mathbb{R}^2 , con le due operazioni definite, ha la struttura di campo, detto **campo dei numeri complessi** e indicato con \mathbb{C} .¹

Osserviamo che \mathbb{C} contiene il sottoinsieme \mathbb{C}_0 delle coppie del tipo $(x, 0)$; \mathbb{C}_0 risulta essere un sottocampo di \mathbb{C} . Infatti, la somma e il prodotto sono chiuse in \mathbb{C}_0 :

$$(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \in \mathbb{C}_0$$

e

$$(x, 0) \cdot (x', 0) = (xx', 0) \in \mathbb{C}_0 .$$

\mathbb{C}_0 può essere ordinato ponendo $(x, 0) < (x', 0)$ se $x < x'$.

La corrispondenza biunivoca tra l'insieme \mathbb{R} e \mathbb{C}_0 definita da

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0, \quad x \mapsto (x, 0)$$

è un isomorfismo tra campi ordinati. Per questo motivo i numeri reali x possono essere identificati con i numeri complessi della forma $(x, 0)$. Si dice che il campo dei numeri complessi \mathbb{C} è un ampliamento del campo dei numeri reali \mathbb{R} . Per questo motivo, si usa spesso la convenzione di indicare la coppia $(1, 0)$ con 1. Inoltre, se $\alpha \in \mathbb{R}$, si scrive

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha, 0) \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Consideriamo ora il numero complesso $(0, 1)$; esso ha una particolare proprietà:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0),$$

cioè il suo quadrato coincide con il numero reale -1 . Per questo motivo la coppia $(0, 1)$ viene indicata con i e chiamata **unità immaginaria**. Risulta, allora, che con questa convenzione ogni numero complesso (x, y) può essere scritto in uno ed un sol modo nella forma

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = 1 \cdot x + i \cdot y = x + iy.$$

Con questa notazione le leggi di somma e prodotto definite prima diventano proprio le ordinarie regole del calcolo letterale, dove $i^2 = -1$:

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

¹In realtà il campo dei numeri complessi può essere costruito in diversi modi. Qui si è scelta questa impostazione.

e

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx').$$

Il numero complesso (x, y) viene spesso chiamato z e l'espressione

$$z = x + iy$$

è detta **forma cartesiana** o **algebrica** del numero complesso z ; x è detta **parte reale** e si indica con $\operatorname{Re}(z)$, mentre y è detta **parte immaginaria** e si indica con $\operatorname{Im}(z)$. Se la parte reale è nulla il numero viene detto **puramente immaginario** o **immaginario puro**.

1.2 Proprietà e operazioni tra numeri complessi

Consideriamo ora la divisione tra due numeri complessi. Mostriamo che $\frac{x + iy}{x' + iy'}$ è un numero complesso se $x' + iy' \neq 0$; se denotiamo con $a + ib$ il quoziente, si deve avere $x + iy = (x' + iy')(a + ib)$, cioè $x + iy = (x'a - y'b) + i(y'a + x'b)$, da cui

$$\begin{cases} x = x'a - y'b \\ y = y'a + x'b. \end{cases}$$

Il sistema ottenuto ammette l'unica soluzione

$$\begin{cases} a = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} \\ b = \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}, \end{cases}$$

essendo $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Quindi si ha

$$\frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}.$$

Per trovare il quoziente di due numeri complessi $x + iy$ e $x' + iy'$ si usa un veloce metodo pratico, cioè si moltiplica numeratore e denominatore per $x' - iy'$ (che, come si vedrà poco più avanti, è il coniugato del divisore $x' + iy'$):

$$\frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{x + iy}{x' + iy'} \cdot \frac{x' - iy'}{x' - iy'} = \frac{xx' + yy' + i(x'y - xy')}{x'^2 + y'^2}.$$

In particolare, il reciproco di un numero complesso diverso da zero è dato da

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Il numero $x - iy$ è detto **complesso coniugato** di $z = x + iy$ e si indica con \bar{z} . Risulta che

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2x \quad \text{e} \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) = 2iy,$$

cioé

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

L'operazione di coniugio gode delle seguenti proprietà rispetto alla somma e al prodotto:

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Con $\frac{1}{z}$ si denota l'inverso moltiplicativo di z ; da quanto mostrato prima si ha che

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

dove $|z|$ è il *modulo* di z (si veda poco più avanti). Più in generale, si definisce

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} \quad \text{per } w \neq 0.$$

Inoltre si ha che $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

Più in generale, se $R(z, w, u, \dots)$ denota una qualunque operazione razionale applicata ai numeri complessi z, w, u, \dots , si ha

$$\overline{R(z, w, u, \dots)} = R(\bar{z}, \bar{w}, \bar{u}, \dots).$$

Per esempio, se z_0 è una radice dell'equazione

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

allora \bar{z}_0 è una radice dell'equazione

$$\bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1} z + \bar{a}_n = 0.$$

In particolare, se i coefficienti a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ sono reali, z_0 e \bar{z}_0 sono entrambe radici dell'equazione (le radici non reali di un'equazione a coefficienti reali sono complesse e coniugate).

Un numero complesso è reale (cioè ha parte immaginaria nulla) se e solo se $z = \bar{z}$. Esso è immaginario puro (cioè ha parte reale nulla) se e solo se $z = -\bar{z}$.

Risulta inoltre che il coniugio è un'operazione involutoria, cioè $\overline{\bar{z}} = z$; quindi $z\bar{z}$ è reale, e si ha

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0;$$

la quantità $\sqrt{x^2 + y^2}$ è detta **modulo** o **valore assoluto** di z , e si indica con $|z|$; allora si ha $z\bar{z} = |z|^2$.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

ii) $|z| = |\bar{z}|$;

iii) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$, $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$, $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$;

iv) $|zw| = |z||w|$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$;

v) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (disuguaglianza triangolare);

vi) $|z - w| \geq ||z| - |w||$ e $|z + w| \geq ||z| - |w||$.

Le i), ii) sono evidenti. La iii) segue, rispettivamente, dal fatto che

$$x \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

da

$$y \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

e

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $\operatorname{Re}(z) = |z|$ se e solo se z è reale e $z \geq 0$.

Per la iv), per il modulo del prodotto osserviamo che

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2;$$

il quoziente $\frac{z}{w}$, con $w \neq 0$, è tale che $w \cdot \frac{z}{w} = z$ e, quindi $|w| \left| \frac{z}{w} \right| = |z|$.
Per induzione si dimostra anche che

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i \right| = \prod_{i=1}^n |z_i|$$

(il valore assoluto di un prodotto è uguale al prodotto dei valori assoluti).

Per mostrare la v) osserviamo che

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot (z + w) = |z|^2 + |w|^2 + w\bar{z} + z\bar{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| |w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Analogamente si trova

$$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w});$$

può essere utile la seguente identità

$$|z - w|^2 + |z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2.$$

Per induzione la proprietà può essere estesa alla somma di un numero finito di termini

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| \tag{1.1}$$

(il valore assoluto di una somma è minore o uguale alla somma dei valori assoluti).

Nella disuguaglianza triangolare vale l'uguale se e solo se $z\bar{w} \geq 0$; se $w \neq 0$ questa condizione può essere scritta nella forma $|w|^2 \frac{z}{w} \geq 0$, e quindi è equivalente a $\frac{z}{w} \geq 0$.

Nel caso generale, supponiamo che in (1.1) valga l'uguale; allora si ha

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| &= |(z_1 + z_2) + z_3 \cdots + z_n| \\ &\leq |z_1 + z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| \end{aligned}$$

Quindi $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ e, se $z_2 \neq 0$, concludiamo che $\frac{z_1}{z_2} \geq 0$; ma essendo il numero dei termini arbitrario, il rapporto di due qualunque termini non nulli deve essere positivo. Viceversa, supponiamo che quest'ultima condizione sia soddisfatta; supponendo che $|z_1| \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| + \dots + z_n &= |z_1| \cdot \left| 1 + \frac{z_2}{z_1} + \dots + \frac{z_n}{z_1} \right| \\ &= |z_1| \left(1 + \frac{z_2}{z_1} + \dots + \frac{z_n}{z_1} \right) = |z_1| \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|} + \dots + \frac{|z_n|}{|z_1|} \right) \\ &= |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \end{aligned}$$

(l'uguale nella disuguaglianza triangolare vale se e solo se il rapporto di due qualunque termini non nulli è positivo).

Dalla disuguaglianza triangolare segue che:

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|,$$

cioé

$$|z| - |w| \leq |z - w|;$$

analogamente

$$|w| = |z + (w - z)| \leq |z| + |w - z|,$$

cioé

$$|w| - |z| \leq |z - w|,$$

da cui segue la vi).

Se $z = x + iy$ e $w = x' + iy'$, si ha

$$|z+w| = \sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} = \sqrt{x^2 + (x')^2 + y^2 + (y')^2 + 2xx' + 2yy'},$$

$$|z| - |w| = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

ed, essendo quest'ultima quantità un numero reale

$$||z| - |w|| = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x')^2 + (y')^2}.$$

Quindi, la vi) equivale a

$$\sqrt{x^2 + (x')^2 + y^2 + (y')^2 + 2xx' + 2yy'} \geq \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x')^2 + (y')^2},$$

cioé

$$xx' + yy' \geq -\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x')^2 + (y')^2},$$

che è vera $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Un caso particolare della disuguaglianza triangolare ci permette di osservare che $|x+iy| \leq |x|+|y|$: *il valore assoluto di un numero complesso è al massimo uguale alla somma dei valori assoluti delle parti reale e immaginaria.*

Vale la seguente

Proposizione 1.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Se z_1, \dots, z_n e w_1, \dots, w_n sono numeri complessi, allora*

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2.$$

Dimostrazione. Per ogni numero complesso λ si ha

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^n |z_i - \lambda w_i|^2 &= \sum_{i=1}^n (|z_i|^2 + |\lambda|^2 |w_i|^2 - 2\operatorname{Re}(z_i \bar{\lambda} w_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n |z_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n z_i \bar{\lambda} w_i. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Poiché λ è arbitrario, possiamo prendere

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n z_i w_i}{\sum_{i=1}^n |w_i|^2}.$$

Osserviamo che senza dubbio $\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \neq 0$, altrimenti non avremmo nulla da dimostrare. Inoltre, il λ scelto è quello che minimizza la quantità $\sum_{i=1}^n |z_i - \lambda w_i|^2$. Con tale scelta si ha

$$0 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 + \frac{|\sum_{i=1}^n z_i w_i|^2}{\sum_{i=1}^n |w_i|^2} - 2 \frac{|\sum_{i=1}^n z_i w_i|^2}{\sum_{i=1}^n |w_i|^2},$$

cioé

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2.$$

□

Dalla (1.2) segue anche che l'uguale nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale se e solo se z_i è proporzionale a w_i .

Dalla disuguaglianza appena dimostrata segue per esempio che, se $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2$ converge, allora converge anche $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z_i|}{i}$. Infatti, fissato un intero n positivo, si ha

$$\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|}{i} = \sum_{i=1}^n |z_i| \frac{1}{i} \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il primo fattore, $\forall n$, è limitato per ipotesi, e anche il secondo converge per $n \rightarrow \infty$. Dunque qualunque somma parziale n -esima $\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|}{j}$ è

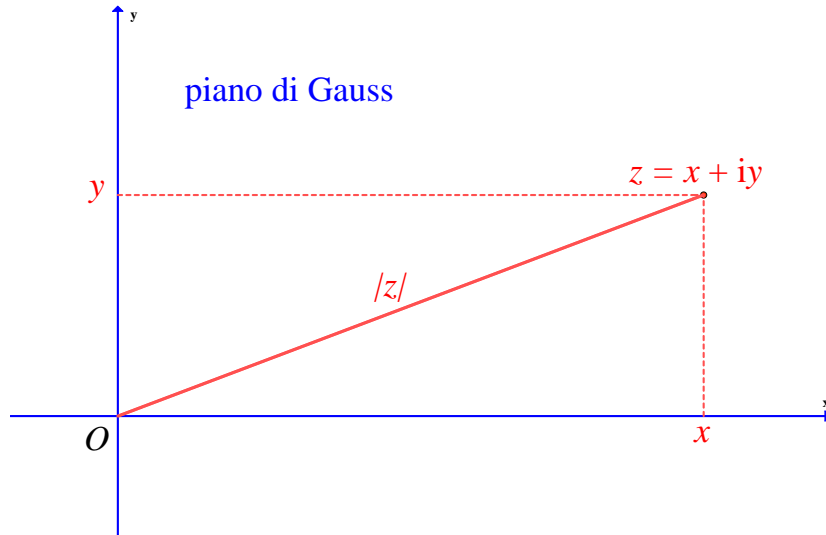
limitata, e quindi la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z_i|}{j}$ converge.

Osserviamo che la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz può essere dimostrata anche per induzione, oppure a partire dalla cosiddetta **identità di Lagrange**:

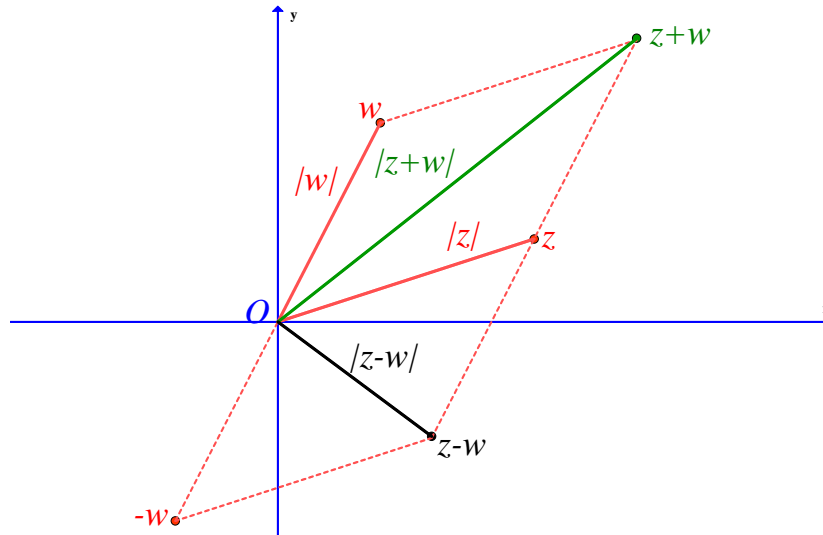
$$\left| \sum_{j=1}^n z_j w_j \right|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_j \bar{w}_j - \bar{w}_j z_k|^2.$$

1.3 Il piano di Gauss

I numeri complessi, essendo coppie di numeri reali, possono essere rappresentati come punti del piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali: l'ascissa è la parte reale, e l'ordinata la parte immaginaria; l'asse x viene detto anche **asse reale** e l'asse y **asse immaginario**. In tale contesto il piano è detto **piano complesso** o **piano di Gauss**.



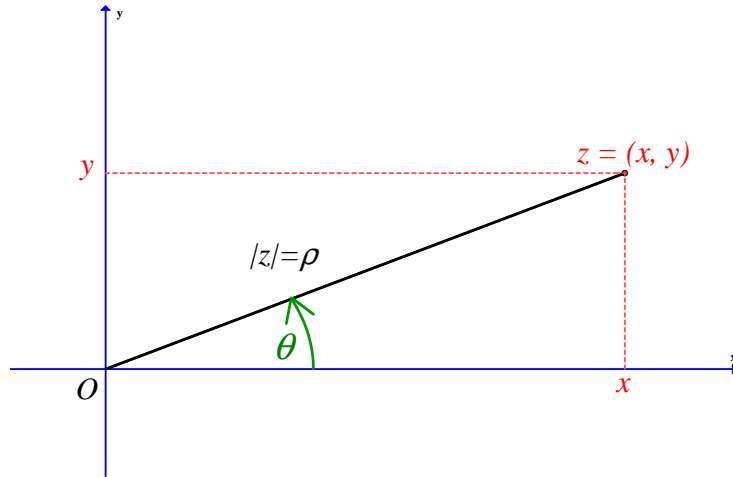
Il modulo del numero complesso $z = x + iy$ rappresenta geometricamente la distanza euclidea ordinaria del punto (x, y) del piano di Gauss dall'origine $(0, 0)$, cioè il modulo del vettore che congiunge l'origine col punto (x, y) . Le proprietà elencate nel paragrafo precedente possono ora essere verificate per via geometrica; la quantità $|z - w|$ rappresenta la distanza tra i punti z e w , mentre le proprietà v) e vi) esprimono i noti teoremi riguardanti le lunghezze dei lati di un triangolo (la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre minore o uguale della somma degli altri due e maggiore o uguale della loro differenza). Come mostra la figura sottostante, per fare la somma e la differenza tra due numeri complessi nel piano di Gauss si può usare la regola del parallelogramma.



Il numero complesso z e il suo coniugato \bar{z} sono simmetrici rispetto all'asse x , mentre il simmetrico di z rispetto all'asse y è $-\bar{z}$. I numeri z , $-\bar{z}$, $-z$ e \bar{z} sono i vertici di un rettangolo simmetrico rispetto a entrambi gli assi.

1.4 Forma trigonometrica di un numero complesso

Si può ricavare un'interpretazione geometrica anche per il prodotto di due numeri complessi, e per farlo si introducono le coordinate polari. I punti del piano infatti possono essere individuati dalle loro coordinate cartesiane, ma anche dalle coordinate polari (ρ, θ) : ρ è il raggio polare (la distanza del punto considerato dall'origine) e θ è l'angolo polare (l'angolo che la retta congiungente il punto con l'origine forma con l'asse x , contato in senso antiorario).



Una coppia (ρ, θ) , $\rho > 0$, individua un determinato punto del piano, ma un punto del piano individua univocamente la coordinata ρ , mentre l'angolo θ , misurato in radianti, è determinato solo a meno di multipli di 2π . Quindi, dato un numero complesso z , il suo modulo, nel piano complesso, coincide col raggio polare del punto z ; uno qualunque degli angoli θ relativi a z , invece, è detto **argomento** di z (a volte **ampiezza**) e si indica con $\arg(z)$. Anche l'insieme di tutti gli argomenti di z viene denotato con $\arg(z)$, e un elemento di tale insieme viene detto *determinazione* dell'argomento di z . Per determinare l'argomento di z in maniera univoca occorre fissare un intervallo semiaperto di ampiezza 2π in cui far variare l'angolo θ ; in genere (come in queste dispense) si considera l'intervallo $(-\pi, \pi]$ (ma si può considerare come intervallo principale anche $[-\pi, \pi)$ o, come accade spesso, $[0, 2\pi)$): in tal caso $\arg(z)$ viene detto **argomento principale** e viene indicato con $\text{Arg}(z)$ (con “a” maiuscola).

La natura “multivalore” della funzione $\arg(z)$ riflette profonde proprietà di \mathbb{C} , che saranno approfondite più avanti.

Dalla rappresentazione geometrica del numero $z = x + iy$ nel piano di Gauss si ricavano le relazioni tra le coordinate cartesiane e le coordinate

polari:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (1.3)$$

Quindi il numero z si può scrivere anche nella forma

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

detta **forma trigonometrica** di z ; in questa forma sono subito evidenti il modulo e l'argomento di z . Dalla (1.3) si ricava

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

da cui

$$\theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{o} \quad \theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

o

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x},$$

da cui

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

La forma trigonometrica risulta molto comoda per esprimere i prodotti e i quozienti di numeri complessi. Per esempio, se

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{e} \quad w = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

si ottiene

$$zw = \rho r [\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi + i(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)],$$

da cui

$$zw = \rho r [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)], \quad (1.4)$$

cioé il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

Se $w \neq 0$ si ha

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \phi + i \sin \phi} = \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \phi + i \sin \phi} \frac{\cos \phi - i \sin \phi}{\cos \phi - i \sin \phi}$$

$$= \frac{\rho}{r} [\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi)],$$

cioé il quoziente di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.

Dalle precedenti osservazioni si può ottenere una costruzione geometrica di zw ; infatti il triangolo di vertici $0, 1, z$ è simile al triangolo di vertici $0, w, zw$. Dati i punti $0, 1, z$ e w , per similitudine si determina il prodotto zw .

Nel caso della divisione la costruzione geometrica è la stessa, ma i triangoli simili sono quelli di vertici $0, 1, z$ e $0, \frac{z}{w}, w$.

La (1.4) si generalizza (per induzione) al caso del prodotto di n numeri complessi $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \dots, z_n = \rho_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$:

$$z_1 \cdots z_n = \rho_1 \cdots \rho_n [\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)].$$

Nell'ultima uguaglianza, prendendo tutti i fattori uguali a z si ottiene la formula per le potenze di z :

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)];$$

essa è banalmente valida per $n = 0$ e, essendo

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} (\cos \theta - i \sin \theta) = \rho^{-1} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)],$$

risulta valida anche quando n è un intero negativo.

Per $\rho = 1$ la formula diventa

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta),$$

detta **formula di De Moivre**.

Definizione 1.1. Dato un numero complesso w , si dice che z è una **radice n -esima (complessa)** di w se $z^n = w$.

Quindi per trovare la radice n -esima di un numero complesso occorre risolvere l'equazione $z^n = w$.

Teorema 1.1 (di De Moivre). Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Allora esistono n radici n -esime complesse z_0, z_1, \dots, z_{n-1} di w ; posto $w = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ e $z_k = \rho_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, si ha

$$\rho_k = r^{\frac{1}{n}}, \quad \theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.5)$$

Dimostrazione. Se $w = 0$, l'equazione $z^n = 0$ ha n radici coincidenti in 0 e il teorema è verificato.

Sia, ora $w \neq 0$. Applicando la formula di De Moivre, si vede che i z_k sono radici di w . Infatti deve essere $z_k^n = w$, cioè

$$\rho_k^n (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)^n = r(\cos \phi + i \sin \phi),$$

da cui $\rho_k^n = r$, cioè $\rho_k = r^{\frac{1}{n}}$ e

$$(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)^n = \cos(n\theta_k) + i \sin(n\theta_k) = \cos \phi + i \sin \phi,$$

da cui

$$\begin{cases} \cos(n\theta_k) = \cos \phi \\ \sin(n\theta_k) = \sin \phi \end{cases} \Rightarrow n\theta_k = \phi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}.$$

Mostriamo che z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ sono le uniche radici di w : se ci fosse un'altra radice $R(\cos \psi + i \sin \psi)$, dovrebbe risultare

$$R^n = r \quad \text{e} \quad n\psi = \phi + 2h\pi, \quad \text{con } h \in \mathbb{Z},$$

cioé

$$R = r^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Per $h = 0, 1, \dots, n-1$ si ritrovano gli z_k . Dando ad h un qualsiasi altro valore \tilde{h} diverso dai precedenti, questo può essere scritto nella forma $\tilde{h} = k + mn$, con $m \in \mathbb{Z}$ quoziente e k resto della divisione di \tilde{h} per n , e quindi si avrebbe

$$\psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi = \theta_k + 2m\pi;$$

cioé, anche in tal caso si ritrovano i numeri z_k . □

Il caso $w = 1$ è di particolare interesse. Le radici dell'equazione $z^n = 1$ sono dette, infatti **radici n-esime dell'unità** e, se si pone

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

tutte le radici possono essere espresse da $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$. Quindi se $\sqrt[n]{z}$ denota una radice n -esima di z , allora tutte le radici n -esime possono essere espresse nella forma $\omega^k \sqrt[n]{z}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Osservazione 1.1. *Si osservi che le notazioni $\sqrt[n]{z}$ o $z^{\frac{1}{n}}$ possono indicare sia l'insieme delle n radici complesse di z , sia una particolare di esse. Ciò potrebbe creare confusione quando z è reale. Per esempio, $\sqrt{4}$ inteso come radice aritmetica è 2, mentre inteso come radice complessa di 4 è l'insieme dei due numeri $\{-2, 2\}$.*

Mostriamo ora che si può calcolare esplicitamente la radice quadrata di un numero complesso. Dato il numero $a + ib$, cerchiamo il numero $x + iy$ tale che $(x + iy)^2 = a + ib$; questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Da queste due equazioni si ottiene

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2.$$

Quindi si ha

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

dove la radice quadrata è positiva o nulla. Insieme alla prima equazione del sistema si trova

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}). \end{cases}$$

Osserviamo che queste quantità sono positive o nulle indipendentemente dal segno di a . Le equazioni ottenute danno, in generale, due valori

opposti per x e due per y , ma tali valori non possono essere combinati arbitrariamente dato che deve essere soddisfatta anche la seconda equazione del sistema iniziale; quindi occorre scegliere x e y in modo tale che il loro prodotto abbia il segno di b . Ciò conduce alla soluzione generale

$$\sqrt{a+ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right)$$

se $b \neq 0$. Se $b = 0$ i valori sono $\pm\sqrt{a}$ se $a \geq 0$, $\pm i\sqrt{-a}$ se $a < 0$ (è inteso che tutte le radici quadrate di numeri positivi sono prese con segno positivo).

Le radici quadrate di un numero complesso quindi esistono e hanno due valori opposti; esse coincidono solo se $a + ib = 0$, sono reali se $b = 0$ e $a \geq 0$ e sono immaginarie pure se $b = 0$ e $a \leq 0$. Quindi, tranne lo zero, solo i numeri positivi hanno radici quadrate reali e solo i numeri negativi hanno radici quadrate immaginarie pure. Poiché entrambe le radici sono in generale complesse, non è possibile distinguere tra radici quadrate positive e negative di un numero complesso.

1.5 Forma esponenziale di un numero complesso

Indichiamo ora con S la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, e consideriamo l'applicazione

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (x, y) = (\cos t, \sin t).$$

Φ non è iniettiva ed è periodica di periodo 2π . Se ora identifichiamo \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , i punti di S sono numeri complessi di modulo 1. Inoltre, osserviamo che

$$z, w \in S \Rightarrow zw \in S, \quad z \in S \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z} \in S, \quad 1 \in S.$$

Quindi $S \subset \mathbb{C}$ forma un gruppo commutativo rispetto al prodotto. Inoltre

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

come si trova facilmente usando la definizione dell'applicazione Φ , la definizione del prodotto in \mathbb{R}^2 e le formule di addizione del seno e del coseno:

$$\Phi(t_1 + t_2) = \left(\cos(t_1 + t_2), \sin(t_1 + t_2) \right)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi(t_1)\Phi(t_2) &= (\cos t_1, \sin t_1) \cdot (\cos t_2, \sin t_2) \\ &= (\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2, \cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2) \\ &= \left(\cos(t_1 + t_2), \sin(t_1 + t_2) \right). \end{aligned}$$

L'applicazione Φ manda, dunque, il gruppo commutativo $(\mathbb{R}, +)$ nel gruppo commutativo (\mathbb{C}, \cdot) . Nel campo complesso viene dunque messa in luce una parentela formale tra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche. Estendiamo, allora, l'applicazione Φ a tutto \mathbb{C} , indichiamo con $\Phi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale estensione e introduciamo l'**esponenziale complesso** $\Phi_{\mathbb{C}}(z) := e^z = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ (il nome è dovuto all' analogia con la nomenclatura e la notazione già usata nel caso reale):

i) se $z = x$ è reale

$$\Phi_{\mathbb{C}}(z = x) = e^z = e^x = (e^x, 0).$$

ii) Se $z = iy$ è immaginario puro

$$\Phi_{\mathbb{C}}(z = iy) = e^z = e^{iy} = (\cos y, \sin y) = \cos y + i \sin y$$

(in tal caso l'applicazione $\Phi_{\mathbb{C}}$ coincide con l'applicazione Φ definita prima).

iii) Se $z = x + iy$

$$\Phi_{\mathbb{C}}(z = x + iy) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Si pone, quindi, $\Phi_{\mathbb{C}}(z) := e^z$.

Dal fatto che, se $z = x$, l'esponenziale complesso coincide con lo sviluppo in serie di Taylor di e^x , $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

risulta allora naturale porre (in maniera del tutto formale), per $z \in \mathbb{R}$:

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \quad (1.6)$$

Applicando, per esempio, il criterio del rapporto, si verifica che la serie a secondo membro converge per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora, se $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, manipolando la serie si ha

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - \dots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

Usando nuovamente la (1.6) e manipolando le serie, si verifica che

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Allora, se $z = x + iy$, si ha

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

che fornisce una “giustificazione” formale della definizione di esponenziale complesso data sopra.

La formula (che ritroveremo anche più avanti)

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

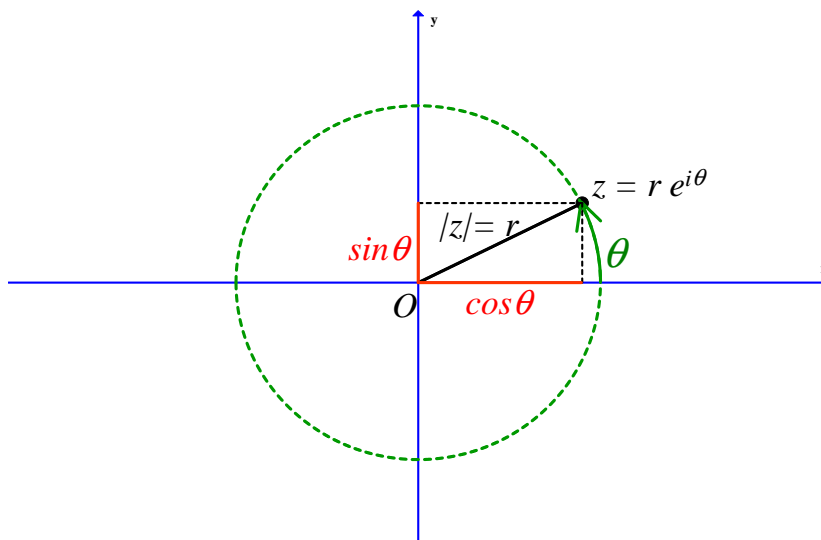
è detta **formula di Eulero**. Da questa consegue che, se $w \in \mathbb{C}$ è tale che $|w| = 1$, allora esiste un θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, tale che $w = e^{i\theta}$. Osserviamo che $\forall z \neq (0, 0)$, si ha

$$z = |z| \cdot \left(\frac{z}{|z|} \right) = |z| \cdot w,$$

dove $\frac{z}{|z|} = w$ ha modulo 1. Allora la formula di Eulero permette di rappresentare un numero complesso in forma compatta

$$z = r e^{i\theta},$$

detta **forma esponenziale** o **rappresentazione polare** del numero complesso z , dove r è il modulo di z ($r = |z|$) e θ è un argomento.



$\forall k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$1 = e^0 = e^{2k\pi i} \quad \text{e} \quad -1 = e^{\pi i} = e^{-\pi i} = e^{(2k+1)\pi i}.$$

L'ultima formula può essere scritta nella forma $e^{\pi i} + 1 = 0$, che fa intervenire 5 numeri notevoli in matematica: $0, 1, \pi, e, i$.

Inoltre

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \quad \text{e} \quad -i = e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}.$$

In generale si ha

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi l'esponenziale complesso è una funzione periodica (di periodo $2\pi i$), non iniettiva e mai nulla. Infatti

$$e^z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin y = 0, \end{cases}$$

da cui l'immagine della funzione $\Phi_{\mathbb{C}}$ è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'esponenziale complesso è una funzione continua, essendo le sue componenti (parti reale e immaginaria) funzioni continue.

La formula $e^{z+w} = e^z e^w$ segue, oltre che dalla manipolazione formale delle serie di potenze, anche dalla definizione dell'esponenziale complesso (la funzione $\Phi_{\mathbb{C}}$) e dalle formule di addizione e sottrazione del seno e del coseno: da una parte

$$e^{z+w} = e^{(x+iy)+(x'+iy')} = e^{(x+x')+i(y+y')} = e^{x+x'} (\cos(y+y') + i \sin(y+y'));$$

dall'altra

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x+iy} e^{x'+iy'} = [e^x (\cos y + i \sin y)] \cdot [e^{x'} (\cos y' + i \sin y')] \\ &= e^{x+x'} [\cos y \cos y' + i \cos y \sin y' + i \sin y \cos y' - \sin y \sin y'] \\ &= e^{x+x'} [(\cos y \cos y' - \sin y \sin y') + i(\cos y \sin y' + \sin y \cos y')] \\ &= e^{x+x'} (\cos(y+y') + i \sin(y+y')). \end{aligned}$$

Vale inoltre la formula $(e^z)^n = e^{nz}$.

Un numero complesso z non nullo ha infinite rappresentazioni della forma $z = r e^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. I numeri reali positivi hanno come argomento principale 0 e quelli negativi π . Per il numero 0 l'argomento non viene definito.

La formula del prodotto di due numeri complessi vista prima in forma trigonometrica si può esprimere anche in forma polare: se $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$ e $w = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r e^{i\phi}$,

$$zw = (\rho r) \cdot e^{i(\theta+\phi)}.$$

Esempio 1.1. Per trovare tutte le radici seste di 2, indichiamo con $r e^{i\theta}$ una di esse e imponiamo

$$(r e^{i\theta})^6 = 2 = 2 e^{i0},$$

cioé

$$r^6 e^{i6\theta} = 2e^{i0},$$

da cui risulta che $r = 2^{\frac{1}{6}}$ e $\theta = 0$ sono soluzioni dell'equazione. Quindi il numero reale $2^{\frac{1}{6}}$ è una radice complessa di 2.

Potremmo poi risolvere l'equazione

$$r^6 e^{i6\theta} = 2 = 2e^{2\pi i},$$

da cui si ha

$$r = 2^{\frac{1}{6}}, \quad \theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Questi valori corrispondono al numero

$$2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\cos \pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

In modo analogo, si possono risolvere le equazioni:

$$r^6 e^{i6\theta} = 2 = 2e^{4\pi i},$$

$$r^6 e^{i6\theta} = 2 = 2e^{6\pi i},$$

$$r^6 e^{i6\theta} = 2 = 2e^{8\pi i},$$

$$r^6 e^{i6\theta} = 2 = 2e^{10\pi i},$$

(qui i k della formula (1.5) sono $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) per ottenere le altre 4 radici seste di 2 in modo diretto:

$$2^{\frac{1}{6}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

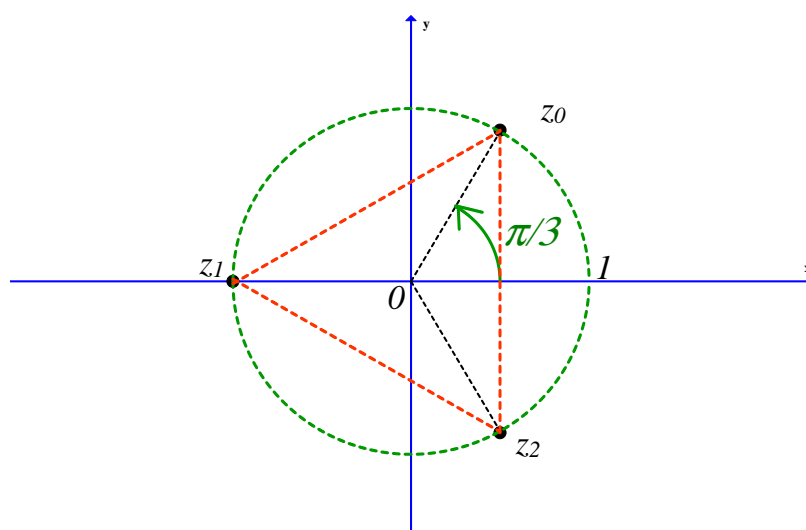
$$-2^{\frac{1}{6}},$$

$$2^{\frac{1}{6}} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$2^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

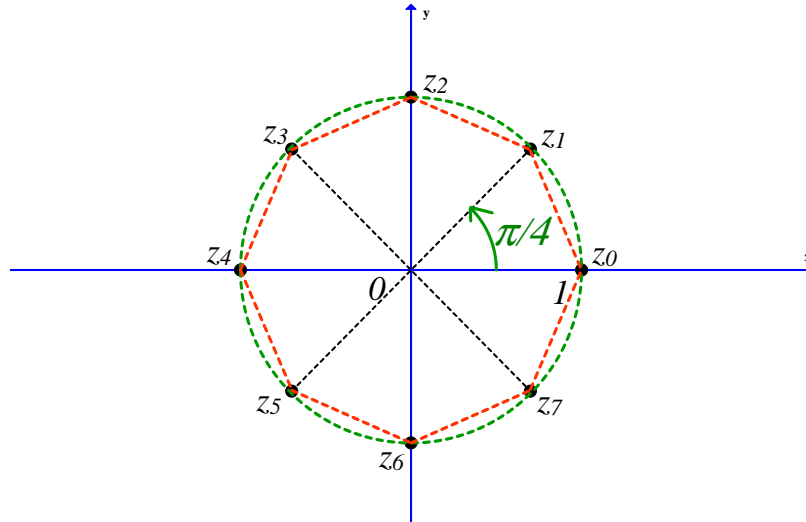
Esempio 1.2. Per trovare le radici complesse di un numero z si può usare direttamente la formula fornita dal Teorema 1.1. Per esempio, si trova che le 3 radici cubiche di $-1 = 1(\cos \pi + i0)$ sono i numeri z_k con $\rho_k = 1$ e $\theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$, cioè:

$$z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Osserviamo che le 3 radici cubiche di -1 , rappresentate nelle figura qui sopra, non sono disposte in modo casuale nel piano di Gauss.

Infatti, se $w = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, le radici n -esime z_0, z_1, \dots, z_{n-1} di w sono disposte nei vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $r^{\frac{1}{n}}$, con il vertice z_0 posto nel punto che ha come argomento $\theta = \frac{\phi}{n}$.



Nella figura qui sopra sono rappresentate le 8 radici ottave di 1.

Il Teorema 1.1 afferma che il polinomio $z^n + a$, $a \in \mathbb{C}$, ammette esattamente n radici in \mathbb{C} , di cui una o due di esse stanno in \mathbb{R} . In realtà, vale un risultato molto più generale:

Teorema 1.2 (teorema fondamentale dell'algebra). *Un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ammette n radici in \mathbb{C} , contate con la dovuta molteplicità.*

Esempio 1.3. *Le 3 radici cubiche di i sono*

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i, \quad e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

1.6 La rappresentazione sferica

Per molti propositi è utile estendere \mathbb{C} introducendo il simbolo ∞ per rappresentare infinito, tale che $z + \infty = \infty + z = \infty$ per ogni numero

finito z e $w \cdot \infty = \infty \cdot w = \infty$ per ogni $w \neq 0$, compreso $w = \infty$. Non è possibile, però, definire $\infty + \infty$ e $0 \cdot \infty$ senza violare le leggi dell'aritmetica; ciononostante scriveremo, per convenzione, $\frac{z}{0} = \infty$ per $z \neq 0$ e $\frac{w}{\infty} = 0$ per $w \neq \infty$.

Nel piano non c'è spazio per un punto corrispondente a ∞ , e quindi introduciamo un punto "ideale" chiamato **punto all'infinito**. I punti del piano insieme al punto all'infinito formano il **piano complesso esteso** $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Converremo che ogni linea retta passi nel punto all'infinito, mentre il semipiano non conterrà tale punto ideale.

Sarebbe ora desiderabile introdurre un modello geometrico nel quale tutti i punti del piano esteso abbiano un rappresentante concreto. A questo scopo consideriamo la sfera unitaria S^2 la cui equazione nello spazio tridimensionale è $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; a ogni punto di S^2 , tranne al punto $(0, 0, 1)$, possiamo associare (con una corrispondenza biunivoca) un numero complesso

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}; \quad (1.7)$$

infatti da tale relazione si ottiene

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

e, quindi $x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$. Inoltre si ha $x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}$ e $x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}$.

La corrispondenza può essere completata facendo corrispondere al punto all'infinito il polo nord $(0, 0, 1)$; in tal modo si può allora riguardare la sfera come una rappresentazione del piano complesso esteso o del sistema dei numeri complessi esteso; essa viene chiamata **sfera di Riemann**. Osserviamo che la semisfera $x_3 < 0$ corrisponde al disco $|z| < 1$ e la semisfera $x_3 > 0$ alla parte di piano fuori dal disco $|z| > 1$.

Se il piano complesso è identificato col piano (x_1, x_2) con gli assi x_1, x_2 corrispondenti agli assi reale e immaginario rispettivamente, la trasformazione (1.7) assume un semplice significato geometrico: se $z = x + iy$ si ha

$$x : y : -1 = x_1 : x_2 : x_3 - 1,$$

e questo significa che i punti $(x, y, 0)$, (x_1, x_2, x_3) e $(0, 0, 1)$ giacciono su una linea retta. Quindi la corrispondenza è una proiezione centrale dal centro $(0, 0, 1)$, detta **proiezione stereografica**.

Nella rappresentazione sferica non c'è una semplice interpretazione della somma e del prodotto, ma il vantaggio è che ora il punto all'infinito non è più distinto.

È geometricamente evidente che la proiezione stereografica trasforma ogni retta nel piano z in una circonferenza su S^2 passante attraverso il polo $(0, 0, 1)$ e viceversa. Più in generale, ogni circonferenza sulla sfera corrisponde a una circonferenza o a una retta nel piano z : infatti una circonferenza sulla sfera giace in un piano $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_0$, dove possiamo assumere che $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ e $0 \leq \alpha_0 < 1$. In termini di z e \bar{z} questa equazione diventa

$$\alpha_1(z + \bar{z}) - \alpha_2 i(z - \bar{z}) + \alpha_3(|z|^2 - 1) = \alpha_0(|z|^2 + 1)$$

o

$$(\alpha_0 - \alpha_3)(x^2 + y^2) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y + \alpha_0 + \alpha_3 = 0.$$

Per $\alpha_0 \neq \alpha_3$ questa è l'equazione di una circonferenza e per $\alpha_0 = \alpha_3$ quella di una retta. Viceversa, l'equazione di una circonferenza o di una retta possono essere scritte in questa forma (la corrispondenza è biunivoca).

Calcoliamo ora la distanza $d(z, z')$ tra la proiezione stereografica di z e z' ; se i punti sulla sfera sono (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) , si ha

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 = 2 - 2(x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3).$$

Sostituendo le espressioni di x_1, x_2, x_3 in funzione di z e \bar{z} si ottiene

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}.$$

Per $z' = \infty$ la formula corrispondente è

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

Capitolo 2

Funzioni complesse

2.1 Funzioni complesse di variabile complessa

Identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 e fissato $z_0 \in \mathbb{C}$ possiamo definire in \mathbb{C} l'**intorno sferico** (o **bolla** o **disco aperto**) di centro z_0 e raggio r

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

(che in molti testi, e talvolta nel seguito, è indicato con $B(z_0, r)$). Dato un sottoinsieme $T \subseteq \mathbb{C}$ e $z_0 \in T$, si dice che z_0 è interno a T se esiste un intorno di centro z_0 e raggio $r > 0$ interamente contenuto in T . L'insieme dei punti interni si denota con $\overset{\circ}{T}$ o $\text{Int}(T)$. Se $T \equiv \overset{\circ}{T}$, T si dirà aperto. Anche le altre definizioni della topologia di \mathbb{R}^2 (definizione di insieme chiuso, di punto esterno, punto di frontiera, punto di accumulazione, di convergenza di una successione, ecc.) si trasportano in \mathbb{C} in modo analogo.

D'ora in avanti, chiamiamo **dominio** un insieme aperto e connesso¹; un dominio viene generalmente denotato con la lettera D .

Per estendere il concetto di funzione di variabile reale a valori reali al caso complesso (e il relativo calcolo differenziale e integrale) si potreb-

¹Un insieme X si dice **connesso** se non può essere espresso come unione di due insiemi chiusi, non vuoti e disgiunti (oppure se i suoi unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono X stesso e l'insieme vuoto).

Nella pratica è più semplice verificare che l'insieme U sia *connesso per archi* (se U è connesso per archi, allora è connesso, mentre non vale il viceversa in generale; in \mathbb{R}^2 vale anche il viceversa), cioè, nel nostro caso, che per ogni coppia di punti $z, w \in U$ esiste un arco (funzione continua $r : [0, 1] \rightarrow U$ tale che $r(0) = z$ e $r(1) = w$) interamente contenuto in U che li congiunge.

berò considerare funzioni $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con U aperto in \mathbb{R} , cioè funzioni di variabile reale a valori complessi, che a un numero reale $x \in U$ associano un numero complesso $f(x) = w = u(x) + iv(x)$, dove u e v sono a valori reali. Tale estensione, però, non porta grandi novità rispetto al caso di funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideriamo, allora, funzioni di variabile complessa a valori complessi: sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto w = f(z).$$

Posto $z = x + iy$, si avrà $w = f(z) = \operatorname{Re}(f(z)) + i\operatorname{Im}(f(z))$, con $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$ e $\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y)$, dove u e v sono a valori reali. Quindi, alla funzione complessa di variabile complessa $f(z)$ possiamo associare la funzione vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Per esempio, se $f(z) = z^2$, $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$.

Data la funzione esponenziale $f(z) = e^z$, si ha $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, da cui si ricava $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$.

Dato che in \mathbb{C} non esiste un ordinamento naturale, alle funzioni complesse non verrà esteso il concetto di funzione monotona, né le definizioni di massimo e minimo.

2.2 Limiti di funzioni complesse

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto; introduciamo il concetto di limite di $f(z)$ per $z \rightarrow z_0$, dove $z_0 = x_0 + iy_0$ è un punto di accumulazione per U : si dice che f converge a $l \in \mathbb{C}$ per z che tende a z_0 , e si scrive

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

se, per ogni intorno V di l è possibile trovare un intorno W di z_0 tale per cui

$$f(z) \in V \quad \text{se} \quad z_0 \neq z \in W \cap U.$$

Precisamente, si ha che $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \quad z \in U \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - l| < \epsilon$$

(alcuni testi danno questa definizione, anziché con la condizione $z \in U$ e $0 < |z - z_0| < \delta$, richiedendo che $z \in U \cap B_r^*(z_0)$, dove $B_r^*(z_0)$ è l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, detto **disco bucato di centro z_0 e raggio r**). Si ha, posto $z_0 = x_0 + iy_0$, che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \operatorname{Re}(l) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = \operatorname{Im}(l). \end{cases}$$

Infatti $f(z) \rightarrow l$ per $z \rightarrow z_0$ è equivalente a $\overline{f(z)} \rightarrow \bar{l}$ per $z \rightarrow z_0$.

La funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ si dirà **limitata** in U se $f(U)$ è limitato in \mathbb{C} , cioè se esiste $M > 0$ tale che $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \leq M$ in U (cioé, se e solo se le sue componenti $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono funzioni limitate).

Se f è definita in un intorno di z_0 , essa si dice **continua** in z_0 se $f(z) \rightarrow f(z_0)$ (con $f(z_0)$ finito) per $z \rightarrow z_0$, cioè se e solo se le sue componenti $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono funzioni continue: infatti si ha

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |u(x,y) + iv(x,y) - [u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)]| \\ &\leq |u(x,y) - u(x_0,y_0)| + |v(x,y) - v(x_0,y_0)|; \end{aligned}$$

d'altra parte

$$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|$$

e

$$|v(x,y) - v(x_0,y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

Una funzione definita in un aperto U si dice continua in U se lo è in tutti i punti di U . La somma, il prodotto e la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua. Il quoziente di due funzioni continue $f(z)$ e $g(z)$ è definita e continua in z_0 se e solo se $g(z_0) \neq 0$. In particolare, si ha quindi che se $f(z)$ è continua, anche $\operatorname{Re}(f(z))$, $\operatorname{Im}(f(z))$ e $|f(z)|$ lo sono. Inoltre, le funzioni polinomiali sono continue in tutto \mathbb{C} , mentre le funzioni razionali fratte risultano continue in \mathbb{C} privato degli zeri del polinomio a denominatore.

Esempio 2.1. *Calcoliamo il limite*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2i \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)}{z}.$$

Si ha

$$f(x + iy) = \frac{2ixy}{x + iy} = \frac{2ixy(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$$

cioé $u(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = \frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$. Calcoliamo i

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x, y);$$

passando a coordinate polari si trova

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2} = 0;$$

quindi

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)}{z} = 0.$$

Verifichiamo ora la definizione di limite:

$$|f(z) - l| = \frac{|2ixy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|2\rho^2 \cos \theta \sin \theta|}{\rho} = 2\rho |\cos \theta \sin \theta| \leq 2\rho$$

che tende a zero per $\rho \rightarrow 0$.

Esempio 2.2. *Calcoliamo il limite*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}.$$

Ponendo $z = x + iy$ si ha

$$f(x + iy) = \frac{x - iy}{x + iy} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2},$$

cioé $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Passando a coordinate polari si trova che parti reale e immaginaria di $f(z)$ sono

$$\frac{\rho^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\rho^2} = \cos(2\theta) \quad \text{e} \quad -\frac{2\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = -\sin(2\theta),$$

il cui limite per $\rho \rightarrow 0$ non esiste.

Il fatto che il limite assegnato non esista si vede più facilmente usando la forma esponenziale dei numeri complessi: la funzione

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\rho e^{-i\theta}}{\rho e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

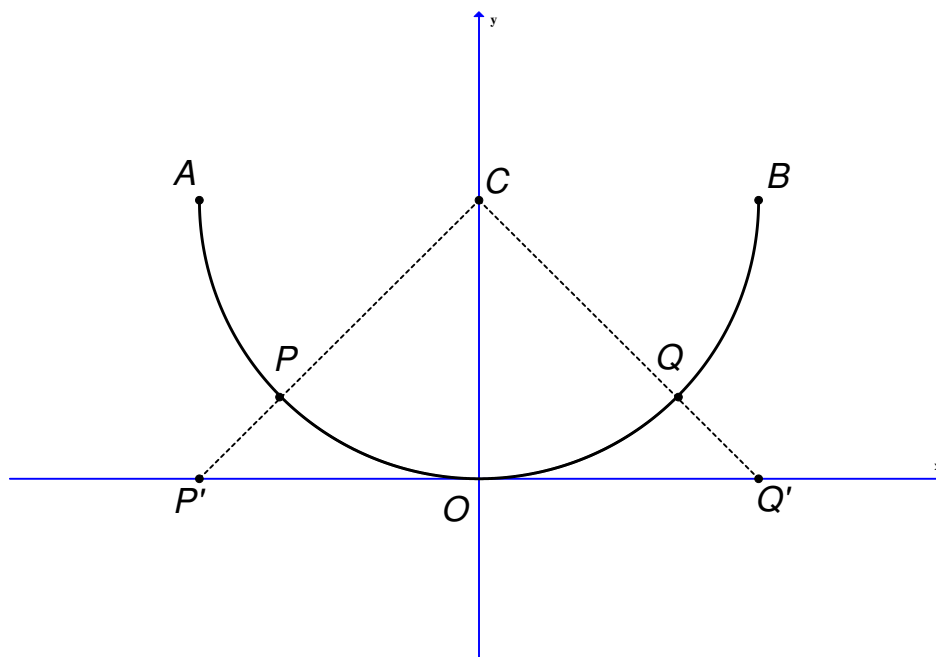
non ha un limite uniforme rispetto a θ per $\rho \rightarrow 0$.

Per quanto riguarda il limite di $f(z)$ per $z \rightarrow \infty$, occorre fare una precisazione.

Per le funzioni reali g di di variabile reale x , per definire il limite per $x \rightarrow \pm\infty$, si introduce l'ampliamento della retta reale \mathbb{R} , la retta ampliata $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, estendendo a \mathbb{R}^* l'ordinamento di \mathbb{R} (si conviene che, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$), e si definiscono gli intorno di $-\infty$ e di $+\infty$ (rispettivamente, $[-\infty, b)$ e $(a, +\infty]$), per considerare $-\infty$ e $+\infty$ come punti di accumulazione.

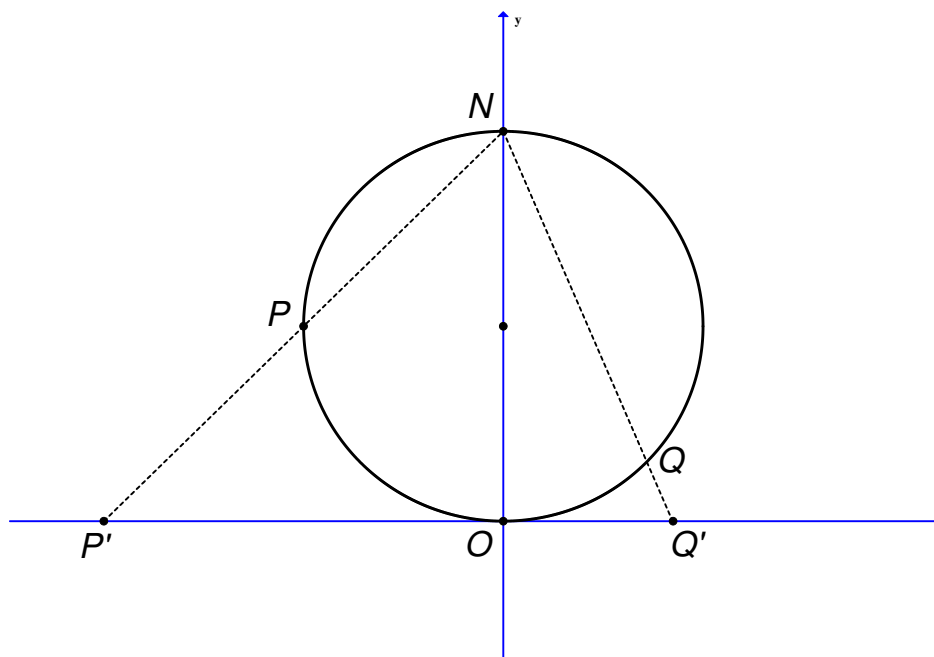
Poiché, invece, \mathbb{R}^n , $n > 1$, non è un insieme ordinato, l'ampliamento appena considerato non si può fare in \mathbb{R}^n . Allora, conviene considerare un diverso ampliamento, ottenuto da \mathbb{R} con l'aggiunta di un solo punto, ∞ : $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si definisce intorno (sferico) di ∞ il complementare di qualunque intervallo chiuso $[-a, a]$, $a > 0$.

Un modello di \mathbb{R}^* si può ottenere considerando le proiezioni dal centro C di una semicirconferenza sulla retta tangente nel "polo sud", come in figura



Da questa proiezione dal centro, al punto A corrisponde $-\infty$, e al punto B $+\infty$.

Osserviamo, invece, che $\hat{\mathbb{R}}$ (che non è altro che la retta proiettiva) può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti di una circonferenza, come indicato nella figura sottostante



In questa proiezione, al “polo nord” N (come già visto nel Capitolo 1, Paragrafo 6) corrisponde il punto ∞ .

In modo analogo, si può definire $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n > 1$. Un intorno (sferico) di ∞ sarà il complementare di una qualunque bolla chiusa di \mathbb{R}^n , centrata nell’origine.

A questo punto si possono definire i limiti, per $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ per una funzione vettoriale $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pensando \mathbb{R}^2 come immerso nell’ampliamento $\mathring{\mathbb{R}}^2$. Tale ampliamento di \mathbb{R}^2 nel campo dei numeri complessi risulta molto più naturale, dato che “tendere a infinito” nel piano complesso significa allontanarsi indefinitamente dall’origine ($z \rightarrow \infty$ significa $|z| \rightarrow \infty$). Un intorno di infinito (in $\widehat{\mathbb{C}}$) è un insieme del tipo $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, con $R > 0$, che in genere viene denotato con $B_R(\infty)$.

In definitiva, per definire il limite per $z \rightarrow \infty$ di $f(z)$ (e analogamente per definire quando $f(z) \rightarrow \infty$ per $z \rightarrow z_0$) si identifica l’insieme $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$; $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$ è il piano complesso esteso che abbiamo introdotto nel Capitolo 1.

Data $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definita almeno in un intorno bucato $B_r^*(z_0)$ di z_0 per

qualche $r > 0$, diciamo che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

se $\forall K > 0 \exists \delta(K) > 0$ tale che, se $0 < |z - z_0| < \delta$ si ha $|f(z)| > K$.

Per calcolare il limite nella pratica è utile osservare che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u^2(x,y) + v^2(x,y)) = \infty.$$

Data $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definita almeno in un intorno di ∞ , diciamo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l$$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0$ tale che, se $|z| > N$ si ha $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Si ha

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} u(x,y) = \operatorname{Re}(l) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} v(x,y) = \operatorname{Im}(l) \end{cases}$$

dove con $(x, y) \rightarrow \infty$ si intende $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \rightarrow \infty$.

Esempio 2.3. Sia $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; risulta

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

cioè $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si ha

$$\begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{-y}{x^2 + y^2} = 0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \infty$$

(anche in questo caso si possono calcolare i limiti passando eventualmente a coordinate polari), da cui

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty.$$

Più rapidamente, si può osservare che $|f(z)| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$, che tende a infinito quando $|z|$ (che è reale) tende a zero (e, rispettivamente, tende a zero quando $|z|$ tende a infinito).

Infine, data $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definita almeno in un intorno di ∞ , diciamo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

se $\forall K > 0 \exists N(K) > 0$ tale che, se $|z| > N$ si ha $|f(z)| > K$.

Si ha

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \left(u^2(x,y) + v^2(x,y) \right) = \infty.$$

Esempio 2.4. Verifichiamo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z^3 + 5iz - 2) = \infty.$$

Si ha

$$\begin{aligned} |z^3 + 5iz - 2| &= \left| z^3 \left(1 + \frac{5i}{z^2} - \frac{2}{z^3} \right) \right| = |z|^3 \left| 1 + \frac{5i}{z^2} - \frac{2}{z^3} \right| \\ &\geq |z|^3 \left(1 - \frac{5}{|z|^2} - \frac{2}{|z|^3} \right), \end{aligned}$$

dove è stata usata la proprietà iv) (a pag. 8) del modulo $|z + w| \geq |z| - |w|$, e dove l'ultimo membro tende a infinito per $|z| \rightarrow \infty$.

Dal precedente esempio segue che un qualunque polinomio complesso a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ tende a infinito per $z \rightarrow \infty$.

Esempio 2.5. Verifichiamo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{5iz - 2}{z + 1} = 5i;$$

si ha

$$\left| \frac{5iz - 2}{z + 1} - 5i \right| = \left| \frac{-2 - 5i}{z + 1} \right| = \frac{|-2 - 5i|}{|z + 1|} = \frac{\sqrt{29}}{|z + 1|} \leq \frac{\sqrt{29}}{|z| - 1}$$

che tende a zero per $|z| \rightarrow \infty$.

Le proprietà riguardanti i limiti di una somma, di un prodotto e di un quoziente continuano a valere anche nel caso complesso, dato che le dimostrazioni utilizzano le proprietà dei valori assoluti.

2.3 Funzioni olomorfe

Ricordando che \mathbb{C} è dotato della struttura algebrica di campo, e che quindi risultano ben definiti il prodotto e il quoziente, si può dunque pensare di introdurre il concetto di derivabilità in senso complesso in analogia alla nozione di derivata di una funzione reale di variabile reale.

Definizione 2.1. Siano $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, U aperto, e $z_0 \in U$. Se esiste finito (in \mathbb{C}) il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

esso viene chiamato **derivata complessa** di f in z_0 e indicato con $f'(z_0)$; f si dice **derivabile in senso complesso** o **dotata di derivata in senso complesso** in z_0 .²

Osserviamo che se la funzione f non è definita in un aperto ma in un insieme T qualunque, nella definizione si può prendere un punto qualunque interno a T .

Se f ha derivata complessa in ogni punto $z \in U$, essa si dice **olomorfa** (o **analitica**) in U . Sottolineiamo il fatto che l'insieme aperto U è parte integrante della definizione di funzione olomorfa. In alcuni testi

²Per definire la derivata complessa si può anche considerare il rapporto incrementale di f nel punto $z_0 \in U$ scritto nella forma $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$, con $h \neq 0$ tale che $z_0 + h \in U$; f si dice derivabile in z_0 se esiste (in \mathbb{C}) il limite del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$, e tale limite è $f'(z_0)$.

si trova scritto “funzione olomorfa in un punto”: si intende che la funzione è olomorfa in un intorno del punto considerato.

Una funzione olomorfa in \mathbb{C} è detta anche **intera**.

Dal fatto che la definizione di derivata complessa è formalmente identica a quella di derivata di funzioni reali di variabile reale, segue che le regole di derivazione di somma, prodotto, quoziente, composizione e funzione inversa si estendono al caso di derivata complessa, e anche le dimostrazioni sono analoghe a quelle per funzioni reali. In generale, rimangono inalterate tutte le proprietà che non coinvolgono le relazioni d'ordine.

Precisamente, valgono i seguenti

Teorema 2.1 (Algebra delle derivate). *Siano $f, g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, U aperto, e $z_0 \in U$; se f e g sono derivabili in senso complesso in z_0 , allora lo sono anche $\alpha f + \beta g$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, fg e, se $g(z_0) \neq 0$, anche $\frac{f}{g}$ e*

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)'(z_0) &= \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0), \\(fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.\end{aligned}$$

Teorema 2.2 (Derivata di funzione composta). *Siano $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow U$, $U, V \subseteq \mathbb{C}$ aperti; se g è derivabile in senso complesso in $z_0 \in V$ ed f lo è in $w_0 = g(z_0) \in U$, allora la funzione composta $f \circ g : V \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile in z_0 e si ha*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Teorema 2.3 (Derivata di funzione inversa). *Siano $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, U aperto; se f è invertibile e olomorfa in U , e se $f'(z_0) \neq 0$, allora la funzione inversa di f , f^{-1} , è derivabile in $w_0 = f(z_0)$, e si ha*

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Come accade per le funzioni reali di variabile reale, una funzione derivabile in z_0 è continua in z_0 . Infatti risulta

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) \right|;$$

in generale non vale il viceversa.

Esempio 2.6. *La funzione $f(z) = \bar{z}$ è continua ma non derivabile in $z = 0$; risulta $f(0) = 0$ e $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$; infatti $|f(z)| = |\bar{z}| = |z| \rightarrow 0$ per $z \rightarrow 0$, mentre*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

che non esiste, come mostrato nell'Esempio 2.2.

Dalla definizione segue facilmente che la funzione costante è derivabile in tutto \mathbb{C} con derivata nulla.

Dalle proprietà enunciate segue anche che

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad (z^{-n})' = -nz^{-n-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad n \neq 0.$$

Si ha allora che le funzioni razionali, sia intere che fratte, si derivano in campo complesso esattamente come in campo reale.

Osserviamo che si può dare una definizione alternativa di funzione olo-morfa in un aperto (cioè di funzione analitica) tramite un operatore differenziale formale $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$, come vedremo meglio nel seguito.

Torniamo per un attimo alle funzioni $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; la definizione di derivabilità sarà analoga anche in questo caso: f è derivabile in $x_0 \in U$ se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e tale limite, in tal caso, sarà $f'(x_0)$.

Risulta che $f(x) = u(x) + iv(x)$ è derivabile se e solo se lo sono le sue

componenti u e v e si ha $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.³ Se, invece, si considera $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $f(z)$ può non essere derivabile nonostante $u(x, y)$ e $v(x, y)$ lo siano, come mostra il seguente

Esempio 2.7. Prendiamo nuovamente la funzione dell'Esempio 2.6, $f(z) = \bar{z}$; in questo caso $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$ sono derivabili con derivate parziali di qualunque ordine continue, ma $f(z) = x - iy$ non è derivabile non solo in $z = 0$, ma nemmeno in nessun altro punto: infatti il rapporto incrementale in un generico $z_0 = x_0 + iy_0$ sarebbe

$$\frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)},$$

che è sempre della forma di frazione che ha a denominatore un numero complesso e a numeratore il suo complesso coniugato, e il cui limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ non esiste.

Anche la funzione $f(z) = x + y$ non è derivabile in senso complesso, nonostante u e v siano molto regolari.

Esempio 2.8. Consideriamo la funzione $f = iy$; essa può essere pensata sia come funzione da \mathbb{R} in \mathbb{C} che come funzione da \mathbb{C} in \mathbb{C} . Nel primo caso, essa è derivabile con derivata uguale a i ; nel secondo caso la derivata non esiste. Per semplicità, consideriamo il limite del rapporto incrementale nel punto $z_0 = 0$: si ha

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{iy}{x + iy} = \frac{iy(x - iy)}{x^2 + y^2};$$

quindi i limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sin^2 \theta$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \theta \sin \theta$$

non esistono.

³Osserviamo subito che alle funzioni $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ di variabile reale a valori complessi si estende facilmente anche la teoria dell'integrazione: risulta infatti che $f(x)$ è integrabile in U se e solo se u e v lo sono e si ha $\int_U f(x) dx = \int_U u(x) dx + i \int_U v(x) dx$.

2.4 La condizione di Cauchy-Riemann

Nel caso di funzioni reali di variabile reale la derivabilità di una funzione f coincide con la sua differenziabilità. Anche per le funzioni complesse di variabile complessa accade la stessa cosa. La funzione $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **differenziabile** nel punto $z_0 \in U$ se l'incremento Δf della funzione relativo all'incremento $\Delta z = z - z_0$ può essere espresso come somma di due termini, uno lineare rispetto a Δz e l'altro infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δz per $\Delta z \rightarrow 0$, cioè se

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = \alpha(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0 \quad (2.1)$$

per qualche $\alpha \in \mathbb{C}$.

Osserviamo che, se f è derivabile in z_0 , allora

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0,$$

cioé

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0,$$

che è proprio la (2.1) con $\alpha = f'(z_0)$; quindi f è differenziabile in z_0 .

Viceversa, sia f differenziabile in z_0 . Allora, dividendo primo e secondo membro della (2.1) per $z - z_0$ e passando al limite per $z \rightarrow z_0$ si trova che f è derivabile in z_0 con derivata $f'(z_0) = \alpha$.

Analogamente al caso di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} , il differenziale di $f(z)$ si indica con $df(z) = f'(z) dz$.

Ci chiediamo allora che relazione intercorre tra la derivabilità di f in senso complesso e la differenziabilità della funzione vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ ad essa corrispondente. Ricordiamo che $\mathbf{F}(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) se e solo se

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right) \quad \text{per } \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$+ o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) \quad \text{per } \|(x,y)-(x_0,y_0)\| \rightarrow 0,$$

dove si può osservare che $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = |z-z_0| = \|z-z_0\|$. Possiamo compattare le due relazioni precedenti moltiplicando la seconda per i e sommando membro a membro; usando la notazione complessa ($f_x = u_x + iv_x$ e $f_y = u_y + iv_y$) si ha che $\mathbf{F}(x,y)$ è differenziabile in (x_0,y_0) se e solo se

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= f(z_0) + f_x(z_0)(x-x_0) + f_y(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0. \quad (2.2)$$

Il seguente teorema afferma che la derivabilità in senso complesso di f (considerata come funzione di z) non equivale alla differenziabilità delle parti reale e immaginaria u e v , ma che alla differenziabilità di f (considerata come funzione di due variabili) occorre aggiungere una condizione:

Teorema 2.4. *Siano $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, U aperto, e $z_0 \in U$; f è derivabile in senso complesso in z_0 se e solo se $\mathbf{F}(x,y)$ è differenziabile in (x_0,y_0) e se (inoltre) vale la **condizione di Cauchy-Riemann (C-R)**:*

$$f_y(z_0) = if_x(z_0) \quad (2.3)$$

o, analogamente, le condizioni (o equazioni di Cauchy-Riemann):

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0). \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia f derivabile in senso complesso in z_0 . Allora, dalla (2.1) nella forma

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(x-x_0) + if'(z_0)(y-y_0) + o(|z-z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

segue la (2.2) con $f'(z_0) = f_x(z_0)$ e $if'(z_0) = f_y(z_0)$, da cui segue che $\mathbf{F}(x,y)$ è differenziabile in (x_0,y_0) , e da cui si ha anche la (2.3).

Sia, ora, $\mathbf{F}(x,y)$ differenziabile in (x_0,y_0) ; allora vale la (2.2) che, usando la relazione di C-R, si può scrivere come

$$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0;$$

quest'ultima relazione esprime la derivabilità in senso complesso di f , con $f'(z_0) = f_x(z_0)$. \square

Osserviamo che la (2.3) si può scrivere anche nella forma

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0). \quad (2.4)$$

Risulta, cioè, che la derivata complessa di $f(z)$ è data da

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

oppure da

$$f'(z) = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y.$$

Esempio 2.9. Tornando alla funzione $f(z) = \bar{z}$ dell'esempio (2.7), abbiamo ora un altro strumento per dire che $f(z)$ non è derivabile in nessun punto: essendo $u_x = 1$ e $v_y = -1$, le condizioni di C-R non sono mai soddisfatte.

Esempio 2.10. La funzione $f(z) = z^2$ è olomorfa in \mathbb{C} . Infatti, usando la Definizione 2.1 si ha

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}.$$

Oppure si possono verificare le condizioni di C-R: essendo $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, si ha

$$f_y = -2y + 2ix = i(2x + 2iy) = if_x$$

o, analogamente,

$$u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y) \quad e \quad u_y(x, y) = -2y = v_x(x, y).$$

In effetti $f(z)$ è della forma z^n con $n = 2$, quindi è una funzione razionale intera la cui derivata, come visto in precedenza, è $f'(z) = 2z^{2-1}$.

Esempio 2.11. La funzione $f(z) = |z|$ non ammette derivata complessa in nessun punto $z \in \mathbb{C}$. Infatti, essendo $f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$, cioè $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = 0$, si ha

$$u_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad u_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{con } (x, y) \neq (0, 0)$$

(u non è differenziabile nell'origine) da cui $u_x(x, y) \neq 0 = v_y(x, y)$ se $x \neq 0$ e $u_y(x, y) \neq 0 = -v_x(x, y)$ se $y \neq 0$.

Essa è però continua in \mathbb{C} :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |z_0|; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = 0.$$

In effetti, le componenti di $|z|$ $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono continue in \mathbb{R}^2 .

Esempio 2.12. La funzione $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ è olomorfa in \mathbb{C} . Infatti, essendo $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$ differenziabili in \mathbb{R}^2 , si ha $u_x = e^x \cos y = v_y$ e $u_y = -e^x \sin y = -v_x$ o, anche, che

$$f_y = e^x(-\sin y + i \cos y) = [e^x(\cos y + i \sin y)] = i f_x,$$

da cui $f'(z) = f_x(z) = e^z$.

Esempio 2.13. Vale la seguente proprietà: se $f = u + iv$ è una funzione derivabile in senso complesso, la matrice jacobiana di u e v rispetto a x e y ha per determinante il quadrato del modulo della derivata complessa di f , cioè

$$|f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|.$$

Infatti, dalle condizioni di Cauchy-Riemann si possono ricavare due espressioni per $f'(z)$; una di queste è, per esempio, $f'(z) = u_x + iv_x$ ⁴, da cui si ricava

$$|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x \cdot u_x + v_x \cdot v_x = u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x.$$

⁴Naturalmente, si può utilizzare anche l'altra espressione della derivata di f : $f'(z) = v_y - iu_y$, da cui segue $|f'(z)|^2 = u_y^2 + v_y^2$.

Oppure, partendo dal determinante e sempre usando le equazioni di Cauchy-Riemann, si ha

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y = u_x^2 + v_x^2 = |f_x(z)|^2.$$

L'ultimo esempio mette in luce il fatto che le funzioni complesse di variabile complessa derivabili, viste come funzioni da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 , sono particolari funzioni differenziabili in senso reale: infatti la matrice jacobiana della funzione vettoriale \mathbf{F} associata a f ha per entrate quattro funzioni non indipendenti l'una dall'altra, ma legate dalle condizioni di Cauchy-Riemann.

Osserviamo anche che, essendo $\nabla u = (u_x, u_y)$ e $\nabla v = (v_x, v_y)$, le condizioni di C-R affermano che il gradiente di v si ottiene da quello di u tramite una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario. Risulta $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ e $\|\nabla u\| = \|\nabla v\|$.

Si può fare anche un'altra osservazione: come già notato, la definizione di derivata complessa di una funzione $f(z)$ complessa di variabile complessa è data come limite (per z che tende a z_0) del rapporto incrementale $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, ed è quindi formalmente identica a quella data per funzioni reali di variabile reale. Dal "punto di vista reale" però, $f(z)$ può essere considerata come funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 , ma mentre per funzioni di due variabili reali si introduce il concetto di differenziabilità (cioè di approssimazione lineare dell'incremento della funzione) perché non avrebbe senso dividere l'incremento per un vettore, qui si divide l'incremento della funzione $f(z) - f(z_0)$ per l'incremento $z - z_0$ dato che, invece, ha senso dividere per un numero complesso. Quindi le due definizioni (di derivata in \mathbb{R} e in \mathbb{C}), anche se formalmente identiche, in realtà hanno notevoli differenze, che saranno evidenziate dalle proprietà di una funzione olomorfa (che una funzione derivabile in \mathbb{R} non possiede).

Esempio 2.14. Consideriamo le funzioni complesse $f = x^2 + i \log y$ e $g = x^2 + iy^2$; per verificare in quali punti siano derivabili, vediamo dove sono verificate le condizioni di C-R. Per f si ha $u_x = 2x$, $u_y = 0$, $v_x = 0$ e $v_y = \frac{1}{y}$, definita per $y > 0$; quindi i punti $z = x + iy$ in cui f è derivabile sono quelli tali che $2xy = 1$, con $y > 0$; in tali punti, la derivata di della funzione è $f'(z) = u_x + iv_x = 2x$.

Per g si ha $u_x = 2x$, $u_y = 0$, $v_x = 0$ e $v_y = 2y$; quindi i punti $z = x + iy$ in cui g è derivabile sono quelli tali che $x = y$; in tali punti, la derivata della funzione è $g'(z) = u_x + iv_x = 2x$, cioè la stessa della funzione f .

Teorema 2.5. Sia $f = u + iv$ una funzione derivabile in ogni punto di un insieme D aperto e connesso. Se una fra u , v o $|f|$ è costante su D , allora f è costante su D (dove $|f|$ indica la funzione il cui valore in z è $|f(z)|$). Inoltre, f è costante se $f'(z) = 0$ per ogni $z \in D$.

Dimostrazione. Supponiamo che u sia costante su D . Dalle equazioni di C-R segue allora che $v_y = v_x = 0$ su D , e quindi v è costante in D . Un ragionamento simile mostra che se v è costante allora u è costante e, dunque, f è costante.

Ora supponiamo che $|f|$ sia costante in D . Allora $|f|^2 = u^2 + v^2$ è costante in D . Derivando rispetto a x e rispetto a y quest'ultima espressione si trova

$$u u_x + v v_x = 0 \quad \text{e} \quad u u_y + v v_y = 0. \quad (2.5)$$

Sfruttando le condizioni di C-R la seconda equazione nella (2.5) può essere riscritta come

$$v u_x - u v_x = 0;$$

moltiplicando quest'ultima equazione per v , la prima della (2.5) per u e sommando membro a membro, si ottiene

$$(u^2 + v^2)u_x = 0.$$

Quindi, se $u^2 + v^2 = 0$, allora $u = v = 0$, cioè $f = 0$. Se $u^2 + v^2 \neq 0$, allora $u_x = 0$. Analogamente, usando la condizione di C-R nella prima

equazione in (2.5), moltiplicando la prima equazione per v e la seconda per u e sottraendo membro a membro si ottiene $(u^2 + v^2)u_y = 0$ da cui, a meno che u e v non siano identicamente nulle, segue che anche $u_y = 0$. Allora u è costante, e quindi f è costante.

Infine, se $f'(z) = 0$ su D , entrambe le derivate parziali v_x e v_y sono nulle su D , da cui, proseguendo come nella prima parte della dimostrazione, si trova f costante in D . \square

Osserviamo che il Teorema 2.5 vale se si considera f olomorfa in un dominio. Se l'insieme non è connesso, si può solo affermare che f è costante in ogni componente connessa dell'insieme di definizione. Una funzione olomorfa che si riduce a una costante si dice **degenere**.

Esempio 2.15. *Dal Teorema 2.5 segue che le funzioni $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ e $|z|$ non sono derivabili in nessun dominio D di \mathbb{C} : esse sono tutte funzioni a valori in \mathbb{R} (in tutti e tre i casi la parte immaginaria è nulla) ma non sono costanti; quindi non possono essere derivabili in D .*

Ci si potrebbe chiedere allora (le considerazioni fatte precedentemente non lo escludono) se tali funzioni siano derivabili in senso complesso in qualche punto isolato, ma non è così: si può verificare (come già fatto per $|z|$ nell'Esempio 2.11) che le condizioni di C-R non sono soddisfatte in nessun punto, e quindi $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ e $|z|$ non sono derivabili in nessun punto di \mathbb{C} .

L'esempio precedente mostra anche che una funzione derivabile in senso complesso in un dominio deve avere valori complessi; infatti, se essa ha valori reali o valori immaginari puri, allora è costante.

Queste considerazioni possono essere enunciate anche dicendo che, *data $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, con D dominio in \mathbb{C} , a valori reali, allora f è derivabile in D se e solo se f è costante in D .*

Talvolta può risultare utile esprimere le condizioni di olomorfia in coordinate polari. Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa in un

aperto U . Poniamo $z = \rho e^{i\theta}$, con $(\rho, \theta) \in U'$ tale che il corrispondente punto $z = \rho e^{i\theta} \in U$. Posto

$$g(\rho, \theta) = f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + iv(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad (\rho, \theta) \in U',$$

per la regola di derivazione della funzione composta e sfruttando le condizioni di $C-R$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + i \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta + iv_x \cos \theta + iv_y \sin \theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= u_x(-\rho \sin \theta) + u_y \rho \cos \theta + iv_x(-\rho \sin \theta) + iv_y \rho \cos \theta, \end{aligned}$$

cioé, sfruttando le condizioni di $C-R$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \rho} = (u_x + iv_x) \cos \theta + i(v_y - iu_y) \sin \theta = f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = i\rho [i(u_x + iv_x) \sin \theta + (v_y - iu_y) \cos \theta] = i\rho f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Quindi si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{1}{i\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = i\rho \frac{\partial g}{\partial \rho}. \quad (2.7)$$

Viceversa, supponiamo che valga la (2.7). Per le (2.6) si ha l'uguaglianza

$$(u_x + iv_x) \cos \theta + i(v_y - iu_y) \sin \theta = i(u_x + iv_x) \sin \theta + (v_y - iu_y) \cos \theta,$$

cioé

$$[(u_x + iv_x) - (v_y - iu_y)] e^{-i\theta} = 0,$$

da cui

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

cioé l'olomorfia della funzione f . Si ha

$$f'(\rho e^{i\theta}) = \frac{\partial g}{\partial \rho} e^{-i\theta} = \frac{1}{i\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} e^{-i\theta}.$$

2.5 L'operatore di Cauchy-Riemann

Per chiarire meglio la relazione tra l'olomorfia di una funzione $f(z)$ e il legame tra le derivate parziali delle sue componenti $u(x, y)$ e $v(x, y)$, soffermiamoci a considerare una particolare classe di funzioni: i polinomi complessi.

Ci sono vari modi, leggermente differenti, di guardare i polinomi dal punto di vista complesso. Uno di questi è considerare polinomi in x e y , $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con coefficienti complessi. Per esempio

$$(2 + i)xy + 3iy^2 + 5x^2;$$

polinomi come questo forniscono funzioni da \mathbb{R}^2 in \mathbb{C} , che potrebbero essere riguardate come funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C} , con (x, y) tali che $z = x + iy$. Un altro tipo di polinomi che si possono considerare sono i polinomi a coefficienti complessi nella variabile complessa z , per esempio

$$i + (3 + i)z + 5z^2.$$

Anche questi danno funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C} . Un polinomio in z genera naturalmente un polinomio in x e y con la sostituzione $z = x + iy$. Per esempio

$$\begin{aligned} i + (3 + i)z + 5z^2 &= i + (3 + i)(x + iy) + 5(x + iy)^2 \\ &= i + (3 + i)x + (3i - 1)y + 5x^2 + 10ixy - 5y^2. \end{aligned}$$

È interessante notare che il procedimento inverso a questo non sempre funziona: ci sono infatti diversi polinomi in x e y che non possono essere scritti come polinomi in z , come, per esempio, il polinomio x . Se fosse vero che $x = P(z) = P(x + iy)$ per qualche $P(z)$, allora P dovrebbe essere di primo grado, ma un polinomio di primo grado $az + b = ax + iay + b$ non può essere identicamente uguale a x per nessuna scelta di $a, b \in \mathbb{C}$. Un modo per scrivere un polinomio in x e y in notazione complessa è usare la sostituzione

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Quando un polinomio in x e y viene convertito in notazione z, \bar{z} , in genere ci sono degli \bar{z} nell'espressione risultante, che non si possono eliminare.

Esempio 2.16. Consideriamo il polinomio $x^2 + y^2$. Si ha

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 = \frac{z^2}{4} + \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{4} - \frac{z^2}{4} + \frac{z\bar{z}}{2} - \frac{\bar{z}^2}{4} = z\bar{z}.$$

Si può verificare che non esistono espressioni polinomiali in z che uguagliano $x^2 + y^2$ in cui non compaia \bar{z} .

Naturalmente, può accadere talvolta che, operando questo tipo di sostituzione, \bar{z} non ci sia:

Esempio 2.17. Nel polinomio seguente tutti gli \bar{z} si elidono:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2ixy &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 2i\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{z^2}{4} + \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{4} + \frac{2i(z^2 - \bar{z}^2)}{2 \cdot 2i} = z^2. \end{aligned}$$

La caratteristica che \bar{z} a volte compaia e a volte no è la chiave dell'analisi complessa: che cosa sia l'analisi complessa riguardo alle funzioni, non solo polinomiali, dipende da z e non da \bar{z} nello stesso modo in cui $x^2 - y^2 + 2ixy$ dipende da z ma non da \bar{z} . La questione è come estendere questa idea dai polinomi a funzioni più generali in modo preciso.⁵

Come detto in precedenza, la definizione di olomorfia di una funzione $f(z)$ può essere data utilizzando un particolare operatore differenziale (formale). Prima di introdurre questa definizione alternativa, ricordiamo alcune altre nozioni fondamentali.

⁵Tralasciamo i dettagli.

Definizione 2.2. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto ed $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dice che f è di classe C^1 su U (**derivabile con continuità**) se le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue in U , e si scrive $f \in C^1(U)$.

Si dice che f è di classe C^k su U (**derivabile con continuità k volte**) se tutte le derivate parziali di f fino all'ordine k $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ e $\frac{\partial^k f}{\partial y^k}$ compreso esistono e sono continue in U , e si scrive $f \in C^k(U)$.

In particolare, $C(U)$ indica la classe delle funzioni continue in U e $C^\infty(U)$ quella delle funzioni infinitamente derivabili con continuità in U .

Sfruttando l'associazione tra $f(z)$ e $\mathbf{F}(x, y)$ fatta prima, diremo che la funzione complessa $f = u + iv$ è di classe C^k se sia u che v lo sono.

Ricordiamo che, se $f \in C^1(U)$, essa è indipendente da x se e solo se $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$ in U e, analogamente, è indipendente da y se e solo se $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ in U . Vorremmo avere una nozione simile di derivabilità per accertare se f dipende da z o da \bar{z} . Ricordiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} x = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} y = 1.$$

Vorremmo che capitasse una cosa simile per z e \bar{z} al posto di x e y . Definiamo allora, per una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, di classe C^1 i seguenti operatori differenziali:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

essi agiscono su f in questo modo:

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Si verifica che

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1. \quad (2.8)$$

Osserviamo anche l'inversione apparente di segno, giustificata dalle (2.8):

$$\begin{aligned} z &= x + iy, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \bar{z} &= x - iy, & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Gli operatori $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ non sono derivate parziali, ma di fatto possiedono regole di calcolo analoghe a quelle delle derivate usuali.

Si verifica facilmente che $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sono lineari:

$$\frac{\partial}{\partial z} (aF + bG) = a \frac{\partial F}{\partial z} + b \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (aF + bG) = a \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + b \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$$

$\forall a, b \in \mathbb{C}$ e $\forall F, G$ di classe C^1 . Inoltre, per essi vale anche la regola di Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial z} (F \cdot G) = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot G + F \cdot \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (F \cdot G) = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \cdot G + F \cdot \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}.$$

Si dimostra che, dati due operatori $L = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ e $M = c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e tali che $Lz \equiv 1$, $L\bar{z} \equiv 0$, $Mz \equiv 0$ e $M\bar{z} \equiv 1$, allora L coincide con $\frac{\partial}{\partial z}$ e M con $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. In altre parole, le definizioni di $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sono le uniche possibili. Infatti, imponendo

$$\begin{cases} Lz = 1 \\ L\bar{z} = 0 \end{cases}$$

si trova

$$\begin{cases} a + ib = 1 \\ a - ib = 0 \end{cases},$$

e l'unica soluzione del sistema ottenuto è $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2i}$: $L = \frac{\partial}{\partial z}$. Con

lo stesso ragionamento si trova $c = \frac{1}{2}$; $d = -\frac{1}{2i}$: $M = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Diamo ora la seguente

Definizione 2.3. Una funzione $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, U aperto, di classe $C^1(U)$ si dice **olomorfa** se

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \forall z \in U.$$

L'operatore $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ è detto **operatore di Cauchy-Riemann**.⁶ Si ha

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ è detta *parte antiolomorfa* di f , e $\frac{\partial}{\partial z}$ è detta *parte olomorfa*. Se f è olomorfa, allora

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz} = f'(z);$$

Risulta cioè che, se f è olomorfa, essa “è indipendente” da \bar{z} , ma dipende solo da z . Essendo

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} [u_x + v_y + i(v_x - u_y)],$$

sfruttando le equazioni di Cauchy-Riemann si riottengono le due espressioni per la derivata complessa di $f(z)$:

$$f'(z) = \frac{1}{2} [2u_x + 2iv_x] = u_x + iv_x = f_x(z)$$

oppure

$$f'(z) = \frac{1}{2} [2v_y - 2iu_y] = v_y - iu_y = -if_y(z).$$

Osserviamo che l'operatore $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ è stato definito (in maniera naturale) sulle funzioni di classe C^1 , e quindi abbiamo richiesto questa condizione

⁶Gli operatori $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sono chiamati anche **derivate di Wirtinger**.

su f (cioé sulle sue componenti) nella definizione appena data.⁷ In realtà, la consuetudine di applicare gli operatori $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$ a funzioni di classe C^1 è una richiesta eccessiva, dato che l'equivalenza con la definizione di olomorfia data in precedenza (in base al Teorema 2.4) condurrebbe alla seguente: $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto, è olomorfa in U se e solo se (pensata come funzione di (x, y)) è differenziabile in senso reale in U e si ha $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ in U .

Si dimostra (lo dimostreremo più avanti) che una funzione olomorfa è anche analitica (ecco perché, come abbiamo sottolineato in precedenza, le funzioni olomorfe in un aperto sono chiamate anche funzioni analitiche). Risulta allora che se una funzione è derivabile in senso complesso in un aperto, allora la sua derivata è continua ed esistono anche tutte le derivate successive. Una funzione olomorfa definita in un aperto ammette inoltre uno sviluppo in serie di potenze (locale) in un intorno di ciascun punto del suo dominio. Ribadiamo che se la funzione è definita in un qualunque sottoinsieme T di \mathbb{C} , non necessariamente aperto, dire che “ f è analitica in T ” significa dire che essa è analitica in qualche insieme aperto contenente T ; f si dirà analitica in un punto z_0 se essa è la somma di una serie di potenze centrata in tale punto.

D'ora in avanti, avendo appurato che verificare che valgano le condizioni di C-R è equivalente a verificare che la funzione complessa di variabile complessa sia indipendente da \bar{z} , useremo entrambi gli strumenti a seconda della convenienza.

Una funzione può avere derivata in un punto ma non essere analitica in quel punto:

Esempio 2.18. *La funzione $f(z) = |z|^2$ ammette derivata in $z = 0$, ma non è derivabile in nessun altro punto di \mathbb{C} .*

⁷Per dare la definizione di olomorfia di f tramite l'operatore $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (tale operatore è definito tramite gli operatori $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$) si richiede spesso che f sia di classe C^1 nell'aperto in cui è definita (cioé che le sue componenti u e v siano di classe C^1). Nella definizione di olomorfia data in precedenza, in effetti, tale richiesta non c'è, ma osserviamo che molti testi la fanno (si veda anche [3], pag. 230 e successiva osservazione): una funzione viene cioè chiamata olomorfa se è derivabile in un aperto e se è di classe C^1 in tale aperto (senza questa richiesta, a volte si deve “anticipare” la proprietà di analiticità delle funzioni olomorfe, come verrà fatto talvolta nel seguito).

Infatti in $z_0 = 0$ si ha

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{x^2 + y^2}{x + iy} = \frac{x(x^2 + y^2) - iy(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x - iy$$

e

$$\begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -y = 0. \end{cases}$$

Quindi $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = 0 = f'(0)$.

Osserviamo anche che le componenti di $f(z)$ sono di classe C^1 : $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$. Per ogni $z \neq 0$, essendo $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$, risulta $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = z \neq 0$, e quindi $f(z)$ non è analitica in zero.

Osserviamo anche che la funzione $f(z)$ considerata è quella “proveniente” dal polinomio dell’Esempio 2.16.

Il fatto che l’unico punto di derivabilità per la funzione assegnata sia l’origine può essere verificato usando le condizioni di C-R: essendo $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$ si ha $u_x = 2x$, $u_y = 2y$ e $v_x = v_y = 0$; quindi $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ sono nel punto $(x, y) = (0, 0)$.

Esempio 2.19. La conclusione dell’Esempio 2.15 si può ottenere anche usando l’operatore di Cauchy-Riemann: posto $z = x + iy$, si ha $Re(z) = x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e, quindi, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(Re(z)) = \frac{1}{2} \neq 0$; inoltre $Im(z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ e, quindi, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(Im(z)) = \frac{i}{2} \neq 0$ e, infine $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ e, quindi, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}|z| \neq 0$.

2.6 Alcune particolari funzioni complesse

Consideriamo prima di tutto le **funzioni polinomiali complesse**. Osserviamo prima che ogni costante è una funzione olomorfa; la più semplice funzione olomorfa non costante è $f(z) = z$, la cui derivata è 1 (come si verifica facilmente usando la definizione). Poiché la somma e il prodotto di due funzioni olomorfe è ancora una funzione olomorfa,

segue che ogni polinomio $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ (di grado n se $a_n \neq 0$) è una funzione olomorfa con derivata $P'(z) = a_1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1}$.

Dal Teorema fondamentale dell'algebra, sappiamo che se le radici di $P(z)$ sono $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, il polinomio può essere fattorizzato come

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non sono necessariamente distinte; dalla fattorizzazione si ottiene che $P(z)$ non si annulla per nessun valore diverso da $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; inoltre, la fattorizzazione è univocamente determinata tranne che per l'ordine dei fattori.

Se, tra gli α_i , h coincidono, il loro valore è detto **zero** del polinomio di **ordine** h ; si trova che la somma degli ordini degli zeri di un polinomio è uguale al suo grado. Un polinomio di grado n ha n zeri.

L'ordine di uno zero α può essere determinato anche tramite considerazioni sulle derivate successive di $P(z)$ in $z = \alpha$: se α è uno zero di ordine h allora si può scrivere $P(z) = (z - \alpha)^h P_h(z)$, con $P_h(\alpha) \neq 0$; le derivate successive forniscono $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(h-1)}(\alpha) = 0$ e $P^{(h)}(\alpha) \neq 0$. Risulta cioè che l'ordine di uno zero è pari all'ordine della prima derivata non nulla. Uno zero di ordine 1 è detto **zero semplice** ed è caratterizzato dal fatto che $P(\alpha) = 0$ e $P'(\alpha) \neq 0$.

Citiamo il

Teorema 2.6 (di Lucas). *Se tutti gli zeri di un polinomio $P(z)$ giacciono su un semipiano, allora tutti gli zeri di $P'(z)$ giacciono sullo stesso semipiano.*

Una formulazione più debole del teorema afferma che il più piccolo poligono convesso⁸ che contiene gli zeri di $P(z)$ contiene anche gli zeri di $P'(z)$.

È chiamato *Teorema di Gauss-Lucas* quello che afferma: *dato un polinomio $P(z)$ non costante a coefficienti complessi, gli zeri di $P'(z)$*

⁸Un insieme X (nel piano complesso) si dice *convesso* se, presi due qualunque punti $x, y \in X$, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in X .

appartengono alla chiusura convessa⁹ dell'insieme degli zeri di $P(z)$.

Nel primo capitolo abbiamo già introdotto (in maniera formale) l'**esponenziale** (complesso). Avendo ora definito le funzioni olomorfe (e avendo anticipato la loro proprietà di analiticità), si può definire la **funzione esponenziale** come la soluzione dell'equazione differenziale $f'(z) = f(z)$ con condizione iniziale $f(0) = 1$ (nell'Esempio 2.12 abbiamo visto che la funzione e^z ha, come derivata prima, se stessa, come succede nel caso reale), che si risolve ponendo

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n + \cdots$$

e, quindi

$$f'(z) = a_1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1} + \cdots.$$

Imponendo $f'(z) = f(z)$ si trova $a_{n-1} = na_n$, mentre la condizione iniziale fornisce $a_0 = 1$; segue per induzione che $a_n = \frac{1}{n!}$. La soluzione di tale equazione viene denotata con e^z e chiamata funzione esponenziale complessa per analogia col caso reale. Essa è quindi definita come

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots;$$

tale serie, detta **serie esponenziale**, converge nell'intero piano complesso, come si verifica applicando, per esempio, il criterio del rapporto. Avendo definito e^z come somma di una serie di potenze possiamo ora ridimostrare le proprietà viste (in maniera formale) nel Capitolo 1. La proprietà $e^{z+w} = e^z e^w$ segue dall'equazione differenziale: infatti, osservando che $\forall c \in \mathbb{C}$ si ha

$$(e^z \cdot e^{c-z})' = e^z \cdot e^{c-z} + e^z \cdot (-e^{c-z}) = 0,$$

segue che $e^z \cdot e^{c-z}$ è costante ($e^z \cdot e^{c-z} = K$), e il suo valore si trova ponendo $z = 0$ ($K = e^c$). Allora risulta $e^z \cdot e^{c-z} = e^c$; posto $c = z + w$

⁹Si chiama *chiusura convessa* (o *inviluppo convesso*) di un insieme X l'insieme composto da tutti e soli i punti ottenuti come combinazione convessa (combinazione lineare con coefficienti non negativi la cui somma è 1) di punti di X . Essa si può definire anche come il più piccolo insieme convesso che contiene X o come l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono X .

si ricava la proprietà che volevamo mostrare.

Osserviamo che nel ragionamento precedente si è usato il fatto che $f(z)$ è costante se $f'(z)$ è identicamente nulla; questo fatto è sicuramente vero se $f(z)$ è definita nell'intero piano complesso (si veda il Teorema 2.5).

Un caso particolare della proprietà dimostrata si ha per $e^z \cdot e^{-z} = 1$, che mostra che e^z non è mai nullo. Per x reale lo sviluppo esponenziale mostra che $e^x > 1$ per $x > 0$ e, dato che e^x e e^{-x} sono reciproci, che $0 < e^x < 1$ per $x < 0$. Il fatto che la serie abbia coefficienti reali mostra che $e^{\bar{z}}$ sia il complesso coniugato di e^z . Quindi $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot e^{-iy} = 1$ e $|e^{x+iy}| = e^x$.

Consideriamo, ora, le **funzioni trigonometriche complesse**. Sommando e sottraendo membro a membro la formula di Eulero con la sua formula analoga (con $-y$ al posto di y) $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ si ottiene

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Definiamo allora il **seno complesso** di z e il **coseno complesso** di z come

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (2.9)$$

$\forall z \in \mathbb{C}$. Essendo e^z una funzione intera (con derivata e^z , come mostrato nell'Esempio 2.12), lo sono anche $\sin z$ e $\cos z$ e, dalla regola della catena, segue che

$$(\sin z)' = \cos z \quad \text{e} \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sostituendo nella definizione la serie esponenziale si trovano gli sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.10)$$

e

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.11)$$

Se z è reale si riottengono le ben note serie circolari.

Si definisce, poi,

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}};$$

analogamente,

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Si verificano facilmente tutte le proprietà formali (periodicità, simmetrie, formule di addizione, di duplicazione, di prostafesi, etc.). Anche le funzioni cotangente, secante e cosecante sono definite in analogia al caso reale.

Definiamo anche le **funzioni iperboliche complesse**

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (2.12)$$

dette **seno iperbolico complesso** e **coseno iperbolico complesso** e, analogamente alla tangente complessa, la **tangente iperbolica complessa**

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

Le (2.12) possono anche essere definite come

$$\sinh z := \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i^2}, \quad \cosh z := \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2}.$$

Dalla loro definizione, segue che anche le funzioni seno e coseno iperbolico complesse sono funzioni intere (e si possono calcolare facilmente le loro derivate $(\sinh z)' = \cosh z$ e $(\cosh z)' = \sinh z$).

Sostituendo l'espressione di e^z come serie di potenze nella definizione delle funzioni $\sinh z$ e $\cosh z$ si ottengono gli sviluppi

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.13)$$

Il legame tra le funzioni iperboliche e le funzioni circolari è il seguente:

$$\cos z = \cosh(iz) \quad \text{e} \quad \sin z = -i \sinh(iz),$$

oppure

$$\cosh z = \cos(iz) \quad \text{e} \quad \sinh z = -i \sin(iz).$$

Le funzioni e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$ sono dette **funzioni trascendenti elementari**.¹⁰ Dopo aver definito e^z come serie esponenziale, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$ possono anche essere definite dalle (2.10), (2.11), (2.13); manipolando poi tali sviluppi in serie si riottengono le (2.9) e (2.12).

Osserviamo che tutte le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche sono funzioni razionali di e^{iz} .

Dalla definizione (2.9) di $\cos z$ e $\sin z$ si ottiene la formula di Eulero $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. La stessa può essere ottenuta partendo dallo sviluppo di e^{iz} e sfruttando gli sviluppi (2.10) e (2.11); si ha

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Inoltre, con un semplice calcolo si verifica che la prima formula trigonometrica fondamentale resta valida anche per il seno e coseno in campo complesso, cioè si ha $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \forall z \in \mathbb{C}$; analogamente, si dimostra che $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \forall z \in \mathbb{C}$; invece, non è vero, in generale, che $|\sin z| \leq 1$ e $|\cos z| \leq 1$.

Le funzioni e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$ sono funzioni illimitate in \mathbb{C} . Mostriamolo per la funzione $\sin z$: esplicitando le parti reale e immaginaria, dalla formula di addizione del seno si ha

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y; \end{aligned}$$

la stessa espressione si trova sfruttando la definizione di esponenziale complesso:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}$$

¹⁰Si dice funzione *trascendente* una funzione che non sia algebrica. Una funzione $f(z)$ si dice *algebrica* se esiste un polinomio $P(z_1, z_2)$ nelle due indeterminate z_1, z_2 tale che $P(z, f(z)) = 0$. Intuitivamente, una funzione algebrica si può “costruire” applicando un numero finito di volte le quattro operazioni fondamentali dell’aritmetica, l’elevamento a potenza e l’estrazione di radice n -esima.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} [e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)] \\
&= \frac{1}{i} \left[-\cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + i \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right] \\
&= i \cos x \sinh y + \sin x \cosh y.
\end{aligned}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\
&= \sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x + \sinh^2 y.
\end{aligned}$$

Quindi $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} (\sin^2 x + \sinh^2 y) = \infty$ (ricordiamo che $x, y \in \mathbb{R}$).

Analogamente si trova

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

e, sfruttando poi il legame tra le funzioni goniometriche e le funzioni iperboliche si ricava

$$|\sinh z|^2 = |\sin(iz)|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

e

$$|\cosh z|^2 = |\cos(iz)|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y.$$

Quindi, facendo il limite per $(x, y) \rightarrow \infty$ si verifica che le funzioni considerate sono illimitate in \mathbb{C} .

Verifichiamo ora con un esempio che esistono numeri complessi z tali che $|\sin z| > 1$: essendo

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \\
&= (\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)(\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y),
\end{aligned}$$

si ha che i numeri $\sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y$ con parte immaginaria nulla e maggiori di 1 soddisfano la nostra richiesta. Cioé, si deve avere $\cos x \sinh y = 0$, da cui $\cos x = 0$, e quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; inoltre, imponendo la condizione $\sin x \cosh y = (-1)^k \cosh y > 1$, si

trova che i numeri complessi z con la proprietà cercata sono della forma $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + iy$, $y \neq 0$.

Un'altra caratteristica interessante delle cinque funzioni trascendenti elementari che stiamo considerando è la periodicità. La funzione esponenziale è periodica di periodo $2\pi i$ (si ha $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$), e da ciò (usando le (2.12)) segue che anche $\sinh z$ e $\cosh z$ lo sono, con lo stesso periodo. Le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono invece periodiche di periodo 2π . Nel caso delle funzioni complesse la periodicità non si traduce in proprietà "grafiche" come accade nel caso reale, ma è una proprietà analitica.

Osserviamo inoltre che, mentre data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e periodica, allora essa è limitata, le funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C} e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$ sono tutte continue e periodiche, ma illimitate.

Vale la pena anche soffermarsi sugli zeri di queste cinque funzioni trascendenti elementari. Come abbiamo già visto, e^z non ammette zeri. Per trovare gli zeri della funzione $\sin z$ dobbiamo risolvere l'equazione $\sin z = 0$, che è equivalente a $|\sin z| = 0$, cioè $\sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} = 0$; quindi deve essere

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sinh y = 0, \end{cases}$$

da cui $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In modo simile si trova che gli zeri di $\cos z$ sono dati dai punti $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'equazione $\cosh z = 0$ è equivalente all'equazione

$$|\cosh z| = \sqrt{\cosh^2 x - \sin^2 y} = 0;$$

poiché $\sin^2 y \leq 1 \leq \cosh^2 x$, si ha $\cosh^2 x - \sin^2 y = 0$ se e solo se $\cosh^2 x = 1 = \sin^2 y$; la prima equazione ha soluzione $x = 0$ e la seconda $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Gli zeri della funzione $\cosh z$ sono dunque dati dai punti $z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$. Analogamente, $\sinh z = 0$ per $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 2.20. Consideriamo la funzione $f(z) = z^2$, $z \in U = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : x > 0\}$; essa è iniettiva nel semipiano U , quindi invertibile, e il dominio della funzione inversa f^{-1} è l'immagine di f , cioè il piano complesso meno il semiasse negativo, che possiamo indicare come

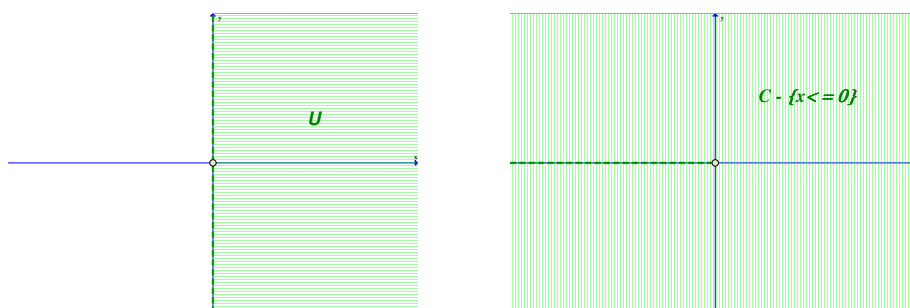
$$\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Infatti

$$z = \rho e^{i\theta} \in U \quad \Leftrightarrow \quad \rho > 0 \text{ e } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, e quindi

$$z \in U \quad \Leftrightarrow \quad |z^2| = \rho^2 > 0 \text{ e } \arg(z^2) = 2\theta \in (-\pi, \pi).$$



La funzione inversa di f , $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ è detta **valore principale** di \sqrt{z} . Per il Teorema 2.3, essa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e si ha

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{f'(\sqrt{z})} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (2.14)$$

Osserviamo che il valore principale di \sqrt{z} coincide con la funzione reale \sqrt{x} per $x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Nell'esempio precedente abbiamo definito la funzione valore principale della radice quadrata di z come inversa della funzione di partenza. Sappiamo che un numero complesso $w \neq 0$ ammette n radici n -esime complesse; volendo, quindi, definire la funzione $\sqrt[n]{z}$ è necessario che questa notazione indichi una sola di queste radici, scelta in maniera univoca con qualche convenzione. Il fatto che un numero complesso abbia esattamente n radici n -esime ci dice quindi che la funzione

$f(z) = \sqrt[n]{z}$ è una funzione a n valori, cioè una multifunzione.

Ricordiamo che una **multifunzione** (o **funzione multivoca** o **funzione polidroma**) è una funzione da un insieme A all'insieme delle parti $\mathcal{P}(B)$ di un insieme B , che associa ad un elemento a di A un sottoinsieme di B . Nel contesto delle funzioni complesse di variabile complessa si incontrano spesso multifunzioni (la sorgente primaria della polidromia è proprio la funzione $\arg(z)$); ecco perché, per sottolineare il fatto che una funzione sia a valore singolo, essa talvolta viene chiamata **funzione univoca** o **funzione monodroma**.

Anche in \mathbb{R} si incontrano multifunzioni, che generalmente nascono come inverse di funzioni non iniettive. Il classico esempio è dato dalla relazione inversa di $y = x^2$: essa è la multifunzione $f(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$, definita per $x > 0$; $f(x)$ ha due *determinazioni* (dette anche *rami* della multifunzione): la determinazione positiva \sqrt{x} e la determinazione negativa $-\sqrt{x}$. Le multifunzioni complesse presentano un aspetto di continuità che non si manifesta invece per le multifunzioni di variabile reale. Nell'esempio che stiamo considerando, le determinazioni $y_0 = \sqrt{x}$ e $y_1 = -\sqrt{x}$ sono completamente distinte: quando x varia con continuità da 0 a $+\infty$ ognuna delle due varia indipendentemente dall'altra e, se ci si restringe a considerare una sola di esse, l'altra non entra mai in gioco. Nel campo reale non è possibile passare con continuità da un ramo all'altro di una multifunzione, ed è per questo che la nozione stessa di multifunzione non ricorre frequentemente.

In \mathbb{C} invece le cose funzionano diversamente: prima di tutto la funzione \sqrt{z} è definita (questa è la vera e propria “essenza” di \mathbb{C} , dato che esiste $i \in \mathbb{C}$ tale che $i^2 = -1$) $\forall z \in \mathbb{C}$ (per $z = 0$ l'argomento di z non è ben definito ma si pone $\sqrt{0} = 0$); in secondo luogo, i rami della multifunzione, in un certo senso, “comunicano” fra loro.

Prima di vedere meglio questa caratteristica torniamo alla convenzione da adottare per scegliere univocamente una determinazione della multifunzione. Nel caso delle funzioni reali radici di indice pari la scelta è abbastanza facile (anche se del tutto arbitraria): essendo \mathbb{R} ordinato, si decide di scegliere, in genere, la determinazione positiva (anche se

niente vieta di scegliere quella negativa), che viene chiamata, appunto **determinazione principale** o **ramo principale** della radice. Nel caso complesso, invece, non essendoci un ordinamento, la scelta non è così ovvia.

Abbiamo già definito la funzione determinazione principale o ramo principale (o valore principale) di \sqrt{z} ; definiamo ora la funzione **funzione radice n -esima principale** di z (con $z = \rho e^{i\theta}$) ponendo

$$\sqrt[n]{z} := \rho^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\text{Arg}(z)}{n}},$$

dove l'argomento principale di z è scelto in modo tale che $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. La radice n -esima principale di z è soltanto uno degli n numeri che, elevati a potenza n , danno z ; essa è una funzione definita su tutto \mathbb{C} .

Si può fare poi una convenzione analoga per definire le altre $n - 1$ funzioni radici n -esime: se $z = \rho e^{i \text{Arg}(z)}$, $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, per $k = 0, 1, \dots, n - 1$ si pone

$$f_k(z) = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\text{Arg}(z) + 2k\pi}{n}}.$$

Quando si scrive $\sqrt[n]{z}$ senza nessuna precisazione si intende la determinazione principale $f_0(z)$.

Per esempio, per $n = 2$ si ottengono le due determinazioni della radice quadrata di z : la determinazione principale $f_0(z)$ e la determinazione

$$f_1(z) = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\text{Arg}(z) + 2\pi}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\text{Arg}(z)}{2}} e^{i\pi} = -\rho^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\text{Arg}(z)}{2}} = -f_0(z).$$

Per capire come i rami di una multifunzione “comunicano” fra loro consideriamo la funzione radice n -esima principale per $n = 2$; seguiamo il valore della funzione radice quadrata principale lungo la circonferenza di centro 0 e raggio 1 partendo dal punto -1 ; su tale circonferenza si ha $f_0(z) = e^{i \frac{\text{Arg}(z)}{2}}$; mentre z compie un giro (per esempio in senso orario), $\text{Arg}(z)$ varia da π a $-\pi$ (escluso), quindi partendo da $f_0(-1) = e^{i \frac{\pi}{2}} = i$ la funzione assume tutti i valori $e^{i \frac{\text{Arg}(z)}{2}}$ e, quando $\text{Arg}(z) \rightarrow -\pi$, essa tende a $e^{-i \frac{\pi}{2}} = -i$. Poiché avremmo trovato un risultato simile se avessimo preso una circonferenza di raggio qualunque, deduciamo che la funzione $f_0(z)$, pur essendo definita $\forall z \in \mathbb{C}$, risulta discontinua lungo la semiretta $y = 0$, $x < 0$ (e lo stesso si verifica per $f_1(z)$). Inoltre,

quando z tende a -1 dopo aver fatto un giro lungo la circonferenza, cioè avvicinandosi a -1 dal semipiano inferiore, $f_0(z)$ tende al valore $f_1(-1)$. Succede quindi che dopo un giro i valori della funzione f_0 si sovrappongono ai valori della funzione f_1 e che dopo un ulteriore giro, si torna nuovamente a f_0 .

Questo comportamento è tipico delle funzioni polidrome: nel caso della funzione \sqrt{z} , $z \in \mathbb{C}$, si ha che la radice quadrata complessa di z è una funzione polidroma con due determinazioni (più che una funzione ‘a due valori’, essa è una coppia di funzioni univoche), ciascuna delle quali è definita in tutto \mathbb{C} ma è continua solo in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; l’origine è detto **punto di diramazione** (o **punto di ramificazione**): esso è il punto girando attorno al quale una diramazione “si trasforma” nell’altra.

Analogamente, la radice n -esima complessa di z è una funzione polidroma a n determinazioni f_0, f_1, \dots, f_{n-1} ; dopo un giro completo attorno all’origine in senso orario, f_0 diventa f_{n-1} , dopo un altro giro diventa f_{n-2} e così via; dopo n giri si torna a f_0 .

Se $f(z)$ torna per la prima volta al suo valore iniziale dopo n giri attorno al punto di diramazione, il punto di diramazione si dice di **ordine (algebrico) $n - 1$** ; un punto di diramazione di ordine 1 (come l’origine per \sqrt{z}) è detto **punto di diramazione semplice**; se $f(z)$, per quante volte si giri attorno al punto di diramazione, non torna mai al suo valore iniziale, il punto di diramazione è detto **logaritmico** o **di ordine infinito**.

Osserviamo che, nell’esempio appena visto, l’essere partiti dal punto $z = -1$ e l’aver scelto una circonferenza è solo una scelta dettata dalla comodità; risulta infatti che un qualunque movimento continuo di un punto nel piano lungo una curva chiusa qualsiasi che circonda l’origine fa passare l’immagine della multifunzione da un ramo all’altro. La scelta iniziale del ramo è arbitraria (così come è arbitrario scegliere \sqrt{x} o $-\sqrt{x}$ per la multifunzione $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, nominata in precedenza); inoltre, si può osservare che se la curva chiusa non circonda l’origine, tale fenomeno non si manifesta.

Dalle considerazioni fatte risulta ora ancora più evidente che una multifunzione complessa, a differenza di una multifunzione reale, è un tutt’u-

no che non si presta a essere “separato” in rami in maniera arbitraria. Per ottenere una funzione ad un sol valore quello che si fa è restringere la multifunzione a un insieme connesso che non contenga il punto di diramazione: si prende quindi il piano complesso privato di una semiretta che parte dal punto di diramazione e va fino a ∞ , (proprio per impedire che ci siano curve chiuse attorno al punto di diramazione); essa è chiamata **taglio** o **linea di diramazione**. In realtà anche la scelta del taglio è arbitraria: non è necessario che essa sia una linea, ma deve essere una curva semplice che parte dall’origine e va a ∞ ; di solito, però, si sceglie come taglio proprio l’asse reale negativo perché tale scelta corrisponde a scegliere l’argomento principale di z appartenente all’intervallo $(-\pi, \pi]$, e definisce quindi il ramo principale della funzione.

Non ci soffermiamo ad approfondire questo argomento. Osserviamo soltanto che esistono punti di diramazione diversi dall’origine, e che una funzione può avere più punti di diramazione.¹¹

Tornando all’Esempio 2.20 da cui siamo partiti, le determinazioni della multifunzione radice n -esima (che sono funzioni univoche) possono essere considerate come funzioni inverse della funzione potenza n -esima (nell’esempio $n = 2$). Più in generale, ogni funzione monodroma che si può definire facendo una scelta (come la convenzione su k da noi adottata nel caso della radice n -esima) nell’insieme delle immagini di $f(z)$ è detto, appunto, *ramo dell’inversa*; il ramo scelto dalla convenzione adottata (il ramo $f_0(z)$ nel nostro caso) è detto *ramo principale*, e il suo valore è chiamato *valore principale*.

Come abbiamo visto, la funzione esponenziale complessa, essendo periodica, non è invertibile. In analogia col caso reale, però, è naturale definire il **logaritmo complesso** (che si indica con $\log_c z$ o semplicemente con $\log z$, quando risulti chiaro che si tratta del logaritmo complesso) come relazione inversa dell’esponenziale complesso. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$

¹¹Per esempio, $f(z) = \sqrt{z-i}$ ha un punto di diramazione in $z = i$ e $f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{z+i}\sqrt{z-i}$ ha due punti di diramazione.

e $w = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$e^z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \log_c w;$$

$z = \log_c w$ è quindi una radice dell'equazione $e^z = w$; dato che $e^z \neq 0$ sempre, il numero zero non ha logaritmo; l'equazione $e^z = w$ si scrive come $e^x e^{iy} = \rho e^{i\phi}$, da cui, poiché due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno uguali i moduli e se gli argomenti differiscono di multipli di 2π , deve aversi che $e^x = \rho$, cioè $x = \log \rho$, e $y = \phi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi, per ogni numero complesso $w = \rho e^{i\phi}$, $w \neq 0$, si ha

$$\log_c w = \log \rho + i(\phi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.15)$$

cioé, per ogni numero complesso $w \neq 0$, esistono infiniti logaritmi complessi di w : essi hanno tutti la stessa parte reale (il logaritmo del modulo di w) e parti immaginarie che si ottengono aggiungendo all' $\arg(w)$ multipli di 2π .

Il logaritmo complesso è, dunque, una funzione a infiniti valori, cioè una multifunzione: $\log_{\mathbb{C}} z$ è una funzione polidroma a infinite determinazioni; l'origine è punto di diramazione di ordine infinito: infatti, continuando a girare (sempre nello stesso verso) lungo una curva chiusa attorno all'origine non si torna mai alla stessa determinazione da cui si è partiti. Partendo, per esempio, da f_0 (la determinazione che si ottiene dalla (2.15) per $k = 0$, che non è altro che la **determinazione principale del logaritmo**) e girando attorno all'origine in senso antiorario, f_0 si trasforma in f_1 , dopo un altro giro in f_2 , e così via; girando in verso orario f_0 si trasforma in f_{-1} , dopo un altro giro in f_{-2} , e così via.

Calcoliamo, per esempio

$$\log_c(-1) = \log |-1| + i(\pi + 2k\pi) = \pi i(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

e

$$\log_c(1) = \log |1| + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che, mentre tutti i logaritmi complessi di -1 hanno parte immaginaria diversa da zero, tra gli infiniti logaritmi complessi di 1 , uno è reale: il logaritmo reale di 1 . In generale, se z è reale positivo, il

suo logaritmo reale è uno degli infiniti logaritmi complessi di z : l'unico reale.

Abbiamo visto quindi che per $w \neq 0$ l'equazione $e^{x+iy} = w$ è equivalente a

$$\begin{cases} e^x = |w| \\ e^{iy} = \frac{w}{|w|}. \end{cases}$$

La prima equazione ammette un'unica soluzione $x = \log |w|$, il logaritmo reale del numero positivo $|w|$; il membro a destra della seconda equazione è un numero complesso di modulo 1: tale equazione ammette una e una sola soluzione nell'intervallo $-\pi < y \leq \pi$ (spesso, soprattutto per il logaritmo complesso si sceglie la convenzione $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$ anziché considerare l'argomento principale $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$).

La parte immaginaria di $\log w$ è anche chiamata **argomento** di w ed è interpretata geometricamente come l'angolo (in radianti) tra l'asse reale positivo e la semiretta dall'origine al punto w . Come già detto, in accordo con tale definizione l'argomento ha infiniti valori che differiscono di multipli di 2π e

$$\log w = \log |w| + i \arg(w).$$

Restringendo l'argomento di w a intervalli di ampiezza 2π si ottengono infinite funzioni monodrome.

Dopo aver introdotto la funzione logaritmo, è ora più comprensibile la notazione esponenziale di un numero complesso, noti il suo modulo e il suo argomento.

Le proprietà formali dei logaritmi restano valide anche nel campo complesso (esse sono una conseguenza delle proprietà dell'esponenziale). In particolare, $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si ha

$$\log_c(zw) = \log_c z + \log_c w.$$

Quest'ultima relazione, essendo un'uguaglianza tra multifunzioni, vale in "senso insiemistico": se $\log_c z$ e $\log_c w$ denotano l'insieme dei logaritmi complessi di z e di w rispettivamente, allora l'insieme formato sommando tutti questi elementi (un addendo del primo insieme con un addendo del secondo) coincide con l'insieme dei logaritmi complessi di

zw .

Anche in questo caso, per passare dall'essere, per ogni z , infiniti logaritmi all'essere infinite funzioni logaritmo, ciascuna con valore univocamente determinato $\forall z \neq 0$, si può introdurre una convenzione come fatto nel caso di $\sqrt[n]{z}$: si pone

$$f_k(z) = \log|z| + i(\text{Arg}(z) + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z},$$

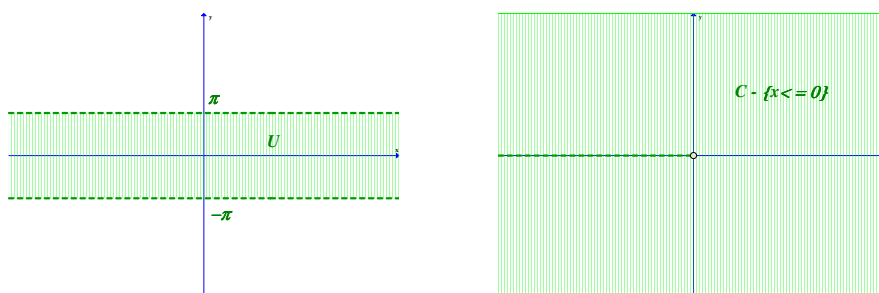
chiamando **logaritmo principale** di z la determinazione ottenuta per $k = 0$.

Oppure possiamo considerare una opportuna restrizione dell'esponenziale complesso, la funzione $f(z) = e^z$, $z \in U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y < \pi\}$ ¹²; essa è iniettiva, e dunque invertibile in U ; inoltre $e^z = e^x e^{iy}$, da cui

$$z \in U \quad \Leftrightarrow \quad |e^z| = e^x > 0 \text{ e } \arg(e^z) = y \in (-\pi, \pi)$$

e, quindi,

$$\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$



La funzione inversa di f , $f^{-1}(z) = \log z$ è detta **valore principale** o, anche, **determinazione principale** o **ramo principale del logaritmo complesso**. Il logaritmo principale viene spesso denotato con la L maiuscola ($\text{Log } z$). Per il Teorema 2.3, $\log z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e si ha

$$(\log z)' = \frac{1}{f'(\log z)} = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}, \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (2.16)$$

¹²Si noti, in questo caso, la diversa scelta dell'argomento principale.

Osserviamo anche che il valore principale di $\log_c z$ coincide con la funzione reale $\log x$ per $x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. In particolare, $\log |z|$ coincide col logaritmo naturale di $|z|$.

La determinazione $\log z = \log |z| + i\arg(z)$, $-\pi \leq \arg(z) < \pi$, $z \neq 0$, non è continua nei punti della semiretta $z = x$, $x < 0$. Mostriamo, per esempio, che non è continua nel punto $z = -1$. Consideriamo la restrizione della funzione $\log z$ alla semiretta $z = -1 + iy$, $y > 0$; si ha

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (\log \sqrt{1 + y^2} + i\arg(-1 + iy)) = i\pi;$$

considerando, invece, la restrizione alla semiretta $z = -1 + iy$, $y < 0$; si ha

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} (\log \sqrt{1 + y^2} + i\arg(-1 + iy)) = -i\pi.$$

In generale, per ogni $x_0 < 0$ si ha

$$\lim_{z \rightarrow x_0} \text{Log } z = \begin{cases} \log |x_0| + i\pi = \text{Log } x_0 & \text{se } \text{Im}(z) > 0 \\ \log |x_0| - i\pi & \text{se } \text{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Ancora più in generale, risulta che, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $\log z = \log |z| + i\arg(z)$, $-\alpha \leq \arg(z) < \alpha + 2\pi$, $z \neq 0$, non è continua nei punti della semiretta $z = te^{i\alpha}$, $t > 0$. Ecco perché si considera spesso la funzione $\log z = \log |z| + i\arg(z)$, $-\alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi$, $z \neq 0$, che è definita (come la funzione $f^{-1}(z)$ inversa di e^z nella striscia U considerata prima) nel cosiddetto *piano tagliato lungo la semiretta* $z = te^{i\alpha}$, $t > 0$. Naturalmente, considerando il piano complesso privato di una semiretta uscente dall'origine, in esso sono definite infinite determinazioni continue del logaritmo. Per esempio, in $\mathbb{C} \setminus \{z = (x, 0), x \leq 0\}$ sono definite, appunto, la determinazione principale del logaritmo e le determinazioni

$$\log z = \log |z| + i\arg(z), \quad (2k - 1)\pi < \arg(z) < (2k + 1)\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La definizione dell'esponenziale e del logaritmo complesso permettono ora di definire

$$z^w := e^{w \log_c z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ e } w \in \mathbb{C},$$

essendo $e^{\log_c z} = z \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\log_c t^w = w \log_c t$. Anche questa operazione non è univocamente definita. Le proprietà formali delle potenze rimangono valide (intese, sempre, in “senso insiemistico”). Se si restringe z ai numeri reali positivi, allora $\log z$ sarà reale e z^w ha un singolo valore; altrimenti, $\log z$ è il logaritmo complesso e z^w avrà in generale infiniti valori che differiscono di un fattore $e^{2k\pi iw}$, $k \in \mathbb{Z}$: infatti

$$e^{w \log_c z} = e^{w[\log |z| + i(\arg(z) + 2k\pi)]} = e^{w \log |z| + iw \arg(z) + 2k\pi iw}$$

Ci sarà un singolo valore se e solo se w è un intero n e allora z^w può essere interpretato come una potenza di z o di z^{-1} . Se w è un numero razionale $\frac{p}{q}$, allora z^w ha esattamente q valori e può essere rappresentato come $\sqrt[q]{z^p}$.

In particolare, la funzione $f(z) = z^a$, $a \in \mathbb{C}$, definita da

$$z^a := e^{a \log z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

è detta **valore principale** o **determinazione principale** di z^a . Per il Teorema 2.2, essa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e

$$(z^a)' = (e^{a \log z})' = a e^{a \log z} (\log z)' = a z^{a-1}.$$

Osserviamo che il valore principale di z^a coincide con la funzione reale x^a per $x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ e per $a \in \mathbb{R}$.

Valgono le stesse considerazioni fatte per il logaritmo anche per la funzione radice n -esima (che può essere riguardata come funzione z^w , con $w = \frac{1}{n}$):

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n} (\log |z| + i \arg(z))} = e^{\frac{1}{n} \log |z|} e^{i \frac{\arg(z)}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg(z)}{n}},$$

$z \neq 0$. La funzione radice n -esima è una funzione a n valori e quindi la si può pensare come n funzioni ad un sol valore, che si ottengono considerando, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha + \frac{2\pi}{n} k < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n} (k+1), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Osserviamo che considerando due determinazioni ottenute dando a k valori consecutivi (per esempio h e $h + 1$), esse si possono prolungare con continuità sulla semiretta $z = te^{i(\alpha + \frac{2h\pi}{n})}$, $t > 0$, ottenendo una funzione continua di cui le precedenti sono restrizioni.

Le considerazioni e gli esempi precedenti mostrano che anche le multifunzioni possono essere analitiche se ristrette al dominio in cui sono funzioni univoche.

Esempio 2.21. *Vogliamo verificare la derivabilità della funzione radice n -esima principale sfruttando le condizioni di olomorfia in coordinate polari. La funzione $f(z) = \sqrt[n]{z}$ espressa in funzione di ρ e θ diventa $g(\rho, \theta) = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$, con $\theta = \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Tale funzione è definita in \mathbb{C} ma è continua in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, quindi verifichiamo la derivabilità in quest'ultimo insieme, cioè per $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$. Si ha*

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{1}{n} \rho^{\frac{1}{n}-1} e^{i\frac{\theta}{n}} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{i}{n} \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}.$$

Quindi risulta $\frac{\partial g}{\partial \theta} = i\rho \frac{\partial g}{\partial \rho}$, che è proprio la condizione di olomorfia in coordinate polari, e si dimostra analogamente per le altre $n - 1$ determinazioni.

Consideriamo ora il caso $n = 2$ e calcoliamo la derivata di $f(z) = \sqrt{z}$ ($z = \rho e^{i\theta}$):

$$f'(z) = \frac{\partial g}{\partial \rho} e^{-i\theta} = \frac{1}{2} \rho^{\frac{1}{2}-1} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\theta} = \frac{1}{2\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

che conferma il risultato già trovato nella (2.14) tramite il Teorema di derivazione della funzione inversa.

Esempio 2.22. *Consideriamo la funzione logaritmo principale di $z = \rho e^{i\theta}$: $\log z = g(\rho, \theta) = \log \rho + i\theta$, con $\theta = \text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Anche questa funzione è definita in \mathbb{C} ma è continua in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, quindi verifichiamo la derivabilità per $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$. Si ha*

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = i.$$

Quindi si ha $\frac{\partial g}{\partial \theta} = i\rho \frac{\partial g}{\partial \rho}$, che dimostra la derivabilità della funzione nell'insieme considerato.

Calcoliamo ora la derivata di $f(z) = \log z$ ($z = \rho e^{i\theta}$):

$$f'(z) = \frac{\partial g}{\partial \rho} e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{z},$$

che conferma il risultato trovato nella (2.16).

Esempio 2.23. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; calcoliamo a^3 in senso complesso. Sia $k \in \mathbb{Z}$; si ha

$$a^3 = e^{3 \log_c a} = e^{3(\log |a| + 2k\pi i)} = |a|^3 \cdot [\cos(6k\pi) + i \sin(6k\pi)] = a^3$$

(intesa in senso reale). In questo caso, quindi, l'operazione di elevamento a potenza è univocamente definita e coincide con quella definita in campo reale.

Esempio 2.24.

$$i^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4} \log_c i} = e^{\frac{1}{4}(\log |i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{\pi}{2}k}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Quindi

$$i^{\frac{1}{4}} = \{e^{i\frac{\pi}{8}}, ie^{i\frac{\pi}{8}}, -e^{i\frac{\pi}{8}}, -ie^{i\frac{\pi}{8}}\};$$

in questo caso, cioè, l'operazione coincide con l'estrazione di radice quarta.

Esempio 2.25.

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \log_c (-1)} = e^{\sqrt{2}\pi i(2k+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Questa operazione, che non è definita in campo reale, ammette infiniti risultati complessi.

Esempio 2.26.

$$i^i = e^{i \log_c i} = e^{i(\log |i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

quindi l'operazione ha un'infinità di risultati reali, pur non avendo significato in campo reale.

Osservazione 2.1. Poiché potrebbe nascere un'ambiguità sulla notazione e^z , con essa si intende l'immagine (univocamente definita) di z tramite la funzione esponenziale, e non l'operazione di elevamento a potenza con base e .

È importante sottolineare che nella teoria delle funzioni analitiche complesse tutte le funzioni trascendenti elementari possono essere espresse tramite e^z e tramite la sua inversa $\log z$; in altre parole, c'è essenzialmente una sola funzione trascendente elementare.

2.7 Funzioni armoniche

Sia $f = u + iv$ olomorfa in un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$; allora f è analitica; in particolare u, v sono di classe C^2 e soddisfano le equazioni di *C-R*: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$; allora $(u_x)_x = (v_y)_x$ e $(u_y)_y = -(v_x)_y$ e, poiché le derivate miste sono uguali, si ha $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ragionando in modo analogo si trova anche che $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Definizione 2.4. Una funzione $u \in C^2(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, si dice **armonica** se

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

L'operatore $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ è detto **operatore di Laplace** o **Laplaciano**¹³, e viene denotato con Δ . Si scrive

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Le funzioni armoniche sono dunque quelle che soddisfano l'**equazione di Laplace** $\Delta u = 0$.¹⁴

¹³Si può definire il Laplaciano di u anche per $u \in C^2(U)$ con U aperto di \mathbb{R}^n come somma delle derivate parziali seconde di u rispetto alle n variabili.

¹⁴L'equazione di Laplace ha diversi significati fisici: per esempio, se u rappresenta la temperatura interna di un mezzo omogeneo in equilibrio termico, in cui non ci siano pozzi o sorgenti di calore, allora u soddisfa l'equazione di Laplace nella regione Ω occupata dal mezzo; ancora, u può rappresentare la concentrazione chimica di una sostanza disciolta in un mezzo omogeneo in condizioni di equilibrio chimico; l'equazione $\Delta u = 0$ rappresenta anche una membrana elastica omogenea in posizione di riposo.

Osserviamo che l'operatore di Laplace può essere espresso anche tramite gli operatori $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \Delta.$$

Similmente

$$4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \Delta.$$

Da quanto appena visto segue, dunque, che le parti reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche.

L'importanza delle funzioni armoniche (in due variabili) è data dal fatto che essa ha forti legami con la teoria delle funzioni olomorfe.

Esempio 2.27. Consideriamo la funzione (olomorfa in \mathbb{C}) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Da quanto appena mostrato risulta che le funzioni $u_n(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^n$ e $v_n(x, y) = \operatorname{Im}(x + iy)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, sono armoniche (infatti non sono altro che polinomi omogenei di grado n in x e y), chiamate **armoniche elementari**.¹⁵ Utilizzando la forma esponenziale di z , risulta semplice scriverle in forma polare:

$$u_n = \operatorname{Re}((\rho e^{i\theta})^n) = \rho^n \cos(n\theta)$$

e

$$v_n = \operatorname{Im}((\rho e^{i\theta})^n) = \rho^n \sin(n\theta).$$

Sapendo che le parti reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche, è naturale chiedersi se anche il viceversa, in un certo

¹⁵Tali funzioni ricorrono nella soluzione in serie (usando il metodo della separazione delle variabili) dell'equazione di Laplace nel disco con condizione di Dirichlet assegnata sul bordo del disco.

sensu, sia vero, cioè se, data una funzione $u \in C^2(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, armonica, esista un'altra funzione v armonica in U tale che $f = u + iv$ sia olomorfa in U (o, analogamente, se esista una funzione f olomorfa in U tale che $\operatorname{Re}(f) = u$).

Vale il seguente risultato:

Proposizione 2.1. *Dato un insieme aperto semplicemente connesso¹⁶ U e una funzione $u \in C^2(U)$ armonica in U , esiste una funzione v armonica in U tale che $f = u + iv$ sia olomorfa in U ; v è detta **armonica coniugata** di u ed è univocamente determinata a meno di una costante additiva.*

Partendo nuovamente dalle condizioni di C-R $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ con u assegnata, cerchiamo infatti una funzione $v(x, y)$ tale che $\nabla v = (-u_y, u_x)$, cioè una funzione potenziale v del campo $(-u_y, u_x)$, campo che risulta essere irrotazionale perché, per l'ipotesi di armonicità, si ha $(-u_y)_y = (u_x)_x$; tale potenziale esiste in tutto U (non solo localmente) se U è semplicemente connesso.

Detto in altri termini, data una funzione u armonica in U , risulta che l'armonica coniugata di u esiste dato che, essendo U semplicemente connesso, la forma differenziale (chiusa) $\omega = -u_y dx + u_x dy$ è anche

¹⁶Si possono dare diverse definizioni di insieme semplicemente connesso: un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice **semplicemente connesso** se ogni curva semplice e chiusa in D è frontiera di un insieme limitato interamente contenuto in D .

Intuitivamente, date due curve qualunque contenute in D aventi gli stessi punti iniziale e finale, ciascuna di esse può essere "deformata con continuità" fino a sovrapporsi sull'altra senza uscire dall'insieme (oppure una curva semplice chiusa può essere "deformata con continuità" fino a ridursi a un punto senza uscire dall'insieme).

Detto rigorosamente, un insieme aperto connesso è semplicemente connesso se due curve qualunque contenute in esso, con gli stessi estremi, sono omotope (oppure se ogni curva chiusa contenuta nell'insieme è omotopa a una curva costante).

Date due curve $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contenute in un dominio D tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = z_a$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = z_b$ sono dette **omotope** se esiste una funzione continua $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ tale che

i) $\Gamma(t, 0) = \gamma_1(t)$ e $\Gamma(t, 1) = \gamma_2(t) \forall t \in [a, b]$;

ii) $\Gamma(a, \lambda) = z_a$ e $\Gamma(b, \lambda) = z_b \forall \lambda \in [0, 1]$.

In particolare, se le curve sono chiuse la ii) viene sostituita dalla condizione $\Gamma(a, \lambda) = \Gamma(b, \lambda) \forall \lambda \in [0, 1]$.

Inoltre, la funzione $\gamma_\lambda : [a, b] \rightarrow D$ definita da $\gamma_\lambda(t) = \Gamma(t, \lambda)$ rappresenta una curva che al variare di $\lambda \in [0, 1]$ si deforma con continuità da γ_1 a γ_2 senza uscire da D .

esatta in U , cioè $dv = \omega$ o, analogamente, $\nabla v = (-u_y, u_x)$. L'armonica coniugata di u si troverà allora con i metodi usuali che permettono di calcolare una funzione potenziale.

2.8 Curve nel piano complesso

Come sappiamo, si può definire una curva nel piano (in \mathbb{R}^2) come coppia (γ, \mathbf{r}) formata da un sottoinsieme γ di \mathbb{R}^2 e da una funzione $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, continua in I , tale che $\mathbf{r}(I) = \gamma$. Dal punto di vista cinematico, una curva può essere pensata come un insieme di punti del piano (precisamente, una successione di punti ordinati con continuità dai valori crescenti di un parametro) in cui una particella è libera di muoversi con un grado di libertà; γ è il sostegno, o immagine, o supporto, della curva, e \mathbf{r} la sua parametrizzazione. Uno stesso sottoinsieme di \mathbb{R}^2 può essere ottenuto con diverse parametrizzazioni. Per questo motivo, introdotta la definizione di curve equivalenti, talvolta viene chiamata curva una classe di curve equivalenti (si verifica che la relazione di equivalenza fra curve è una relazione d'equivalenza: riflessiva, simmetrica e transitiva). Ricordiamo che due curve γ_1 , di parametrizzazione $\mathbf{r}_1 : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e γ_2 , di parametrizzazione $\mathbf{r}_2 : \tilde{I} = [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ si dicono equivalenti ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) se esiste una corrispondenza biunivoca $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ continua e strettamente crescente tale che $\mathbf{r}_2(\tau) = \mathbf{r}_1(\varphi(\tau)) \forall \tau \in \tilde{I}$.

Una **curva** in \mathbb{C} (o **arco di curva continuo** o **cammino** nel piano complesso) è una funzione continua da un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ in \mathbb{C}

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

(anche qui si identifica \mathbb{C} con \mathbb{R}^2). Alcuni testi chiamano **cammino** la funzione γ e **curva** l'immagine di I tramite γ , ovvero il sostegno $\{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in I\}$ (altri il viceversa).

Le curve in \mathbb{C} sono dunque funzioni di variabile reale, a valori complessi, aventi componenti $x(t)$ e $y(t)$, $t \in I$, continue.

Si possono così definire le curve rettificabili di lunghezza $l(\gamma)$, le curve semplici, chiuse, di Jordan, di classe C^1 , regolari e regolari a trat-

ti. In particolare, la curva γ è regolare se γ è di classe C^1 e $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0 \forall t \in I$, cioè se $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0) \forall t \in I$ (si veda [9]); γ si dice regolare a tratti se I può essere suddiviso in un numero finito in intervalli su ciascuno dei quali γ è regolare. La retta tangente a $\gamma(t)$ in un punto $z_0 = \gamma(t_0)$ è $z(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Le curve non chiuse vengono anche chiamate **archi**. Le curve chiuse e regolari a tratti sono dette, talvolta in alcuni contesti, **circuiti**.

Precisiamo che quando si parla di curve chiuse, se non viene specificato diversamente si intende che la curva sia semplice; anche il verso di percorrenza è sottinteso: si intende sempre che una curva chiusa sia percorsa in verso antiorario (verso positivo).

2.9 Mappe conformi

Sia $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, una curva regolare contenuta in un aperto U di \mathbb{C} , e sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continua in U . Allora l'equazione $w(t) = f(\gamma(t))$ definisce una curva $w : I \rightarrow \mathbb{C}$, che non è altro che l'immagine (o la trasformata) della curva γ tramite la funzione f .

Supponiamo ora che f sia olomorfa in U e, in particolare, nel punto $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in I$, si abbia $f'(z_0) \neq 0$. La curva γ passa, dunque, per z_0 e la curva w passa per $w_0 = f(z_0)$. Essendo $f'(z_0) \neq 0$, dalla regola della catena si ottiene $w'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0$; quindi la curva w ammette una tangente in w_0 , la cui direzione sarà data da

$$\arg(w'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0)) \neq 0$$

(il prodotto di due numero complessi non nulli ha per argomento la somma degli argomenti). Poiché $\arg(w'(t_0)) - \arg(\gamma'(t_0))$ non dipende da γ ma solo da $f'(z_0) \neq 0$, l'ultima relazione stabilisce che l'angolo fra la direzione tangente a γ in z_0 e quella tangente a w in w_0 è indipendente dalla curva γ . Per questa ragione, curve regolari che passano per z_0 e tangenti fra loro vengono trasformate, tramite f , in curve regolari con tangente comune in w_0 . Inoltre, curve regolari che si intersecano in z_0 formando un dato angolo in z_0 sono trasformate in curve regolari che formano il medesimo angolo, sia in ampiezza che verso.

Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ che preserva gli angoli (in ampiezza e orientazione) tra i versori tangenti di ogni coppia di curve regolari in un loro punto di intersezione è detta **trasformazione** o **mappa conforme**. Una trasformazione che lascia invariate le ampiezze degli angoli ma non necessariamente il verso si dice **trasformazione isogonale**. In base a quanto appena detto, vale la seguente

Proposizione 2.2. *Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, è olomorfa in U e $f'(z) \neq 0$ per $z \in U$, allora f è una trasformazione conforme.*

Osserviamo che, nei punti critici di $f(z)$, $\arg(f'(z_0)) = \arg(0)$, quindi l'angolo di cui verrebbero ruotate le curve tramite la trasformazione è indeterminato.

Ora, poiché

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|,$$

questo significa che un qualunque piccolo segmento con un estremo in z_0 è, al limite, nella trasformazione, contratto o dilatato di un rapporto $|f'(z_0)|$, cioè, la variazione di scala effettuata dalla trasformazione $w = f(z)$ nel punto z_0 è indipendente dalla direzione. Naturalmente questo cambiamento di scala, in generale, varia da punto a punto.

Viceversa, la preservazione degli angoli tramite una funzione f in z_0 , sia in ampiezza che in verso, implica l'esistenza di $f'(z_0)$. Cioé, vale la seguente proposizione (che è anche una definizione di trasformazione conforme).

Proposizione 2.3. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in U . Allora $f'(z) \neq 0$, $z \in U$, se e solo se f è una trasformazione conforme in U .*

Osserviamo che per introdurre le mappe conformi siamo partiti dalla loro proprietà geometrica di preservazione degli angoli e abbiamo poi enunciato la Proposizione 2.2; saremmo potuti partire da quest'ultima assumendola come definizione di trasformazione conforme (*una funzione f olomorfa in un aperto U e tale che $f'(z) \neq 0$ in U è detta mappa conforme*) per poi fare le seguenti osservazioni.

Come abbiamo visto, a una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, olomorfa rimane associata una funzione a valori vettoriali $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ tale che $|J(\mathbf{F})| = |f'(z)|^2$; se ora guardiamo \mathbf{F} non come campo vettoriale piano ma come trasformazione di coordinate $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y), \end{cases} (x, y) \in U$, la condizione naturale da imporre a \mathbf{F} di classe $C^1(U)$ affinché sia almeno localmente invertibile (e quindi possa essere vista come un cambio di variabili in \mathbb{R}^2) è che $|J(\mathbf{F})| \neq 0$; se \mathbf{F} “proviene” da una funzione olomorfa la condizione è proprio $f'(z) \neq 0$. Ecco perché dal punto di vista geometrico risultano interessanti le funzioni olomorfe in un aperto che hanno derivata diversa da zero.

In base al Teorema di inversione locale¹⁷ una trasformazione conforme $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è un *diffeomorfismo locale*: $\forall z \in U$ esiste un intorno di z in cui f è invertibile, con inversa di classe C^1 (si dice anche che una mappa conforme è *localmente biunivoca* e *biolomorfa*).

L'importanza delle mappe conformi è legato all'aspetto analitico per il fatto che esse conservano la proprietà di una funzione di essere armonica,¹⁸ e questo consente di avere una strategia per risolvere il problema di Dirichlet per il Laplaciano in un dominio piano: cercare $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio limitato e $g \in C(\partial\Omega)$ è assegnata. Essendo note le formule risolutive esplicite quando Ω è un cerchio o un semipiano, per risolvere esplicitamente il problema del Dirichlet-Laplaciano su più domini possibili è utile conoscere quante più possibili mappe conformi che trasformino il cerchio o il semipiano in altri domini.

A tale scopo enunciamo il

¹⁷Il Teorema di inversione locale afferma che: Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A aperto di \mathbb{R}^n ; se
i) $f \in C^1(A)$,
ii) $x_0 \in A$ è tale che $|J_f(x_0)| \neq 0$, allora esistono un intorno V di x_0 e un intorno W di $y_0 = f(x_0)$ tali che:
1) f è una corrispondenza biunivoca tra V e W ;
2) detta $g : W \rightarrow V$ l'inversa di f (ristretta a V), si ha $g \in C^1(W)$ e, se $x = g(y)$, $|J_g(y)| = [J_f(x)]^{-1}$ (formula che generalizza la formula per la derivata di funzioni inverse per funzioni reali di variabile reale).
Se $f \in C^1(A)$, A aperto di \mathbb{R}^n , con $B = \text{Im}(f)$ e $|J_f(x)| \neq 0 \forall x \in A$, allora f è un *diffeomorfismo locale* di classe C^1 tra A e B .

¹⁸Si veda, per esempio, [2], pag. 242.

Teorema 2.7 (della mappa di Riemann). *Un qualunque insieme $U \subset \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso (che non sia \mathbb{C}), esso è biolomorfo al disco aperto unitario $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Il teorema precedente afferma cioè che esiste una mappa conforme che trasforma un aperto semplicemente connesso del piano nel disco unitario, cioè una funzione $f : U \rightarrow B_1(0)$ tale che le trasformazioni indotte dalla funzione f e dalla sua inversa f^{-1} sono conformi.

Un altro aspetto interessante è che la trasformazione conforme $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associata ad una funzione olomorfa $f(z)$ fornisce una visualizzazione delle sue proprietà (così come le proprietà di una funzione reale vengono ben visualizzate mediante il suo grafico). Più precisamente, risulta essere particolarmente fruttuoso lo studio della corrispondenza fra curve indotta dalla trasformazione conforme considerata. Le specifiche proprietà della funzione $f(z)$ possono essere descritte studiando la famiglia di curve in cui sono trasformate alcune curve particolarmente semplici.

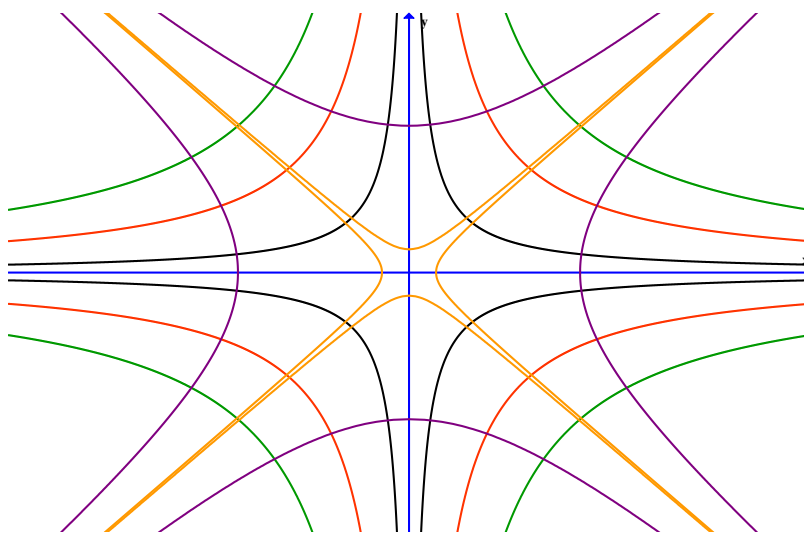
Spesso conviene studiare le immagini delle rette $x = x_0$ e $y = y_0$; posto $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, l'immagine di $x = x_0$ è data dalle equazioni parametriche $\begin{cases} u = u(x_0, y) \\ v = v(x_0, y) \end{cases}$ (y agisce come parametro e può essere eliminato o mantenuto a seconda dei casi); analogamente, l'immagine di $y = y_0$ è determinata dalle equazioni $\begin{cases} u = u(x, y_0) \\ v = v(x, y_0) \end{cases}$ prese insieme, queste curve immagine formano una rete ortogonale nel piano $w = f(z)$. Analogamente, si possono considerare le curve $u(x, y) = u_0$ e $v(x, y) = v_0$ nel piano z . Anch'esse sono ortogonali e sono chiamate le curve di livello di u e v .

In altri casi può risultare più conveniente usare coordinate polari e studiare le immagini di cerchi concentrici nell'origine e dei raggi uscenti dall'origine.

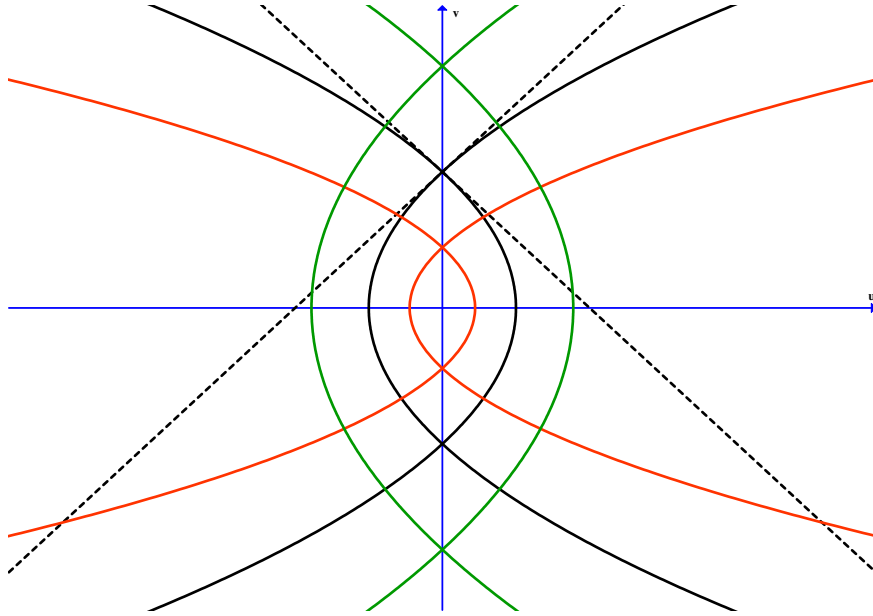
Esempio 2.28. *Consideriamo la funzione $f(z) = z^2$; essa è olomorfa in \mathbb{C} e $f'(z) \neq 0$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ogni $z_0 \neq 0$ ammette un intorno in cui*

la funzione è invertibile (l'invertibilità è solo locale, non globale).

In questo caso $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$; le curve di livello $u = u_0$ sono delle iperboli equilateri con asintoti le bisettrici degli assi, mentre le curve di livello $v = v_0$ delle iperboli equilateri che hanno per asintoti gli assi coordinati; esse sono ortogonali fra loro (e sono rappresentate nella figura sottostante): infatti, posto $g(x,y) = x^2 - y^2 - u_0$ e $h(x,y) = 2xy - v_0$, si ha $\nabla g = (2x, -2y)$ e $\nabla h = (2y, 2x)$, da cui $\langle \nabla g, \nabla h \rangle = 0$.



L'immagine di $x = x_0$ è $u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$ e l'immagine di $y = y_0$ è $u = -y_0^2 + \frac{v^2}{4y_0^2}$. Entrambe le famiglie di curve rappresentano parabole con il fuoco nell'origine i cui assi sono diretti, rispettivamente, lungo la direzione negativa e positiva dell'asse u , come mostra la figura.



La loro ortogonalità è ben nota dalla geometria analitica; infatti, cerchiamo le intersezioni tra le due parabole nel piano uv :

$$\begin{cases} u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2} \\ u = -y_0^2 + \frac{v^2}{4y_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2} \\ v^2 \left(\frac{1}{4y_0^2} + \frac{1}{4x_0^2} \right) = y_0^2 + x_0^2 \end{cases} \quad \begin{cases} u = x_0^2 - y_0^2 \\ v^2 = 4x_0^2 y_0^2. \end{cases}$$

In tali punti di intersezione $(x_0^2 - y_0^2, \pm 2x_0 y_0)$, effettivamente, si ha (posto $g(u, v) = u - x_0^2 + \frac{v^2}{4x_0^2}$ e $h(u, v) = u + y_0^2 - \frac{v^2}{4y_0^2}$), $\nabla g = \left(1, \frac{v}{2x_0^2} \right)$ e $\nabla h = \left(1, -\frac{v}{2y_0^2} \right)$, da cui $\langle \nabla g, \nabla h \rangle = 1 - \frac{v^2}{4x_0^2 y_0^2} = 0$.

Esempio 2.29. Facciamo un esempio riferito alla fluidodinamica. Sono dette **linee di flusso** le linee tangenti al gradiente di un campo vettoriale. Consideriamo il campo vettoriale di velocità $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ che caratterizza il moto piano di un fluido incompressibile (che può, cioè, essere considerato a densità costante): conosciamo quindi la velocità di ogni particella di fluido che occupa la posizione (x, y) nel piano; in questo caso, quindi, la linea di flusso rappresenta lo spostamento della particella di fluido: è una curva che risulta sempre tangente al vettore velocità. Se il moto è stazionario

(cioé la velocità del fluido varia da punto a punto ma rimane costante nel tempo in ogni singolo punto) allora le linee di flusso coincidono con le cosiddette **linee di corrente**, cioè con le traiettorie delle particelle. Consideriamo ora la forma differenziale $\omega_1 = -u_2 dx + u_1 dy$, con campo vettoriale associato $\mathbf{v} = (-u_2, u_1)$, dove u_1, u_2 sono le componenti del campo delle velocità \mathbf{u} ¹⁹; la condizione di incompressibilità (o incomprimibilità) del fluido è data da $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$, cioè da $-\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$ che, in questo caso, coincide col dire ω_1 è chiusa, e quindi almeno localmente esatta. La funzione potenziale $U(x, y)$ tale che $dU = \omega_1$ (cioé tale che $\nabla U = \mathbf{v}$) è detta funzione di corrente e le sue linee di livello $U(x, y) = c$ si chiamano, appunto, linee di flusso o di corrente: in ogni punto \mathbf{u} è tangente alla linea di flusso passante per quel punto. L'introduzione della funzione di corrente U (che si definisce per i fluidi incomprimibili) è comoda perché si ha una funzione scalare (funzione della sola posizione (x, y)) legata alle componenti del vettore velocità, che permette di avere una immediata visualizzazione del moto del fluido (flusso) tramite le curve $U(x, y) = c$.

In certi casi la velocità del fluido può essere espressa come gradiente di un potenziale. Mentre la funzione di corrente U esiste solo per fluidi incomprimibili (con $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$) che mantengono costante la densità, per i cosiddetti fluidi irrotazionali (non vorticosi, nei quali una particella, muovendosi lungo il moto, non ruota attorno a un asse passante per il suo centro di massa), cioè tali che $\operatorname{rot}(\mathbf{u}) = 0$, si può definire un'altra funzione scalare $V = V(x, y)$ detta **potenziale di velocità**, tale che $\nabla V = \mathbf{u}$. Consideriamo anche la forma differenziale $\omega_2 = u_1 dx + u_2 dy$ ²⁰; essendo il moto del fluido irrotazionale, essa è chiusa risulta $\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$ (quindi, in tal caso u_2 e u_1 sono armoniche coniugate e la funzione $f(x, y) = u_2(x, y) + iu_1(x, y)$ è olomorfa), e quindi il potenziale di velocità V è la funzione potenziale di ω_2 ; le

¹⁹L'integrale $\int_{\gamma} \omega_1$, dove γ è una curva chiusa, semplice, regolare a tratti e percorsa in senso antiorario, rappresenta la differenza tra la quantità di fluido uscita e quella entrata nell'unità di tempo nell'interno racchiuso da γ , detto *flusso di fluido attraverso* γ .

²⁰L'integrale $\int_{\gamma} \omega_2$, dove γ è una curva chiusa, semplice, regolare a tratti e percorsa in senso antiorario, rappresenta la *circuitazione* del campo \mathbf{u} lungo γ .

sue linee di livello sono dette **linee equipotenziali** e sono ortogonali alle linee di flusso in ogni punto di intersezione. Dunque, le famiglie di curve $U(x, y) = c$ e $V(x, y) = k$ costituiscono, appunto, una rete ortogonale nel piano xy .

Risulta che $\Delta V = \operatorname{div}(\nabla V) = \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$, quindi V è armonica. Inoltre, dato che $\Delta U = \operatorname{div}(\nabla U) = \operatorname{div}(\mathbf{v}) = -\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$, anche U è armonica. La funzione $F(z) = F(x + iy) = V(x, y) + iU(x, y)$ è detta **potenziale complesso**; essa è olomorfa dato che il fluido è incomprimibile e dato che $\operatorname{rot}(\mathbf{u}) = 0$ (il moto è irrotazionale), e quindi anche V e U sono armoniche coniugate.

Risulta che ogni potenziale complesso $f = V + iU$, olomorfo in un aperto del piano complesso, definisce univocamente un moto piano stazionario di un fluido incomprimibile e irrotazionale nella regione aperta del piano in cui V e U sono, rispettivamente, il potenziale di velocità e la funzione di corrente. La prima figura nell'Esempio 2.28 rappresenta proprio le linee di flusso e le linee equipotenziali del potenziale complesso $f(z) = z^2$.

Esempio 2.30. Consideriamo la funzione $f(z) = e^z$; essa è olomorfa in \mathbb{C} e $f'(z) = e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$, quindi f è conforme in tutto il piano complesso.

In tal caso $u = e^x \cos y$ e $v = e^x \sin y$. Fissato $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, la retta orizzontale in \mathbb{C} passante per z_0 è data da

$$\gamma_1(t) = t + iy_0 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y_0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

mentre la retta verticale in \mathbb{C} passante per z_0 è data da

$$\gamma_2(t) = x_0 + it = \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

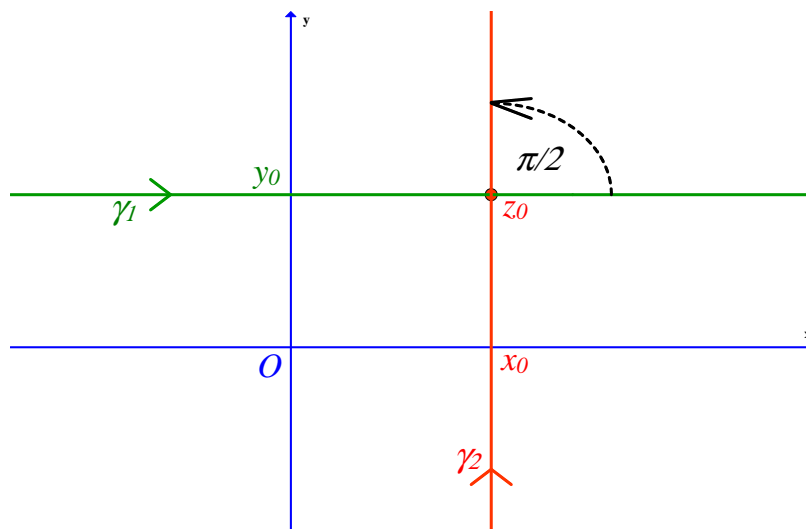
La funzione e^z trasforma la retta orizzontale nella semiretta uscente dall'origine di coefficiente angolare $\tan y_0$:

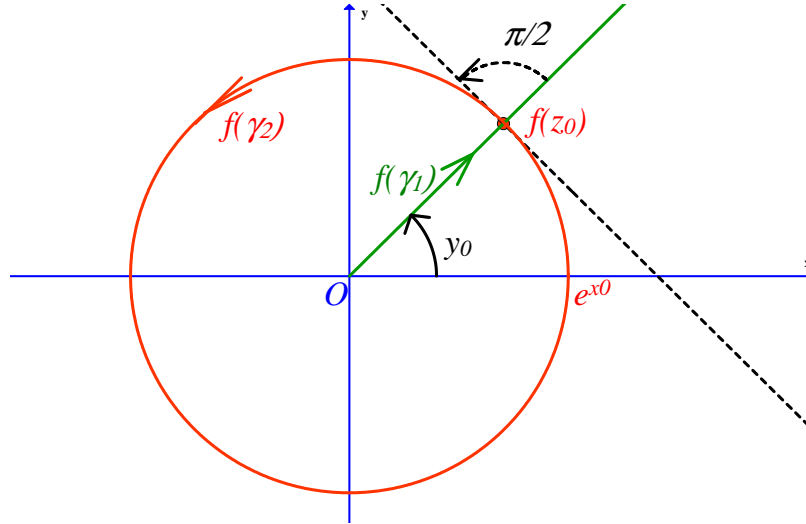
$$f(\gamma_1(t)) = f(t + iy_0) = e^{t + iy_0} = e^t(\cos y_0 + i \sin y_0) = \begin{cases} x(t) = e^t \cos y_0 \\ y(t) = e^t \sin y_0, \end{cases}$$

da cui $\frac{y(t)}{x(t)} = \tan y_0$. La retta verticale, invece, viene trasformata da f nella circonferenza di raggio e^{x_0} :

$$f(\gamma_2(t)) = f(x_0 + it) = e^{x_0 + it} = e^{x_0}(\cos t + i \sin t) = \begin{cases} x(t) = e^{x_0} \cos t \\ y(t) = e^{x_0} \sin t, \end{cases}$$

che è, appunto, la parametrizzazione di una circonferenza di raggio e^{x_0} e centro nell'origine.





Le rette γ_1 e γ_2 sono ortogonali e vengono trasformate da f in curve ortogonali.

2.10 Integrali curvilinei complessi

Molte proprietà delle funzioni olomorfe possono essere dedotte con l'aiuto di integrali lungo curve nel piano complesso.

Siano $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, una funzione continua, e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare (la definizione potrà poi essere estesa anche a curve regolari a tratti) contenuta in U . Consideriamo una suddivisione $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$; la quantità

$$|\mathcal{D}| := \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$$

è detta **ampiezza** della suddivisione. Dalla suddivisione \mathcal{D} si ottengono n curve $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{C}$, di estremi $\gamma(t_{i-1})$ e $\gamma(t_i)$. Per ciascuna di esse, scelto un arbitrario $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, esso individua un punto $\gamma(\tau_i)$ sul sostegno di γ_i . Fissati la suddivisione \mathcal{D} e l'insieme di punti $\{\tau_i\}$,

definiamo la **somma di Riemann**

$$S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) := \sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})).$$

Teorema 2.8. *Siano $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, una funzione continua, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare contenuta in U e $S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f)$ la somma di Riemann appena definita. Allora esiste un unico numero complesso $J(f)$, detto **integrale di f lungo la curva γ** e denotato con*

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni suddivisione $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $|\mathcal{D}| < \delta(\varepsilon)$ e per ogni scelta dei $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$, si abbia

$$\left| S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) - \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Inoltre, definiamo

$$J(f) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Il teorema appena enunciato afferma allora che le somme di Riemann della funzione f , relative a \mathcal{D} e $\{\tau_i\}$, convergono a $J(f)$ per $n \rightarrow \infty$. Le parti reale e immaginaria di J possono essere identificate con integrali curvilinei (reali), cioè l'integrale $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$ della funzione complessa $f(\gamma(t))\gamma'(t) = g_1(t) + ig_2(t)$ nella variabile reale t va inteso come

$$\int_a^b g_1(t) dt + i \int_a^b g_2(t) dt,$$

cioé come somma (complessa) di due integrali (reali).

Osserviamo che, posto $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ e $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, si ha

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t)) \\ &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) \\ &\quad + i[u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)], \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy,$$

cioè: il calcolo dell'integrale di una funzione complessa f lungo una curva γ nel piano complesso può essere ricondotto al calcolo di integrali lungo γ di forme differenziali lineari (integrali curvilinei di seconda specie) che hanno per componenti le parti reale e immaginaria di $f(z)$. L'*integrale curvilineo* di f lungo γ (o sul cammino γ) viene denotato anche nei seguenti modi:

$$\int_{\gamma} f(z) \quad \text{o} \quad \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z) dz.$$

Come già anticipato, la definizione di $\int_{\gamma} f dz$ si generalizza facilmente anche a curve regolari a tratti.

Vediamo quali sono le proprietà fondamentali dell'integrale di funzioni complesse.

1) *Linearità (rispetto alla funzione integranda)*: se f e g sono funzioni continue su una curva γ regolare a tratti, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz.$$

2) *Additività (rispetto al cammino di integrazione)*: per ogni coppia di curve $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ regolari a tratti e tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ si ha

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

3) *Invarianza rispetto a cambi di parametro che non cambiano l'orientazione*: se γ_1 e γ_2 sono due qualunque curve equivalenti si ha

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$$

mentre, se γ_1 e γ_2 sono due qualunque curve opposte si ha

$$\int_{\gamma_1} f dz = - \int_{\gamma_2} f dz.$$

Inoltre, dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$\begin{aligned} |S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f)| &= \left| \sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(\gamma(\tau_i))| |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| l(\gamma), \end{aligned}$$

da cui per $n \rightarrow \infty$ si ottiene la seguente stima dell'integrale

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M l(\gamma), \quad (2.17)$$

con $M = \max_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))|$ (M è ben definito essendo f continua, e γ è rettificabile essendo di classe C^1). La stima (2.17) è chiamata *disuguaglianza di Darboux*. Essa può essere ricavata direttamente anche usando la definizione di integrale curvilineo:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M l(\gamma). \end{aligned}$$

Vale anche la seguente proprietà: data una successione di funzioni continue $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e una curva γ regolare a tratti contenuta in U , se $f_n(z)$ converge uniformemente a $f(z)$ per $z \in \gamma$, allora è lecito passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Più in generale, se $f(z, \nu)$ converge a $f(z)$ uniformemente in z per $\nu \rightarrow \nu_0$, allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\nu \rightarrow \nu_0} \int_{\gamma} f(z, \nu) dz.$$

Esempio 2.31. Calcoliamo l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ dove γ è l'arco di parabola $z(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$ e $f(z) = z$:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it) dt = \int_0^1 (t - 2t^3) dt + 3i \int_0^1 t^2 dt = i.$$

Esempio 2.32. Consideriamo la curva $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, che parametrizza la circonferenza di centro l'origine e raggio r , percorsa una volta in senso antiorario. Calcoliamo

$$\oint_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{re^{it}} r i e^{it} dt = ir^2 \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it} dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi ir^2.$$

Esempio 2.33. Consideriamo la circonferenza $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, e $f(z) = (z - a)^n$, dove n è un intero arbitrario. Si ha $\gamma'(t) = ire^{it}$ e $f(\gamma(t)) = r^n e^{int}$; applicando la definizione di integrale di f lungo γ

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it} dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Se $n \neq -1$ si ottiene

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = r^{n+1} \left| \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

essendo l'esponenziale periodico. Per $n = -1$ si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Compattando questi due risultati si ottiene che le potenze intere di $z - a$ possiedono la seguente proprietà di ortogonalità:

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } n = -1. \end{cases}$$

2.11 Funzioni primitive

D'ora in avanti indicheremo con $\mathcal{O}(U)$ l'insieme delle funzioni olomorfe in un dato insieme aperto U .

Definizione 2.5. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continua in U . Una primitiva di f in U è una funzione $F \in \mathcal{O}(U)$ tale che $F'(z) = f(z) \forall z \in U$.

In genere si considerano funzioni definite in un dominio D . Infatti, se f è definita in un aperto connesso e F è una primitiva di f , tutte e sole le primitive di f sono della forma $F(z) + k$, $k \in \mathbb{C}$ (cioè F , se esiste, è unica a meno di una costante additiva). Infatti, se $F(z)$ è una primitiva di $f(z)$ nel dominio D , la funzione $F(z) + k$ è ancora una primitiva. D'altra parte, se $G(z) \in \mathcal{O}(D)$ e $G'(z) = f(z)$, si ha $(F(z) - G(z))' = 0$. Allora $F(z) - G(z)$ è localmente costante su D e, essendo D connesso, dal Teorema 2.5 segue che essa è costante (è lo stesso ragionamento che si fa per dimostrare che le funzioni potenziali di una forma differenziale lineare definita in un aperto connesso sono uniche a meno di una costante additiva).

L'olomorfia è condizione necessaria per l'esistenza di primitive:

Proposizione 2.4. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, U aperto di \mathbb{C} . Se $f(z)$ ammette primitive in U , allora è olomorfa in U .*

Dimostrazione. Se $F(z)$ è una primitiva di $f(z)$ in U , allora per definizione essa è olomorfa in U (e quindi anche di classe $C^\infty(U)$), e $F'(z) = f(z)$. Quindi $f(z)$ è olomorfa in U . \square

Teorema 2.9 (Teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni complesse). *i) Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Se F è una primitiva di f in D e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva regolare a tratti con sostegno contenuto in D , allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

In particolare, se γ è una curva chiusa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

che si trova subito separando $F(\gamma(t))$ nella sua parte reale e immaginaria (e ottenendo così la somma di due integrali di una funzione

di variabile reale) e applicando il Teorema fondamentale del calcolo integrale in \mathbb{R} . \square

Osserviamo che la dimostrazione del teorema precedente è simile a quella del teorema che afferma che *il lavoro di un campo vettoriale conservativo lungo una curva è uguale alla differenza di potenziale agli estremi della curva*.

Esempio 2.34. *Calcoliamo l'integrale proposto nell'Esempio 2.31. Ora, anziché usare la definizione di integrale, sfruttiamo il Teorema fondamentale del calcolo: essendo $F(z) = \frac{z^2}{2}$ una primitiva di $f(z) = z$ in tutto \mathbb{C} , si ha*

$$\int_{\gamma} z dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{(1+i)^2}{2} - 0 = i.$$

Esempio 2.35. *Consideriamo $\int_{\gamma} z^n dz$, $n \neq -1$, dove γ è la circonferenza di centro O e raggio R . Dai calcoli fatti nell'Esempio 2.33 (con $a = 0$) sappiamo che il valore dell'integrale è zero. Infatti, essendo la funzione $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ una primitiva di $f(z) = z^n$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ed essendo $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ chiusa, l'integrale assegnato è nullo. Questa conclusione qui segue dall'applicazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale in \mathbb{C} e non dal calcolo diretto (che usa la definizione di integrale curvilineo) utilizzato nell'Esempio 2.33.*

Esempio 2.36. *Consideriamo ora $\int_{\gamma} f(z) dz$ dove γ è la circonferenza di centro O e raggio R e $f(z) = \frac{1}{z}$; tale funzione è definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La funzione $F(z) = \log z$ è una primitiva di f , ma nell'insieme $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (semplicemente connesso). Poiché D non contiene γ , il Teorema 2.9 in questo caso non si può applicare. Inoltre abbiamo visto nell'Esempio 2.33) che l'integrale $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ vale $2\pi i \neq 0$.*

Osserviamo che $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ e, posto $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e

$v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, la forma differenziale $\omega = v(x, y) dx + u(x, y) dy$ è il famoso esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (si veda, per esempio, [9]).

L'esempio precedente mostra che l'olomorfia (è una condizione necessaria ma) non è una condizione sufficiente per l'esistenza di primitive.

Infatti $f(z) = \frac{1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma non ammette primitive in tale insieme.

Abbiamo osservato però che f ammette una primitiva nell'insieme (semplicemente connesso) $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

In effetti, vale il

Teorema 2.10. *Se $D \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso e se f è olomorfa in D , allora f ammette una primitiva in D .*

Talvolta questo teorema è chiamato *Teorema della primitiva globale*, per distinguere questo risultato da quello locale: data f olomorfa in un dominio D , essa ammette primitive in ogni sottoinsieme semplicemente connesso di D o, analogamente, una funzione olomorfa in un aperto ammette una primitiva "locale", definita in un intorno di un punto in cui la funzione è olomorfa.

Il teorema globale di esistenza della primitiva in generale è falso nei domini molteplicemente connessi (che incontreremo più avanti).

Per quanto riguarda la proprietà di semplice connessione del dominio D , in particolare, si ha il

Corollario 2.11. *Un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso se e solo se ogni funzione f olomorfa in D ammette una primitiva (olomorfa) in D .*

Sulla base di queste considerazioni possiamo sottolineare un'altra differenza tra il caso reale e il caso complesso: in analisi reale una funzione

continua è dotata di primitive e può non essere derivabile; in analisi complessa una funzione che ammette primitive è necessariamente olomorfa; inoltre, essa può essere derivabile in un aperto senza avere primitive in quell'aperto (come accade per la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$).

Anche in campo complesso si dimostra che vale la regola della integrazione per parti:

$$\int_{\gamma} f(z) g'(z) dz = f(z) g(z)_{\gamma} - \int_{\gamma} f'(z) g(z) dz.$$

Il problema delle primitive complesse può essere formulato anche dal punto di vista delle forme differenziali lineari. Infatti, se $f = u + iv$ è olomorfa in D e se $D \subseteq \mathbb{C}$ è semplicemente connesso, dalle condizioni di C - R segue che le forme differenziali $u dx - v dy$ e $v dx + u dy$ associate a $f(z)$ sono chiuse (il rotore dei campi vettoriali $\mathbf{F} = (u, -v)$ e $\mathbf{F} = (v, u)$ associati a tali forme differenziali è nullo), e quindi esatte, in D . Ma allora, $\forall z_0, z \in D$ l'integrale curvilineo di $f(z)$ lungo una curva congiungente z_0 e z non dipende dal cammino percorso ma solo dai punti iniziale e finale e, dunque, fissato z_0 , la funzione $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$ è una primitiva di $f(z)$ (una funzione potenziale per le forme differenziali), dove $\int_{z_0}^z f(w) dw$ (o anche $\int_{\gamma_{(z_0, z)}} f(w) dw$) denota l'integrale curvilineo di f lungo una qualunque curva $(\gamma_{(z_0, z)})$ avente punto iniziale z_0 assegnato e punto finale z qualunque.

Anche la proprietà appena descritta fa parte del teorema fondamentale del calcolo integrale in \mathbb{C} :

Teorema 2.12 (Teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni complesse). *ii) Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ continua e $z_0 \in D$; denotiamo con $\gamma_{(z_0, z)}$ una curva semplice regolare a tratti con punto iniziale z_0 e punto finale z .*

Se, $\forall z \in D$ e per ogni coppia di curve $\tilde{\gamma}$ e γ semplici e regolari a tratti con punto iniziale z_0 e punto finale z si ha

$$\int_{\tilde{\gamma}_{(z_0, z)}} f(w) dw = \int_{\gamma_{(z_0, z)}} f(w) dw,$$

allora la funzione

$$F(z) = \int_{\gamma(z_0, z)} f(w) dw$$

è una primitiva di f in D .

Ritorniamo alle curve equipotenziali di cui abbiamo parlato nell'Esempio 2.29: sia $F(z)$ una primitiva di $f(z)$ in D e supponiamo che $f(z)$ non si annulli in D ; se $F(z) = F(x + iy) = V(x, y) + iU(x, y)$ e $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, dalle espressioni della derivata di F si ricava $F'(z) = V_x + iU_x = U_y - iV_y$ e, imponendo che $F'(z) = f(z)$, si ha $V_x + iU_x = U_y - iV_y = u + iv$, da cui $\nabla U = (v, u)$ e $\nabla V = (u, -v)$. Questo ci dice che U e V sono i potenziali, rispettivamente, dei campi (v, u) e $(u, -v)$; le curve equipotenziali γ_1 e γ_2 definite dalle equazioni implicite (ricordiamo che $f(x + iy) = F'(x + iy) \neq 0$ in D) $U(x, y) = c$ e $V(x, y) = k$ non si intersecano necessariamente ma, negli eventuali punti di intersezione $x = x_0$ e $y = y_0$, poiché $\nabla U(x_0, y_0)$ è ortogonale a γ_1 e $\nabla V(x_0, y_0)$ è ortogonale a γ_2 , risulta che $\langle \nabla U(x_0, y_0), \nabla V(x_0, y_0) \rangle = 0$. Risulta, cioè, che le curve equipotenziali dei potenziali U e V sono mutuamente perpendicolari nei punti in cui si intersecano.

Il seguente teorema fornisce un criterio per stabilire se una funzione è olomorfa:

Teorema 2.13 (di Morera). *Sia D un dominio di \mathbb{C} e f continua in D . Se*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni curva chiusa γ regolare a tratti con sostegno contenuto in D , allora f è olomorfa in D .

Forniamo due dimostrazioni: una si rifà alle proprietà delle forme differenziali;²¹ l'altra è costruttiva: viene definita una primitiva F di f ,

²¹In genere, nella maggior parte dei testi vengono considerate forme differenziali lineari con campo vettoriale associato di classe C^1 nel dominio di definizione. Vale, però, il seguente risultato (per forme differenziali soltanto continue nel dominio): *una forma differenziale ω continua su un dominio D è esatta se e solo se $\int_{\gamma} \omega = 0$ per ogni curva γ chiusa, semplice, regolare a tratti contenuta in D . Come curve chiuse si considerano quasi*

che è proprio quella che compare nel Teorema 2.12.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in D$ e $B_r(z_0)$, $r > 0$, interamente contenuto in D . Supponiamo che per ogni curva chiusa γ regolare a tratti con sostegno contenuto in $B_r(z_0)$ si abbia $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$, cioè

$$\oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy) = 0.$$

Allora deve essere $\oint_{\gamma} (u dx - v dy) = 0$ e $\oint_{\gamma} (v dx + u dy) = 0$, da cui segue che le forme differenziali $u dx - v dy$ e $v dx + u dy$ sono esatte in $B_r(z_0)$. Per definizione, esiste dunque una funzione potenziale per ciascuna delle due forme differenziali, e questo equivale a dire che $f(z)$ è dotata di primitive in $B_r(z_0)$, e quindi è olomorfa in tale disco; per l'arbitrarietà di z_0 , f risulta olomorfa in tutto D . \square

L'importanza del Teorema di Morera è che esso dà una caratterizzazione delle funzioni olomorfe e non richiede la semplice connessione del dominio di definizione.

La seconda dimostrazione è la seguente:

Dimostrazione. Fissato $z_0 \in D$, consideriamo la funzione definita

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw, \quad z \in D;$$

$F : D \rightarrow \mathbb{C}$ è ben definita: infatti gli integrali $\int_{\gamma_{z_0, z}} f(w) dw$ dipendono, per ipotesi, solo dal punto iniziale e dal punto finale. Siano, infatti, γ_1 e γ_2 due curve qualunque contenute in D con punto iniziale z_0 e punto finale z , e definiamo la curva chiusa $\Gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$; allora si ha

$$0 = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Inoltre, $F(z)$ è olomorfa e si ha $F'(z) = f(z)$ in D , cioè $F(z)$ è una primitiva di $f(z)$. Infatti, dato $z \in D$, esiste una bolla $B_r(z)$, $r > 0$,

sempre delle poligonalì, spesso con i lati paralleli agli assi perché ciò equivale a considerare un intorno rettangolare del punto $z_0 \in D$ fissato. Inoltre, la conclusione vale anche nel caso in cui la curva non sia semplice: se ci sono delle autointersezioni, infatti, si può spezzare γ nell'unione di un numero finito di curve chiuse semplici.

interamente contenuta in D ; consideriamo un incremento Δz di z tale che $0 < |\Delta z| < r$; scegliamo come cammino da z a $z + \Delta z$ il segmento $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, parametrizzato da $t \mapsto z + t\Delta z$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(w) dw - \int_{z_0}^z f(w) dw \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(w) dw = \frac{1}{\Delta z} \int_\gamma f(w) dw = \frac{1}{\Delta z} \int_0^1 f(z + t\Delta z) \Delta z dt \end{aligned}$$

da cui, passando al limite per $\Delta z \rightarrow 0$ (essendo f continua²²), si trova $F'(z) = f(z)$ in $B_r(z)$ e, per l'arbitrarietà di z , in tutto D .

Allora f coincide con la derivata di una funzione olomorfa e quindi è anch'essa olomorfa.

□

Osserviamo che la seconda dimostrazione è analoga a quella che prova che data una forma differenziale ω in un aperto connesso tale che per ogni coppia di curve regolari a tratte contenute nel dominio di ω aventi stessi punto iniziale e finale gli integrali curvilinei di ω lungo le due curve sono uguali, allora ω è esatta (si veda, per esempio, [9]).

Il Teorema di Morera può essere considerato come l'inverso del Teorema di Cauchy.

2.12 Teoremi di Cauchy

Osserviamo prima di tutto che esistono molte formulazioni del Teorema di Cauchy, che differiscono dal punto di vista topologico o analitico.

Ricordiamo che quando si parla di curve chiuse si sottintende che siano curve semplici e percorse in verso antiorario.

²²Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è lecito grazie alla continuità di f (si veda, per esempio, [6], pag.156); per rendere il passaggio più esplicito, però, si potrebbe porre $f = u + iv$, $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$, ed esprimere $\int_0^1 f(z + t\Delta z) dt = u(z + \theta_u \Delta z) + iv(z + \theta_v \Delta z)$, con $\theta_u, \theta_v \in [0, 1]$; ora, essendo f continua lo sono anche u e v e passando al limite per $\Delta z \rightarrow 0$ si trova che $u(z + \theta_u \Delta z) + iv(z + \theta_v \Delta z)$ tende a $u(z) + iv(z) = f(z)$.

Tra le varie formulazioni del Teorema di Cauchy, ce ne sono due che si distinguono fondamentalmente per il tipo di ipotesi. Il Teorema afferma che, data una funzione f olomorfa in un aperto U , se

a) γ è una curva chiusa regolare a tratti il cui interno è contenuto in U

oppure

b) U è semplicemente connesso e γ è una curva chiusa regolare a tratti contenuta in U

allora $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Facciamo alcune precisazioni: nell'ipotesi a) si parla di "interno" di γ , e quindi si sta sottintendendo che si tratta di una curva di Jordan; il **Teorema di Jordan** infatti afferma: *una curva di Jordan (chiusa, semplice e piana) divide il piano in due insiemi aperti connessi disgiunti, uno limitato (detto interno alla curva) e l'altro illimitato (detto esterno alla curva)*. In particolare, il complementare della curva in questione C , $\mathbb{R}^2 \setminus C$, ha due componenti connesse e la curva è frontiera di entrambe.

Osserviamo anche che se U è semplicemente connesso, allora ogni curva chiusa regolare a tratti contenuta in U ha interno contenuto in U ,²³ e quindi se si dimostra il teorema sotto l'ipotesi b), esso è dimostrato anche sotto l'ipotesi a). In ogni caso, daremo due dimostrazioni separate.

Il teorema seguente contiene un'ipotesi di tipo a):

Teorema 2.14 (Primo teorema (o teorema integrale) di Cauchy).
Siano D un dominio limitato con frontiera ∂D una curva di Jordan

²³In realtà per un insieme U nel piano si può dare questa come definizione di insieme semplicemente connesso: $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso è semplicemente connesso se ogni curva di Jordan con sostegno contenuto in U ha interno contenuto in U .

regolare o regolare a tratti, e $f : D \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$.²⁴ Allora

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 0,$$

dove $\partial^+ D$ indica la frontiera di D percorsa positivamente (senso antiorario).²⁵

L'Esempio 2.33 mostra che, se f non è olomorfa, il teorema precedente non vale: in quel caso f è olomorfa dentro il cerchio di raggio r , tranne nel centro a del cerchio.

Dal calcolo diretto (Esempio 2.33 con $n = -1$ e $a = 0$) e anche dal teorema appena enunciato segue che, essendo la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$ olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\oint_{\gamma^+} \frac{1}{z} dz \neq 0$ per ogni curva chiusa γ contenente l'origine e percorsa in verso antiorario.

La seguente formulazione, differente dalla precedente, rientra nel caso dell'ipotesi b); essa è detta, spesso, *formulazione classica*:

Teorema 2.15 (Teorema di Cauchy). *Siano $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso e $f \in \mathcal{O}(U)$. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (2.18)$$

per ogni coppia di curve γ_1, γ_2 regolari a tratti con sostegno contenuto in U , aventi stesso punto iniziale e finale. In particolare $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ per ogni curva chiusa γ regolare a tratti contenuta in U .

²⁴Alcuni testi esprimono questa condizione richiedendo che $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$; poiché le funzioni olomorfe sono definite in un aperto, richiedere che f sia olomorfa fino alla chiusura di D significa dire che, preso un qualunque punto z su ∂D , esiste un intorno di z in cui f è olomorfa. Pertanto, fare questa richiesta equivale a dire che la curva ∂D sia interamente contenuta in un aperto in cui f è olomorfa.

Quindi il teorema può essere enunciato richiedendo (appunto come dice l'ipotesi a) che f sia olomorfa in un aperto e l'integrale curvilineo sia esteso a una qualunque curva di Jordan con interno contenuto in tale aperto (cioè a una curva di Jordan che, a sua volta, è frontiera di un dominio limitato interamente contenuto in D).

²⁵La frontiera di un dominio piano D è percorsa positivamente se, descrivendola (cioè immaginando di camminarci sopra), si lasciano i punti del dominio a sinistra.

L'Esempio 2.33 con $n = -1$ mostra che il teorema di Cauchy (classico) non è valido se U non è semplicemente connesso (nell'esempio $U = \mathbb{C} \setminus \{a\}$).

Dimostriamo il Teorema di Cauchy 2.15 (con l'ipotesi di "tipo" b)):

Dimostrazione. Siano $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ e $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$; si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy;$$

essendo f olomorfa in U , valgono le condizioni di $C-R$ $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, da cui risulta che le forme differenziali $u dx - v dy$ e $v dx + u dy$ sono chiuse in U ; perciò, dato che U è semplicemente connesso e che $u, v \in C^1(U)$, tali forme differenziali sono anche esatte e l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ dipende solo dai punti iniziale e finale di γ , cioè vale la (2.18). In particolare $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ se γ è chiusa. \square

La dimostrazione del Teorema 2.14 (con ipotesi di tipo a)) non è altro che un corollario del teorema di Gauss-Green nel piano.²⁶

Dimostrazione. Applicando la formula di Gauss-Green alla parte reale e alla parte immaginaria dell'integrale si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} f(z) dz &= \int_{\partial^+ D} u dx - v dy + i \int_{\partial^+ D} v dx + u dy \\ &= \iint_D [-v_x - u_y + i(u_x - v_y)] dx dy, \end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale è nullo perché valgono le equazioni di $C-R$. \square

Dall'ultima dimostrazione segue che

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = \iint_D [-v_x - iv_y + iu_x - u_y] dx dy$$

²⁶Il Teorema di Gauss-Green nel piano afferma: *dato un dominio D limitato la cui frontiera ∂D è una curva di Jordan regolare a tratti, se $\mathbf{F} = (P, Q)$ è un campo vettoriale di classe $C^1(\bar{D})$, allora vale la formula*

$$\int_{\partial^+ D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy,$$

dove $\partial^+ D$ indica la frontiera di D percorsa positivamente.

$$\begin{aligned}
&= \iint_D [-(v_x + iv_y) + i(u_x - \frac{1}{i}u_y)] dx dy = \iint_D [-(v_x + iv_y) + i(u_x + iu_y)] dx dy \\
&= \iint_D \left[-2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) v + 2i \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) u \right] dx dy \\
&= \iint_D 2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(u - \frac{1}{i}v \right) dx dy = 2i \iint_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + iv) dx dy.
\end{aligned}$$

Riassumendo, l'integrale di partenza può essere scritto utilizzando l'operatore formale $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 2i \iint_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u + iv) dx dy,$$

formula che può essere considerata la forma complessa della formula di Gauss-Green. Il teorema di Cauchy in tal caso risulta direttamente da questa formula.

In entrambe le dimostrazioni del Teorema di Cauchy (nelle due formulazioni) è stato usato il fatto (già anticipato in precedenza) che una funzione olomorfa in un dato insieme U aperto è anche analitica in tale insieme (in particolare il fatto che f olomorfa in U è di classe $C^1(U)$, cioè che la derivata $f'(z)$ di $f(z)$ è continua, e quindi che u e v sono di classe C^1).

Nella dimostrazione del Teorema 2.15 si è usato il fatto che u e v sono di classe C^1 in U , e nella dimostrazione del Teorema 2.14 il fatto che le componenti del campo vettoriale \mathbf{F} sono di classe $C^1(\bar{D})$. In realtà, però, il Teorema di Cauchy può essere dimostrato anche senza supporre la continuità della derivata di f ; la dimostrazione, con questa ipotesi più debole, è dovuta a Goursat²⁷ e il teorema in questo caso è detto *Teorema di Cauchy con le ipotesi minime* o, anche, *Teorema di Cauchy-Goursat*.²⁸

²⁷Si, veda, per esempio [1], pag. 109. Altre osservazioni di carattere storico riguardanti le ipotesi del Teorema di Cauchy si trovano in [8], pag. 163. In [1], pag. 141 si trova la formulazione generale del Teorema di Cauchy, dato in termini di curve *omologhe* a zero in un insieme aperto.

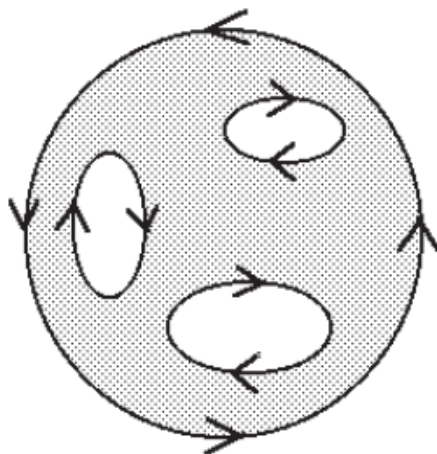
²⁸La dimostrazione fornita da Goursat prova il teorema prima nel caso in cui la curva a cui è esteso l'integrale sia una poligonale (spesso si considera un rettangolo) e poi estende il risultato al caso di una generica curva regolare a tratti.

Vogliamo ora estendere il Teorema di Cauchy a domini più generali di quelli finora considerati.

Abbiamo già dato la definizione di dominio semplicemente connesso; consideriamo ora un dominio $D \subset \mathbb{C}$ limitato; esso è semplicemente connesso se il suo bordo ∂D è un insieme connesso (o, anche, se il suo complementare non ha componenti connesse compatte).

Si chiama **molteplamente (o multiplamente) connesso** un dominio limitato D la cui frontiera ∂D sia un insieme non connesso. Il numero delle componenti connesse di ∂D , se finito, si chiama **ordine di connessione** di D ; se il numero di tali componenti è infinito il dominio si dice **infinitamente connesso**.

Abbiamo visto che il teorema di Cauchy, nella forma che abbiamo chiamato classica, non vale se il dominio D non è semplicemente connesso. Nella prima formulazione, invece, si considera un dominio non semplicemente connesso richiedendo l'ipotesi $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$; in tal caso il teorema di Gauss-Green, che si userebbe per la dimostrazione, vale anche per i domini molteplamente connessi (si veda in [9], per esempio, la dimostrazione della formula di Gauss-Green per domini "semplicemente decomponibili"). Un esempio di tale insieme è dato da un dominio con dei "buchi", come quello rappresentato nella figura sottostante.



In tal caso la frontiera del dominio D è formata dall'unione di un numero finito di curve chiuse $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ (quattro nel caso della figura). La

frontiera orientata positivamente (indicata sempre con $\partial^+ D$) si ottiene orientando le curve in modo tale che, percorrendole, il dominio rimanga alla sinistra del verso percorso (la curva “esterna” verrà allora percorsa in senso antiorario, e quelle “interne” in senso orario).

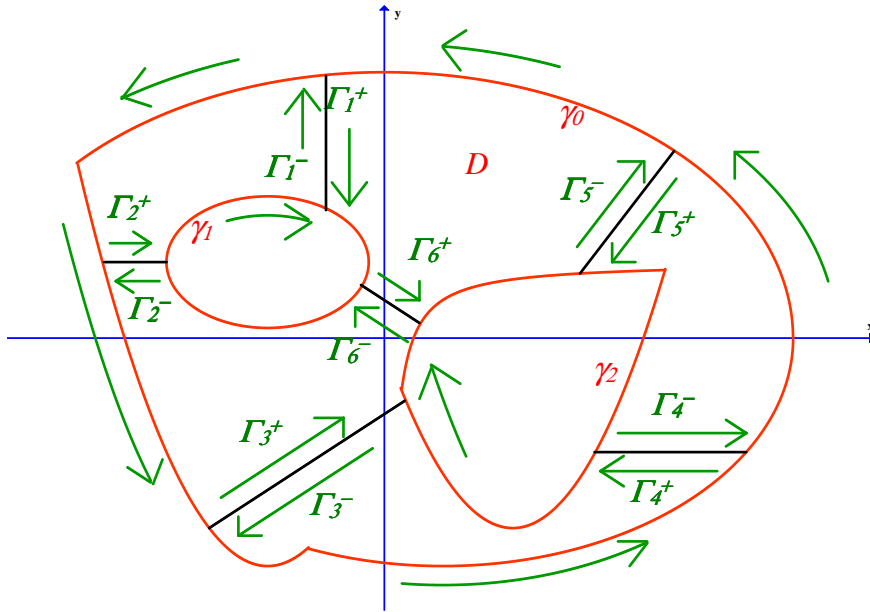
Dimostriamo il teorema di Cauchy nel caso di domini molteplicemente connessi con ordine di connessione finito; talvolta si parla anche di cosiddetti **domini regolari a un sol contorno** (domini limitati la cui frontiera è una curva di Jordan regolare a tratti) e di **domini regolari a più contorni** (domini limitati ottenuti togliendo da un dominio limitato a un sol contorno un numero finito di domini regolari a un sol contorno chiusi e disgiunti).

Teorema 2.16 (Teorema di Cauchy per domini regolari a più contorni). *Sia D un dominio limitato con frontiera $\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, dove γ_i , $i = 0, 1, \dots, k$, è una curva di Jordan regolare a tratti, e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$.²⁹ Allora*

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Colleghiamo le componenti di ∂D con un numero finito di tagli, cioè con dei segmenti $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ che uniscano le componenti interne al dominio $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ con la componente esterna γ_0 (come rappresentato nella figura qui sotto: in questo caso $n = 6$ e $k = 2$). Per comodità, si potrebbero operare i tagli con segmenti paralleli agli assi cartesiani.

²⁹ Anche in questo caso, per non dover richiedere espressamente che $f \in C^1(\overline{D})$ si può richiedere che f sia olomorfa in un aperto contenente il dominio D .



Si ottiene così che il dominio D ha ora per frontiera la curva chiusa

$$\Gamma := \partial D \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$$

e perciò, esso è ora semplicemente connesso (il suo bordo Γ è omotopo a una curva costante, cioè a un punto). Quindi, per il Teorema di Cauchy già enunciato, si ha

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Inoltre, in Γ i segmenti $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ vengono percorsi due volte, una volta in un senso (chiamiamolo $+$) e una volta nel senso opposto (chiamiamolo $-$), dunque si avrà

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\partial^+ D} f(z) dz + \int_{\Gamma_1^+ \cup \dots \cup \Gamma_n^+} f(z) dz + \int_{\Gamma_1^- \cup \dots \cup \Gamma_n^-} f(z) dz \\ &= \int_{\partial^+ D} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz + \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f(z) dz = 0, \end{aligned}$$

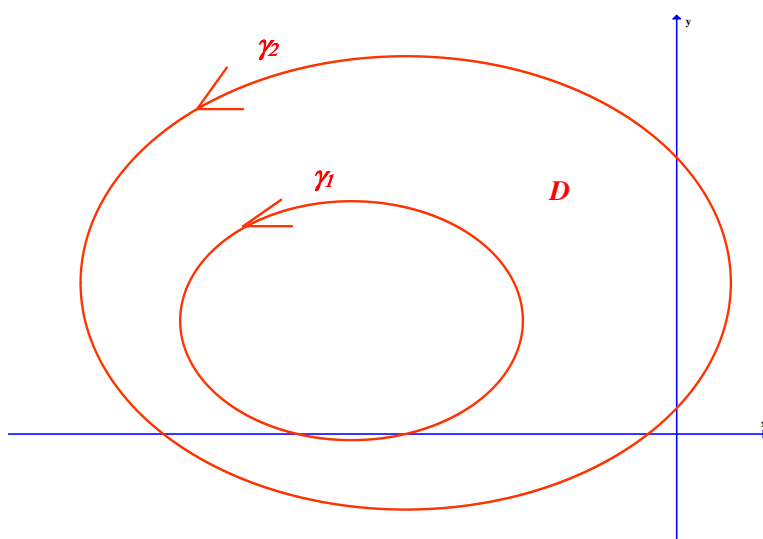
in quanto gli ultimi due integrali nel secondo passaggio si elidono perché sono uguali ed opposti. \square

Il teorema appena dimostrato ha un'importante conseguenza:

Teorema 2.17 (di Cauchy per circuiti equivalenti³⁰). Siano γ_1 e γ_2 due curve di Jordan, tali che γ_1 sia contenuta nell'interno di γ_2 , e sia D il dominio limitato che ha per frontiera "interna" γ_1 e per frontiera "esterna" γ_2 . Se $f : D \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$ ³¹, allora

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz,$$

dove γ_1 e γ_2 hanno lo stesso verso di percorrenza (supponiamo entrambe il verso antiorario, come nella figura qui sotto).



Dimostrazione. Dal Teorema 2.16, essendo il nostro D un dominio molteplicemente connesso (con ordine di connessione 2), si ha

$$\int_{\partial^+ D} f(z) dz = 0,$$

dove $\partial^+ D$ è data dall'unione $\gamma_1 \cup \gamma_2$, con γ_1 percorsa in verso orario e γ_2 percorsa in verso antiorario. Poiché

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = - \int_{-\gamma_2} f(z) dz,$$

segue facilmente la tesi. □

³⁰A volte tale teorema è chiamato anche *Teorema di Cauchy per curve omotope*.

³¹Anche per la formulazione di questo teorema nell'ipotesi talvolta si considera f olomorfa in un certo aperto U contenente D (e quindi in tal caso non occorre richiedere che f sia di classe C^1 fino alla chiusura di D).

Dovendo quindi calcolare l'integrale di una funzione f olomorfa lungo una curva chiusa, possiamo cambiare la curva (per esempio nel caso in cui la “forma” della curva sia molto complicata) e sceglierne un'altra, interna a quella di partenza, purché essa appartenga al dominio in cui f è olomorfa (il teorema appena dimostrato non è altro che la proprietà di invarianza rispetto a deformazioni della traiettoria per campi vettoriali irrotazionali [9]).

Questo ci fa pensare che la conoscenza di una funzione $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$ sulla frontiera ∂D del dominio D implichi in qualche modo la conoscenza della funzione all'interno di D (effettivamente è così, come si vedrà dalla formula integrale di Cauchy).

Osserviamo anche che la situazione effettivamente interessante in cui il teorema precedente può essere applicato è quello in cui l'aperto U in cui f è definita (che contiene D) non sia semplicemente connesso e l'interno di γ_2 (la curva interna) non sia contenuto in U . In tal caso i due integrali sono uguali tra loro ma in generale non sono nulli. Se, invece, l'interno di γ_1 è contenuto nell'interno di γ_2 che a sua volta è contenuto in U , allora ciascuno degli integrali è nullo per il Teorema di Cauchy.

Osservazione 2.2. *Il teorema integrale di Cauchy può essere formulato, oltre che in termini di curve omotope, anche in termini di curve omologhe: per esempio, in [1], pag. 141; qui l'enunciato riguarda un qualunque ciclo (per la definizione si veda pag. 138), cioè una curva chiusa non semplice, omologa a zero; un ciclo γ contenuto in un aperto U viene detto **omologo a zero** rispetto a U se $n(\gamma; z) = 0$ per tutti i punti $z \in U^C$, dove $n(\gamma; z)$ (che noi definiremo più avanti) è l'indice del punto z rispetto alla curva chiusa γ (si veda [1], pag. 114; diversamente da come fa la maggior parte dei testi, [1] definisce l'indice di un punto rispetto a una curva anziché l'indice di una curva rispetto a un punto).*

Teorema 2.18 (Secondo teorema di Cauchy o formula integrale di Cauchy). *Siano D un dominio limitato con frontiera ∂D una curva di*

Jordan regolare a tratti, e $f : D \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \forall z_0 \in D, \quad (2.19)$$

dove $\partial^+ D$ indica la frontiera di D percorsa positivamente (senso antiorario).

La formula (2.19) è detta **formula integrale di Cauchy** e l'integrale a secondo membro della formula è detto **integrale di Cauchy**.

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che il disco $B_r(z_0)$ sia interamente contenuto in D . Posto $D_r = D \setminus \overline{B_r(z_0)}$, si ha che la funzione $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \in \mathcal{O}(D_r) \cap C^1(\overline{D_r})$ in quanto rapporto di due funzioni olomorfe il cui denominatore è non nullo (in effetti g è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$). Dunque vale il teorema di Cauchy per i domini molteplicemente connessi, cioè si ha

$$\int_{\partial^+ D_r} g(z) dz = 0.$$

La frontiera ∂D_r è costituita da ∂D e dalla circonferenza $\partial B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| = r\}$, orientata in senso orario. Quindi

$$\int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\partial^- B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

dove $\partial^- B_r(z_0)$ indica il bordo del disco percorso in senso orario. Si ricava allora

$$\int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial^+ B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(per arrivare a questo punto avremmo potuto applicare direttamente il Teorema di Cauchy per circuiti equivalenti); osserviamo che quest'ultima relazione vale $\forall r > 0$ (e quindi a maggior ragione vale per r più piccoli), e che il primo membro non dipende da r , quindi

$$\int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial^+ B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz; \quad (2.20)$$

Parametizziamo $\partial^+ B_r(z_0)$: $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. Si trova

$$\int_{\partial^+ B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt;$$

essendo f olomorfa in D , passando al limite per $r \rightarrow 0$ si ha

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} f(z_0) dt = 2\pi i f(z_0). \end{aligned}$$

Confrontando questo risultato con la (2.20) si ottiene la formula integrale di Cauchy.

□

Anche di questo teorema esiste un'altra formulazione con l'ipotesi di semplice connessione del dominio di olomorfia:

Teorema 2.19 (Secondo teorema di Cauchy o (prima) formula integrale di Cauchy). *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(U)$, dove U è un aperto semplicemente connesso. Allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

dove γ è una qualunque curva di Jordan regolare a tratti contenuta in U e z_0 è interno a γ .

Anche il Teorema 2.18 vale se nella formula l'integrale è esteso a una qualunque curva di Jordan regolare a tratti contenuta nel dominio e con interno contenuto nel dominio, oppure può essere formulato per una funzione olomorfa in un aperto contenente il dominio D .

Se si considerano curve non semplici, la formula integrale di Cauchy può essere formulata anche in termini dell'**indice** (o **indice di avvolgimento**) della curva. Data una curva chiusa γ regolare a tratti ed un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ non appartenente al sostegno di γ , l'indice (di avvolgimento) di γ rispetto a z_0 (o attorno a z_0) è dato da

$$\text{ind}(\gamma; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

L'indice viene denotato anche con $I(\gamma, z_0)$ o con $n(\gamma, z_0)$.

Si dimostra che l'indice di una curva chiusa attorno a un punto è un

numero intero, che conta il numero di volte che la curva gira in senso antiorario attorno a tale punto; se i giri vengono considerati in senso orario invece che antiorario, tale numero è negativo (si ha $\text{ind}(-\gamma; z_0) = -\text{ind}(\gamma; z_0)$); l'indice è una funzione di z_0 .

Si dimostra anche che due curve omotope in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ hanno lo stesso indice.

Un metodo grafico per calcolare l'indice di avvolgimento di γ rispetto a z_0 è quello di tracciare una semiretta uscente dal punto z_0 in modo tale che essa non sia mai tangente alla curva né passante per uno dei suoi punti multipli; contando il numero delle volte che la semiretta interseca la curva, considerando positive le intersezioni nei tratti di curva percorsi in senso antiorario e negative quelle nei tratti percorsi in senso orario si ottiene $I(\gamma, z_0)$.

Nel caso particolare di curve chiuse semplici (curve di Jordan) l'indice è costante in entrambe le regioni (limitata e illimitata) determinate dalla curva: l'indice è 0 se z_0 appartiene all'esterno di γ , mentre è 1 o -1 se z_0 appartiene all'interno di γ e γ è orientata in senso antiorario o, rispettivamente, in senso orario.

Con questa precisazione, la formula integrale di Cauchy (per curve non necessariamente semplici) si esprime nella forma

$$I(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \forall z_0 \in D \setminus \{\gamma\}. \quad (2.21)$$

Osserviamo che se, nelle condizioni del Teorema 2.18, il punto z_0 fosse esterno a \overline{D} , dal primo teorema di Cauchy, essendo $\frac{f(z)}{z - z_0}$ olomorfa in D e di classe C^1 in \overline{D} , si avrebbe

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Quindi possiamo riassumere questi risultati ponendo

$$\int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & \text{se } z_0 \in D, \\ 0 & \text{se } z_0 \in \text{Est}(D), \end{cases}$$

dove $\text{Est}(D)$ indica l'insieme dei punti esterni a D . Se invece $z_0 \in \partial D$, la funzione integranda diventa illimitata. Nel caso particolare in cui $f(z) \equiv 1$ si ritrova il risultato dell'Esempio 2.33 con $n = -1$:

$$\int_{\partial^+ D} \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } z_0 \in D, \\ 0 & \text{se } z_0 \in \text{Est}(D). \end{cases}$$

La (2.21) quando $I(\gamma, z_0) = 1$ riconduce nuovamente alla formula

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

detta anche **formula di rappresentazione** perché permette di calcolare $f(z_0)$ quando i valori di $f(z)$ su γ sono noti. Si ha cioè che i valori di $f(z)$ sulla curva γ determinano (tramite l'integrale a secondo membro che contiene z_0 come una sorta di parametro) il valore di f nel generico punto z_0 interno a γ .

Quindi la formula integrale di Cauchy traduce il fatto che i valori di una funzione olomorfa in un dominio D risultano univocamente determinati dai valori assunti dalla funzione sulla frontiera ∂D ³²; ciò distingue le funzioni derivabili in senso complesso dalle funzioni derivabili in senso reale. Infatti, come vedremo più avanti, due funzioni olomorfe che coincidono sulla frontiera di un dato dominio devono coincidere in tutti i punti interni al dominio, cosa che non è vera per le funzioni derivabili in senso reale.

Nella formula di rappresentazione possiamo attribuire a z_0 diversi valori se l'indice di z_0 rispetto a γ continua a rimanere 1 (come nei casi considerati precedentemente), e quindi si può trattare z_0 come una variabile

³²Ricordando che se $f(= u + iv) \in \mathcal{O}(D)$ u e v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, questo fatto può essere interpretato dal punto di vista di problemi al contorno per equazioni differenziali alle derivate parziali: determinare u e v tali che $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ in D e tali che su ∂D $f = u + iv$ abbia valori assegnati: in base alla formula integrale di Cauchy tale problema ha al più una soluzione.

Un fenomeno simile, come abbiamo visto, avviene anche per l'equazione di Laplace ma, mentre per l'equazione $\Delta u = 0$ si riesce a determinare una rappresentazione esplicita della soluzione di un problema a valori sul bordo solamente per alcuni domini particolari (tra cui il cerchio e il semipiano), invece la formula integrale di Cauchy vale per qualunque dominio D che abbia come frontiera una curva chiusa regolare a tratti.

e, cambiando notazione, ottenere la formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

che è più facilmente riconoscibile come formula di “rappresentazione”.

In particolare, se nella formula integrale di Cauchy si prende come frontiera del dominio ∂D una circonferenza di centro z_0 e raggio r (oppure si considera una qualunque circonferenza di centro z_0 e raggio r contenuta in D), come mostrato nella dimostrazione del Teorema 2.18 si ha $z - z_0 = re^{it}$, da cui $dz = ire^{it}dt = i(z - z_0)dt$ e, sostituendo, la formula integrale di Cauchy in tal caso diventa

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

che può essere interpretata come una formula di valor medio: *se una funzione f è olomorfa in un cerchio e di classe C^1 fino al bordo del cerchio (o, più in generale, se è olomorfa in un dominio che contiene la bolla chiusa di centro z_0 e raggio r), allora il valore di f nel centro del cerchio è il valor medio di f sul bordo del cerchio (cioè la media integrale dei valori sul bordo del cerchio). Tale corollario della formula integrale di Cauchy è detto *Teorema della media di Gauss* o semplicemente *Teorema della media* o *formula della media*.*

Una grande differenza tra il caso reale e il caso complesso riguarda le derivate di ordine superiore di una funzione olomorfa. Vale il

Teorema 2.20. *Sian $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Se $f \in \mathcal{O}(U)$ allora $f' \in \mathcal{O}(U)$.*³³

Dimostrazione. Fissato $z \in U$, sia $B_r(z) = B$ contenuta strettamente in U . Dalla formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi;$$

³³Il fatto che una funzione olomorfa in un dominio abbia derivata ancora olomorfa nello stesso dominio si può dimostrare anche in modi differenti (si veda, per esempio, [10], pag. 208).

derivando e sfruttando l'olomorfia di f , cioè il fatto che $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}$ (f dipende solo da z e non da \bar{z}), si ricava

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_{\partial+B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+B} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \end{aligned}$$

dove il passaggio di derivazione sotto il segno di integrale è lecito dato che non riguarda la variabile di integrazione ed essendo la funzione $z \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ di classe C^∞ (dato che ξ varia sul bordo della bolla e z è il centro della bolla). Da quest'ultima formula segue che f' è continua (essendo una funzione integrale, o applicando direttamente la definizione di continuità); inoltre si ha

$$\frac{\partial f'}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial+B} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = 0,$$

essendo la funzione integranda olomorfa in z su B . Quindi, dalla Definizione 2.3 risulta che anche f' è olomorfa su B e, per l'arbitrarietà di z , è olomorfa in U . \square

Applicando ripetutamente questo teorema alle derivate successive di f si dimostra la seguente

Proposizione 2.5. *Una funzione olomorfa f su un aperto U è di classe $C^\infty(U)$.*

Dunque la derivata di un qualunque ordine di una funzione olomorfa è una funzione olomorfa. La proposizione precedente non è vera nel campo reale.

Esempio 2.37. *La funzione (reale di variabile reale) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$, che è derivabile in \mathbb{R} ma la cui derivata seconda non esiste in $x = 0$.*

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è di classe $C^n(\mathbb{R})$ ma non è derivabile $n + 1$ volte nell'origine.

Per le funzioni $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto, esiste in effetti una gerarchia di regolarità : si ha

$$C(U) \supset C^1(U) \supset C^2(U) \supset \dots \supset C^k(U) \supset \dots C^\infty(U).$$

In \mathbb{C} , invece, non esiste una “via di mezzo” di regolarità: una funzione definita in un aperto è derivabile infinite volte, oppure non lo è nemmeno una volta.

Procedendo per induzione su n e usando il secondo teorema di Cauchy si dimostra anche il

Teorema 2.21 (Seconda formula integrale di Cauchy). *Siano D un dominio limitato la cui frontiera ∂D è una curva di Jordan regolare a tratti, e $f : D \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\overline{D})$. Allora*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \forall z_0 \in D, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.22)$$

dove $\partial^+ D$ indica la frontiera di D percorsa positivamente.

Naturalmente, in base al Teorema di Cauchy per circuiti equivalenti, il Teorema 2.21 continua a valere se, anziché esteso a $\partial^+ D$, si considera l'integrale lungo una qualunque curva chiusa semplice regolare a tratti γ con sostegno contenuto in D (in particolare una circonferenza di centro z_0 e raggio r). Più in generale, se γ non è semplice, si avrà

$$I(\gamma, z_0) f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \forall z_0 \in D \setminus \{\gamma\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La formula (2.22) si ottiene derivando n volte rispetto a z la formula di rappresentazione; dalla (2.22) per $n = 0$ si riottiene, ovviamente, la formula integrale di Cauchy.

2.13 Serie di potenze

Una **serie numerica complessa** è una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}. \quad (2.23)$$

La definizione di convergenza (semplice o ordinaria) di tale serie con somma s è esattamente la stessa che si dà per serie numeriche in campo reale.

La serie (2.23) si dice **assolutamente convergente** se è convergente la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. La convergenza assoluta implica la convergenza ordinaria.

Una **serie di potenze complesse** è una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k, z_0 \in \mathbb{C}. \quad (2.24)$$

L'insieme di convergenza di serie di questo tipo si chiama **cerchio di convergenza** e il raggio r di tale cerchio è detto **raggio di convergenza**. La serie (2.24) converge dunque assolutamente in $|z - z_0| < r$, non converge in $|z - z_0| > r$, mentre per il caso $|z - z_0| = r$ non si può dire nulla in generale, ma occorre analizzare la situazione caso per caso.

Le serie di potenze possiedono importanti proprietà (si veda [9], Cap. 3): esse convergono uniformemente in ogni cerchio chiuso (bordo compreso) che ha raggio strettamente minore del raggio di convergenza; la somma $f(z)$ di una serie di potenze è continua nel cerchio di convergenza; anzi, si dimostra che è derivabile in senso complesso e che la sua derivata è continua; di più, essa è di classe C^∞ in $|z - z_0| < r$. La somma della serie ottenuta derivando k volte termine a termine la serie di partenza coincide con la derivata k -esima $f^{(k)}(z)$ della somma della serie data (vale lo scambio delle serie con la derivata e anche lo scambio della serie con l'integrale). Esiste inoltre una relazione tra la somma $f(z)$ e i coefficienti della serie:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.25)$$

Il Teorema di Abel, infine, afferma che (consideriamo, per semplicità, il caso in cui $z_0 = 0$)

Teorema 2.22. *Sia $f(z)$ la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ in $|z| < \rho$, e sia $z_0 = \rho e^{i\theta_0}$, $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, un punto del bordo del cerchio di convergenza in cui la serie converge con somma S . Allora la serie data converge uniformemente in tutto il raggio che congiunge il centro del cerchio col punto z_0 e si ha*

$$\lim_{r \rightarrow \rho^-} f(re^{i\theta_0}) = S.$$

Abbiamo visto che la derivabilità per una funzione complessa implica l'esistenza delle derivate di qualunque ordine. L'olomorfia è in realtà caratterizzata dalla sviluppabilità in serie di potenze.

Ricordiamo che una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}$ aperto, si dice **analitica (in senso reale)** in un punto $x_0 \in U$ se essa (è di classe $C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$ e se) è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di x_0 , cioè se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

per qualche $r > 0$. Essa si dice analitica in U se è analitica in ogni punto di U .

Possiamo dare una definizione analoga nel campo complesso: una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, si dice **analitica nel punto** $z_0 \in U$ se essa è la somma di una serie di potenze in un intorno di z_0 , cioè se esiste $r > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r$$

(conosciamo la relazione tra f e gli a_k). Essa si dice **analitica in U** se è analitica in ogni punto di U .

Ricordiamo un altro importante risultato:

Teorema 2.23 (Principio di identità per le serie di potenze). *Se le somme di due serie di potenze di centro z_0 coincidono in un intorno di z_0 , allora le due serie coincidono (cioè sono la stessa serie).*

Dimostrazione. Siano $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ in $|z - z_0| < r$ e $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$ in $|z - z_0| < r$; se $f(z) = g(z)$ in $|z - z_0| < r$, essendo $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ e $b_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0) - g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = 0,$$

cioè $a_k = b_k \forall k \in \mathbb{N}$ in $|z - z_0| < r$ (essendo tutti i coefficienti di una serie di potenze univocamente determinati dalle derivate della funzione somma calcolate nel centro della serie stessa, come espresso dalla (2.25)). \square

Vale il

Teorema 2.24 (di analiticità delle funzioni olomorfe). *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora f è analitica in U se e solo se è olomorfa in U .*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia analitica in U . Allora, fissato $z_0 \in U$, esiste un disco $B_r(z_0) \subset U$ in cui si ha che $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Dalla teoria sulle serie di potenze, f è olomorfa in $B_r(z_0)$, e quindi in U .

Viceversa³⁴, sia f olomorfa in U , e sia $z_0 \in U$. Detta $\delta = \text{dist}(z_0, \partial U) = \inf_{z \in \partial U} |z_0 - z|$, indichiamo con γ_ρ la circonferenza centrata in z_0 e di raggio ρ , con $\rho < \delta$. Fissiamo ora $z \in B_\rho(z_0)$ (cioè $|z - z_0| < \rho$); dalla formula integrale di Cauchy risulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_\rho} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (2.26)$$

Poiché, per $w \in \gamma_\rho$, $|z - z_0| < |w - z_0| = \rho$, si ha (ricordando l'espressione della somma di una serie geometrica)

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}$$

³⁴L'implicazione "se f olomorfa in D allora f è analitica in D " talvolta è chiamata *Teorema di Goursat*. In altri casi è il Teorema 2.20 ad essere chiamato così.

$$= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

La serie ottenuta converge uniformemente su γ_ρ (pensando z e z_0 fissati interni al cerchio di convergenza di raggio ρ); quindi, sostituendo in (2.26) e utilizzando il teorema di integrazione per serie si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_\rho} f(w) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right\} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{+\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

cioè $f(z)$ è la somma di una serie di potenze nell'intorno di z_0 $B_\rho(z_0)$ e dove i coefficienti sono dati da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (2.27)$$

Quindi, segue che f è analitica in $B_\rho(z_0)$ e, per l'arbitrarietà di z_0 , anche in tutto U . \square

L'ultimo teorema afferma, dunque, che una funzione olomorfa in un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno (contenuto in U) di ogni punto $z_0 \in U$. Naturalmente, qualunque altro sviluppo in serie di potenze della funzione f coincide con lo sviluppo di Taylor. Il raggio di convergenza della serie è uguale alla distanza di z_0 dalla frontiera ∂U di U .

La formula (2.27) fornisce l'espressione dei coefficienti a_n e, usando anche la relazione (2.25), fornisce anche la formula integrale di Cauchy per le derivate di f .

Il Teorema 2.24 è falso nel caso di funzioni reali di variabile reale, come mostra il seguente:

Esempio 2.38. *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è analitica in zero. Infatti essa e tutte le sue derivate sono nulle in $x = 0$, pertanto la serie di MacLaurin di f in zero ha termini tutti nulli, e la sua somma è zero, e non coincide con la funzione data in nessun intorno dell'origine.

Citiamo alcuni sviluppi in serie notevoli nel campo complesso (che abbiamo già incontrato).

La funzione $f(z) = e^z$ è intera e quindi sviluppabile in serie di MacLaurin; essendo le derivate di e^z calcolate in zero uguali a 1, si trova la **serie esponenziale** :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Anche le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono olomorfe in \mathbb{C} , e valgono le **serie circolari**:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Le seguenti sono le **serie iperboliche**:

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Osserviamo nuovamente che anche i polinomi sono funzioni analitiche: per un polinomio $P(z)$ lo sviluppo in serie di potenze contiene solo un numero finito di termini non nulli (il numero di zeri di un polinomio è, infatti, al massimo pari al suo grado).

Effettivamente, dall'ultimo teorema segue anche il

Corollario 2.25. *Ogni funzione intera è la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza infinito.*

Ricordiamo anche la (ben nota) **serie geometrica**

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Valgono inoltre la **serie logaritmica**

$$\log(1 - z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1$$

e si estende al campo complesso anche la **serie binomiale**:

$$(1 + z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

$$= + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} z^3 + \dots, \quad |z| < 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

In modo analogo a come si fa nel caso reale si trovano anche gli sviluppi dell'arcotangente e dell'arcoseno.

In alcuni casi risulta utile usare lo sviluppo in serie di potenze per scrivere una formula di Taylor con un numero finito di termini e un opportuno resto, come per funzioni di variabile reale: se $f \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + o((z - z_0)^n) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

Per esempio, da

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2} z^2 + o(z^2) \quad \text{per } z \rightarrow 0$$

si ricava la stima asintotica (analogo a quella valida per $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$)

$$1 - \cos z \sim \frac{1}{2} z^2 \quad \text{per } z \rightarrow 0.$$

I moduli dei coefficienti a_n in (2.27) possono essere maggiorati: sfruttando la seconda formula integrale di Cauchy si ha

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\rho^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + \rho e^{i\theta})|}{\rho^n} d\theta$$

$$\leq \frac{1}{\rho^n} \max_{|w-z_0|=\rho} |f(w)|,$$

con $0 < \rho < \text{dist}(z_0, \partial U)$. Posto $M(\rho) = \max_{|w-z_0|=\rho} |f(w)|$, le relazioni

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \rho \in (0, \text{dist}(z_0, \partial U)),$$

sono dette **disuguaglianze di Cauchy**. In particolare, usando l'espressione dei coefficienti (2.25) si trova

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{\rho^n} \max_{|w-z_0|=\rho} |f(w)|,$$

detta **stima di Cauchy sulle derivate**³⁵.

Le funzioni intere finora incontrate sono le potenze a esponente intero positivo (e quindi i polinomi) e le cinque funzioni trascendenti elementari; esse sono tutte illimitate in \mathbb{C} . Per le funzioni intere limitate in \mathbb{C} vale il

Teorema 2.26 (di Liouville). *Se f è una funzione intera e limitata, allora è costante.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfa in \mathbb{C} , sia limitata, cioè esista $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tale che $|f(z)| \leq c \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Allora, per il Corollario 2.25:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.28)$$

(possiamo considerare lo sviluppo di f attorno a un punto qualunque) e, per la stima di Cauchy sulle derivate

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} c \quad \forall r > 0 \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0;$$

quando $r \rightarrow \infty$ il secondo membro tende a zero, quindi $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n > 0$ da cui, sostituendo nello sviluppo (2.28), si trova $f(z) = f(0) \quad \forall z \in \mathbb{C}$, cioè f è costante in \mathbb{C} . \square

³⁵Questa stima corrisponde al criterio di analiticità per funzioni analitiche reali (si veda [9])

Osserviamo che è valida anche l'implicazione inversa (che è banale). Il teorema di Liouville non è valido per le funzioni reali limitate di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Consideriamo, per esempio, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$; $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, è limitata ($0 < f(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$), ma non è costante.

Il fatto che le funzioni trascendenti elementari siano illimitate segue, in effetti, anche dal Teorema di Liouville, essendo esse funzioni intere e non costanti.

Il teorema di Liouville fornisce una semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra:

Corollario 2.27 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Un'equazione algebrica di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ammette almeno una radice (in campo complesso). Ovvero un polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi possiede almeno uno zero (in campo complesso).*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Consideriamo la funzione $\frac{1}{P(z)}$. Essa è intera e, poiché $\lim_{z \rightarrow +\infty} P(z) = \infty$, è limitata. Quindi per il teorema di Liouville tale funzione dovrebbe essere costante, da cui anche $P(z)$ dovrebbe esserlo, il che è assurdo, essendo $P(z)$ un polinomio di grado $n \geq 1$. \square

Ricordiamo che esistono diverse dimostrazioni del Teorema fondamentale dell'algebra, alcune di tipo topologico e altre di tipo algebrico.

2.14 Proprietà delle funzioni analitiche

Mostriamo ora alcune interessanti proprietà delle funzioni analitiche; tali proprietà si dimostrano proprio usando il fatto che una funzione analitica è sviluppabile in serie di potenze.

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, dove $D \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio e $f \in \mathcal{O}(D)$. Un punto z_0 è detto **zero** di f se $f(z_0) = 0$.

Dal fatto che $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ sappiamo che una funzione analitica può

non avere zeri. È utile avere informazioni sugli zeri di una funzione analitica escludendo il caso banale in cui $f \equiv 0$.

Se z_0 è uno zero di f e f è analitica in z_0 , cioè in un intorno di z_0 f si può esprimere come

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (2.29)$$

con $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, allora si ha $a_0 = f(z_0) = 0$.

Diciamo allora che z_0 è uno **zero di ordine** (o **molteplicità**) $n > 0$ se i primi n coefficienti dello sviluppo (2.29) sono nulli, cioè se

$$a_k = 0 \text{ per } k = 0, 1, \dots, n-1 \iff f^{(k)}(z_0) = 0 \text{ per } k = 0, 1, \dots, n-1$$

mentre $a_n \neq 0$, cioè $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Quindi, in un intorno di uno zero di ordine n lo sviluppo (2.29) diventa

$$f(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Gli zeri di un qualche ordine n si dicono zeri di **ordine finito**; uno zero che non sia di ordine finito si dice di **ordine infinito**.

Ci si chiede se una olomorfa (non identicamente nulla) possa avere uno zero di ordine infinito, come accade in campo reale (si pensi all'Esempio 2.38). La risposta è negativa; infatti vale la

Proposizione 2.6. *Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, dove $D \subseteq \mathbb{C}$ è un dominio e $f \in \mathcal{O}(D)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i) $\exists z_0 \in D$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $f^{(n)}(z_0) = 0$;*
- ii) f è nulla in un intorno di z_0 ;*
- iii) f è nulla in D .*

Dimostrazione. È subito evidente che *iii) \Rightarrow ii)*; anche *ii) \Rightarrow i)* è immediato: dal fatto che f è esprimibile come somma di una serie di potenze $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ in un intorno $B_r(z_0)$ di z_0 , $r > 0$, segue che $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Per chiudere il cerchio occorre mostrare che *i) \Rightarrow iii)*³⁶. Supponiamo

³⁶In [2] viene fornita un'altra dimostrazione di questa proposizione.

allora che $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, e sia $U = \{z \in D : f^{(n)}(z) = 0 \forall n\}$. Osserviamo che U è non vuoto, perché $z_0 \in U$. Inoltre, U è aperto: infatti, preso $z_1 \in U$, mostriamo che z_1 è punto interno. Per ipotesi $f^{(n)}(z_1) = 0 \forall n$ e, essendo $a_n = \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} = 0$, esiste un disco centrato in z_1 in cui

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1)^n \equiv 0, \quad z \in B_\epsilon(z_1)$$

per un certo $\epsilon > 0$; quindi $f(z)$ è nulla in $B_\epsilon(z_1)$ e $\forall z \in B_\epsilon(z_1)$ si avrà $f^{(n)}(z) = 0 \forall n$. Quindi $B_\epsilon(z_1) \subseteq U$, e U risulta aperto.

D'altra parte, U è anche chiuso, in quanto si può esprimere come intersezione di chiusi:

$$U = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in D : f^{(n)}(z) = 0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n;$$

ciascuno degli insiemi C_n infatti, $\forall n \in \mathbb{N}$ è chiuso in quanto controimmagine di un chiuso ($\{0\} \subset \mathbb{C}$) tramite la funzione continua $f^{(n)}$.

Essendo U non vuoto, aperto e contemporaneamente chiuso in D , ed essendo D connesso, $U \equiv D$, e quindi $f \equiv 0$ in D . \square

L'ultima proposizione ha un'importante conseguenza. Vale, infatti, la seguente

Proposizione 2.7. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio e $f \in \mathcal{O}(D)$ non identicamente nulla. Allora l'insieme degli zeri di f , \mathcal{Z}_f , è discreto, cioè, se non è vuoto, è costituito da punti isolati.³⁷*

Dimostrazione. Sia z_0 uno zero di f , cioè tale che $f(z_0) = 0$. Non essendo f identicamente nulla, esiste $k \geq 1$ tale che $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. In particolare, sia n il minimo per cui ciò vale (cioè z_0 è uno zero di ordine n). In un intorno di z_0 $B_r(z_0)$, $r > 0$, f è sviluppabile in serie di Taylor e si ha:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n}$$

³⁷Un punto $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$, si dice isolato se esiste un intorno $B_r(z_0)$, $r > 0$, che non contiene nessun altro punto di D diverso da z_0 .

da cui, posto $k - n = h$ e richiamando il nuovo indice k , si ha

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k$$

$$= (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots] = (z - z_0)^n g(z), \quad a_n \neq 0;$$

la serie $a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots$ è convergente in tale intorno $B_r(z_0)$ di z_0 , quindi la sua somma $g(z)$ è una funzione olomorfa (in particolare continua), e si ha $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = a_n \neq 0$; sempre per il fatto che $g(z)$ è olomorfa in tale intorno, essa si mantiene diversa da zero in tutto l'intorno di z_0 ; inoltre, poiché $(z - z_0)^n \neq 0$ per $z \neq z_0$ (cioè $(z - z_0)^n$ si annulla solo in $z = z_0$), si ha che esiste un intorno di z_0 in cui z_0 è l'unico zero per f , cioè \mathcal{Z}_f è costituito solo da punti isolati. \square

L'insieme degli zeri \mathcal{Z}_f di una funzione olomorfa in un dominio D non identicamente nulla è un insieme discreto. Non solo: esso è privo di punti di accumulazione appartenenti a D . Infatti, se per assurdo $z_0 \in D$ fosse un punto di accumulazione per \mathcal{Z}_f , allora esisterebbe una successione di elementi di \mathcal{Z}_f convergente a z_0 , e quindi, per la continuità di f , z_0 stesso sarebbe uno zero, contro l'ipotesi che ogni zero è isolato dai restanti.

La proprietà della funzione olomorfa f usata nella dimostrazione della Proposizione 2.7 talvolta è espressa come teorema, detto **Teorema degli zeri**: *se un punto z_0 è uno zero di una funzione f olomorfa in un intorno di z_0 e non identicamente nulla in tale intorno, allora esiste un intero positivo n tale che $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ in tale intorno, dove la funzione g è olomorfa e non nulla in tale intorno.*

L'intero n è univocamente determinato e si chiama **ordine** o **molteplicità** dello zero (come già definito prima, la molteplicità di uno zero z_0 di una funzione f olomorfa in z_0 non è altro che l'ordine della prima derivata $f^{(k)}(z_0)$ non nulla); se infatti, per assurdo, esistesse un altro \tilde{n} tale che $f(z) = (z - z_0)^{\tilde{n}} \tilde{g}(z)$, con $\tilde{g}(z)$ olomorfa e diversa da zero in un intorno di z_0 (per esempio con $\tilde{n} > n$), allora $g(z) = (z - z_0)^{\tilde{n}-n} \tilde{g}(z)$ avrebbe uno zero in $z = z_0$; da questa contraddizione segue dunque l'unicità dell'ordine n .

L'insieme degli zeri \mathcal{Z}_f di $f \in \mathcal{O}(D)$ è discreto e privo di punti di accumulazione in D , ma può accumularsi sul bordo di D . In analisi reale l'insieme degli zeri di una funzione derivabile può avere dei punti di accumulazione nei quali questa funzione resta derivabile. In analisi complessa, invece, gli zeri di una funzione olomorfa sono necessariamente isolati; l'insieme degli zeri non può avere dei punti di accumulazione nel dominio di olomorfia, ma sulla frontiera del dominio nel quale tale funzione è olomorfa.

Esempio 2.39. Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Essa è continua in zero: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$; è derivabile in zero: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ ma $f'(x)$ non è continua in zero: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste. La funzione $f(x)$ è definita in \mathbb{R} , ha uno zero in $x = 0$ che è punto di accumulazione per l'insieme di definizione di f .

La stessa funzione considerata in \mathbb{C}

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin \frac{1}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

non ha le stesse proprietà: $f(z)$ non è derivabile in $z = 0$ perché, quando $z \rightarrow 0$ lungo alcune direzioni (per esempio seguendo l'asse immaginario) $\sin \frac{1}{z}$ tende a infinito più rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{z}$. Si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sin \frac{1}{z} = \frac{\sin \frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{z}\right)^2} = (x + iy)^2 \frac{e^{\frac{i}{x+iy}} - e^{-\frac{i}{x+iy}}}{2i} \\ &= (x + iy)^2 \frac{e^{\frac{i(x-iy)}{x^2+y^2}} - e^{-\frac{i(x-iy)}{x^2+y^2}}}{2i}; \end{aligned}$$

nei punti $z = x + iy$ tali che $x = 0$ si ottiene $f(x + iy) = f(0 + iy) = \frac{iy^2}{2}[e^{\frac{1}{y}} - e^{-\frac{1}{y}}]$, cioè $u(x, y) = 0$ e $v(x, y) = \frac{y^2}{2}[e^{\frac{1}{y}} - e^{-\frac{1}{y}}]$, che tende a $\pm\infty$ per $y \rightarrow 0^\pm$. Questo mostra che $f(z)$ non è nemmeno continua in zero.

In questo caso, quindi, il dominio D di olomorfia di f è il piano complesso privato dell'origine e il punto $z = 0$, che è uno zero di f , non appartiene a D ma appartiene a ∂D . Gli altri zeri sono i punti $z = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$: essi sono tutti isolati e hanno zero come punto di accumulazione che, appunto, non sta in D .

A questo punto possiamo enunciare il

Teorema 2.28 (Principio di identità delle funzioni olomorfe). *Se due funzioni $f, g \in \mathcal{O}(D)$ coincidono su un insieme che possiede almeno un punto di accumulazione appartenente a D , allora $f \equiv g$ in tutto D .*³⁸

Esempio 2.40. *La funzione $f(z) = \sin z$ si annulla in infiniti punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che sono tutti punti isolati. Infatti la funzione $\sin z$ non è identicamente nulla.*

Se una funzione olomorfa in \mathbb{C} si annullasse, per esempio, in tutti i punti $z = \frac{1}{k}$, k intero positivo, concluderemmo, per il principio di identità, che essa è nulla.

Il Principio di identità afferma dunque che una funzione olomorfa risulta univocamente individuata dai valori che essa assume in un sottoinsieme del suo dominio di olomorfia, dotato di almeno un punto di accumulazione appartenente al dominio stesso (di olomorfia).

Tale principio viene formulato in maniera differente a seconda dei testi

³⁸Questo teorema ammette diverse varianti: si può enunciare anche dicendo che *se due funzioni $f, g \in \mathcal{O}(D)$ coincidono su un insieme che contiene una successione convergente in D , allora $f \equiv g$ in tutto D* . Richiedere tale ipotesi significa richiedere l'insieme $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ contenga infiniti punti e tra questi c'è almeno una successione convergente in D . Una tipica applicazione del principio si ha quando due funzioni coincidono su una curva del piano o, in particolare, su una retta: ogni curva continua infatti è un insieme infinito che contiene successioni convergenti.

considerati. Dimostriamo ora due corollari del Teorema 2.28: in alcuni casi è l'uno o l'altro di questi ad essere chiamato principio di identità; si tratta, in effetti, di principi di identità con formulazioni più deboli.

Corollario 2.29. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $z_0 \in D$ e $f, g \in \mathcal{O}(D)$. Se $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \forall n$, allora $f \equiv g$ in D .*

Dimostrazione. Sia $h(z) = f(z) - g(z)$; evidentemente, $h \in \mathcal{O}(D)$ e dall'ipotesi $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \forall n$ segue che $h^{(n)}(z_0) = 0 \forall k$. Per la Proposizione 2.30, allora, $h \equiv 0$ in D , da cui $f \equiv g$ in D . \square

Corollario 2.30. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio e $f, g \in \mathcal{O}(D)$. Se $f(z) = g(z) \forall z \in U$, U sottoinsieme aperto di D , allora $f \equiv g$ in D ³⁹.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in U$; allora si avrà $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \forall n$, e quindi la tesi segue dal corollario precedente. \square

Quanto detto mette in rilievo la differenza fondamentale che esiste fra la nozione di olomorfia e la nozione di derivabilità in senso reale di una funzione. Infatti due funzioni di variabile reale, anche infinitamente derivabili, possono coincidere su una parte di un dominio senza essere identicamente uguali. Invece, due funzioni olomorfe che coincidono su un insieme qualunque che possiede un punto di accumulazione appartenente al dominio in cui esse sono olomorfe (per esempio, come abbiamo detto, su un piccolo disco o un arco (curva) appartenente a questo dominio) sono identicamente uguali su tutto il dominio.

Da ciò segue che le funzioni trascendenti elementari che abbiamo incontrato sono le uniche funzioni intere che coincidono, per $z = x \in \mathbb{R}$, con le corrispondenti (che hanno lo stesso nome) funzioni reali di variabile reale, e quindi sono un prolungamento nel campo complesso di tali funzioni. Prendiamo la funzione esponenziale: se esistessero due funzioni $f(z)$ e $g(z)$ coincidenti con e^x per $z = x \in \mathbb{R}$, poiché ogni $x \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione per \mathbb{R} , si avrebbe $f \equiv g$. Quindi esiste al più

³⁹Citiamo ancora un'altra formulazione equivalente a questa: *Siano $f, g \in \mathcal{O}(D)$. Se f coincide con g in un intorno di un punto $z \in D$, allora $f \equiv g$ in D .*

una funzione olomorfa in tutto \mathbb{C} che coincide con e^x per $z = x \in \mathbb{R}$, e tale funzione deve essere e^z . Lo stesso ragionamento si usa per le altre trascendenti elementari.

Dal Principio di identità segue anche la proprietà (già dimostrata usando il fatto che e^z soddisfa un problema di Cauchy)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

(che coinvolge funzioni di due variabili complesse): fissato $z_2 \in \mathbb{C}$, consideriamo le funzioni $f(z) = e^{z+z_2}$ e $g(z) = e^z e^{z_2}$; essendo f e g intere basta mostrare che coincidono per $z = x \in \mathbb{R}$, cioè che si ha $e^{x+z_2} = e^x e^{z_2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $z_2 \in \mathbb{C}$. Fissato ora $x \in \mathbb{R}$, consideriamo le funzioni $f_1(z) = e^{x+z}$ e $g_1(z) = e^x e^z$; per $z = y \in \mathbb{R}$ esse coincidono per la proprietà dell'esponenziale reale; inoltre, essendo intere, per il Principio di identità esse coincidono anche per $z \in \mathbb{C}$.

Ciò significa che se f e g sono intere e coincidono sui reali, allora coincidono anche su tutto \mathbb{C} e, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è analitica, esiste una sola estensione analitica $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che g coincida con f su \mathbb{R} .

Per questo motivo il Principio di identità (Teorema 2.28) è detto anche **Principio del prolungamento analitico** (o così vengono chiamati i Corollari 2.29 o 2.30).

Più in generale, data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, analitica in I , ci si chiede se esiste una funzione analitica $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, tale che $U \cap \mathbb{R} \supseteq I$ e la restrizione di g a I coincide con f . Se tale funzione esiste, per quanto detto essa è univocamente determinata ed è detta **prolungamento analitico** di f .

Osserviamo che il principio del prolungamento analitico risulta utile anche per estendere al campo complesso identità algebriche (che fanno intervenire solo funzioni olomorfe) in campo reale. Per esempio, la funzione $f(z) := \cos^2 z + \sin^2 z$ è olomorfa in \mathbb{C} e coincide con la funzione $f(x) = 1$ su \mathbb{R} ; allora, essa deve coincidere con 1 anche in tutto \mathbb{C} : vale, dunque, l'identità $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ⁴⁰. Analogamente, la funzione $f(z) := \cosh^2 z - \sinh^2 z - 1$ è olomorfa in \mathbb{C} e coincide con la funzione nulla su \mathbb{R} ; quindi essa è nulla in tutto \mathbb{C} , cioè vale l'identità

⁴⁰Detto in maniera leggermente diversa: se la funzione $\cos^2 z + \sin^2 z - 1$ è nulla sull'asse reale, essa è identicamente nulla in \mathbb{C} .

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Si pone spesso il problema dell'esistenza del prolungamento analitico. Sottolineiamo per prima cosa che, se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$, è una funzione analitica in I e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in I,$$

è il suo sviluppo in serie di Taylor, allora la serie di potenze che si ottiene scrivendo $z \in \mathbb{C}$ al posto di $x \in \mathbb{R}$ definisce il prolungamento analitico di f nella bolla $B_r(x_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (z - x_0)^n, \quad z \in B_r(x_0).$$

Dato che la funzione assegnata inizialmente è a valori reali, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R} \quad \forall n$; allora f assume valori tra loro coniugati in corrispondenza di valori coniugati della variabile z : $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, che è proprio quello che si verifica per le trascendenti elementari (noi l'abbiamo osservato nel caso della funzione esponenziale e^z).

Data una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfa nell'aperto $U \subseteq \mathbb{C}$, si pone spesso il problema di "estendere" f ad un'altra funzione \tilde{f} coincidente con f in tutti i punti di U e olomorfa in un aperto $V \supset U$. Per quanto visto, questa cosiddetta **estensione analitica** (o prolungamento analitico) di f è unica: infatti, ragionando come prima, se per assurdo ci fossero due estensioni f_1 e f_2 , olomorfe in V , si avrebbe $f_1 - f_2 = 0$ in U , da cui $f_1 \equiv f_2$ in V .

Spieghiamo meglio cosa significa prolungare analiticamente una funzione.⁴¹ Considerata la serie di Taylor di una funzione attorno a un punto z_0 , tale serie converge finché non incontra la singolarità (punto in cui la funzione non è derivabile) più vicina, diciamo z_s . Se tale singolarità è isolata (cioè se è un punto isolato), allora la si può "aggirare" in qualche modo. Infatti la serie di Taylor centrata in z_0 della funzione

⁴¹Sul prolungamento analitico ci sarebbe molto altro da dire (si veda, per esempio, il Capitolo 8 in [1]).

data converge dentro il cerchio con centro in z_0 e che tocca z_s . Essendo z_s una singolarità isolata, i punti vicini a z_s , anche se non interni al cerchio, sono punti di analiticità della funzione, e quindi possono, per così dire, essere “raggiunti” sviluppando di nuovo la funzione in un punto z_1 all’interno di un cerchio di un certo raggio R . La nuova serie infatti convergerà allora in un nuovo cerchio di raggio pari a $|z_s - z_1|$, che avrà intersezione non vuota col cerchio precedente, ma che conterrà anche punti non appartenenti al cerchio precedente. Il procedimento può essere così iterato in modo da “circondare” la singolarità isolata e ottenere il cosiddetto prolungamento analitico della funzione.

Tale procedimento fallirebbe se invece di una singolarità isolata incontrassimo una “barriera di singolarità”, cioè delle singolarità distribuite in modo denso su una linea chiusa che circonda la zona di analiticità. Per esempio, consideriamo la funzione $f(z)$ definita dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$; dentro il cerchio unitario tale serie converge; infatti, per $|z| < 1$ possiamo maggiorare la serie dei moduli (essendo $n! = n(n-1) \cdots 1 > n \forall n \geq 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^{n!} < \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n,$$

e la serie a secondo membro converge. Sulla circonferenza $|z| = 1$ ci sono sicuramente dei punti singolari: per esempio, per $z = 1$ la serie diverge. Non solo: in questo caso non si riesce a trovare un arco comunque piccolo sul bordo del cerchio, che sia privo di punti singolari. Infatti tutti i punti della circonferenza unitaria $z_k = e^{i\theta_k}$ costituiscono delle singolarità per f se $\theta_k n! = 2k\pi$ per $n \geq q \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Infatti in tal caso si ha

$$f_N(z_k) = \sum_{n=1}^N z_k^{n!} = \sum_{n=1}^{q-1} e^{i\theta_k n!} + \sum_{n=q}^N e^{2k\pi i}$$

che tende a ∞ per $N \rightarrow \infty$ (la serie conterrà la somma di infiniti 1); ci sono infiniti punti che soddisfano questa condizione: tutti i numeri della forma $z_{p,q} = e^{2\pi \frac{p}{q} i}$, con $p, q \in \mathbb{N}$, sono tali che $|z_{p,q}| = 1$ e $\frac{p}{q} n! = k \in \mathbb{N} \forall n \geq q$. Pertanto f ha infinite singolarità sulla circonferenza unitaria, cosa che impedisce il prolungamento analitico dato

che tali punti formano un insieme denso sulla circonferenza. Infatti i numeri $e^{2\pi i p/q}$ sono le radici q -esime dell'unità e quindi giacciono, equidistanziate, sulla circonferenza $|z| = 1$ (ricordiamo che le radici n -esime di un numero complesso $\rho e^{i\theta}$ sono i vertici di un poligono di n lati inscritto nella circonferenza di raggio ρ ; per n che tende a infinito il poligono “diventa” la circonferenza). Dato che possiamo prendere q arbitrariamente grande, allora in ogni intorno, per quanto piccolo, di un qualsiasi punto della circonferenza unitaria troveremo una radice dell'unità. Questo significa che in ogni arco arbitrariamente piccolo si trovano infinite singolarità della funzione (in un intorno arbitrariamente piccolo di ogni numero reale ci sono infiniti numeri razionali) e il bordo diventa una barriera invalicabile (detta “barriera” o “frontiera” naturale).

Esempio 2.41. Anche la funzione analitica rappresentata da $f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, $|z| < 1$, è un esempio di funzione non prolungabile analiticamente: risulta, infatti, che la circonferenza $|z| = 1$ è la sua frontiera naturale. Osserviamo subito che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$ non converge per $z = 1$; inoltre $\forall z$ si ha

$$f(z^2) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^{2^n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{n+1}} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

quindi $f(z) = z + f(z^2)$. Ancora

$$f(z^4) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (z^4)^{2^n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{n+2}} = 1 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$$

quindi $f(z) = z + z^2 + f(z^4)$, e così via:

$$f(z) = z + \dots + z^{2^{n-1}} + f(z^{2^n}).$$

Osserviamo allora che i punti z tali che $z^{2^n} = 1$ sono punti singolari per f per ogni n : per $n = 0$ si ottiene $z = 1$; per $n = 1$ si ottiene $z^2 = 1$, e quindi $z = \pm 1$, per $n = 2$ l'equazione diventa $z^4 = 1$, le cui radici sono le quattro radici quarte di 1, e così via. Le radici dell'equazione $z^{2^n} = 1$ sono le radici 2^n -esime dell'unità e dunque, per n che

tende a infinito, esse si addensano sulla circonferenza, cioè l'insieme $\{z : z^{2^n} = 1, n \in \mathbb{N}\}$ è denso in $\{z : |z| = 1\}$, e $|z| = 1$ costituisce la frontiera naturale di f .

Facciamo ancora un'altra osservazione: la serie di Taylor che definisce la funzione $f(z)$ analitica nel cerchio C_0 di centro z_0 e raggio r_0 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ è formalmente diversa dalla serie nel cerchio C_1 di centro z_1 e raggio r_1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n$, ma la funzione deve essere la stessa nonostante la diversità della rappresentazione, non solo nell'intersezione dei due cerchi, ma ovunque si possa arrivare con il prolungamento analitico. Partiamo da z_0 (o da un altro punto interno al cerchio C_0 in cui la funzione è definita dalla prima serie) e raggiungiamo un generico punto z lungo un cammino γ (che attraversa una certa serie di dischi del prolungamento), ottenendo un certo valore w di $f(z)$ (se z fosse proprio in C_1 il valore sarebbe quello dato dalla seconda serie); se ora percorressimo invece un cammino diverso $\tilde{\gamma}$ (che attraversa una serie diversa di dischi del prolungamento), otterremo un valore \tilde{w} di $f(z)$. La funzione $f(z)$ è analitica nella regione data dall'unione dei dischi del prolungamento, e anche la sua derivata $f'(z)$; quindi, essendo $f(z)$ una primitiva di $f'(z)$, si ha

$$w = f(z)_{\text{lungo } \gamma} = \int_{\gamma(z_0, z)} f'(\xi) d\xi \quad \text{e} \quad \tilde{w} = f(z)_{\text{lungo } \tilde{\gamma}} = \int_{\tilde{\gamma}(z_0, z)} f'(\xi) d\xi.$$

Ma per il teorema di Cauchy, se all'interno del cammino chiuso $\Gamma = \tilde{\gamma} \cup (-\gamma)$ non ci sono singolarità, allora i due integrali delle formule precedenti sono uguali, e quindi $\tilde{w} = w$. Se, invece, il prolungamento ha circondato una (o più) singolarità, allora l'integrale lungo Γ non è necessariamente nullo, e quindi si potrebbe avere $\tilde{w} \neq w$: la funzione, in tal caso, sarebbe ancora analitica, ma polidroma, e quindi facendo percorsi diversi finiremmo su rami diversi.

Riassumendo, data una funzione f olomorfa in un dominio $D \subset \mathbb{C}$, f è sviluppabile in serie di Taylor in ogni intorno $B_r(z_0) \subset D$, $z_0 \in D$, $r > 0$, ma può accadere che tale serie abbia raggio di convergenza $r > \text{dist}(z_0, \partial D)$, cioè che converga in punti non appartenenti al domi-

nio, oppure che converga in punti z appartenenti al dominio ma con somma diversa da $f(z)$ (si veda, più avanti, l'Esempio 2.44). In entrambi i casi si dice che tale serie definisce un prolungamento analitico di f .

Data una funzione f analitica in un dominio $D \neq \mathbb{C}$, si dice che la funzione g , analitica nel dominio D_1 avente in comune con D uno o più domini è un prolungamento analitico di f se $f = g$ su un dominio contenuto nell'intersezione $D \cap D_1$.

Concentriamoci in particolare sulle funzioni a un sol valore. Vale il seguente risultato: *se due funzioni analitiche monodrome coincidono su un tratto di curva appartenente all'intersezione dei domini di analiticità, allora esse coincidono ovunque, cioè sono la stessa funzione analitica sull'unione dei domini.*

Esempio 2.42. *Mostriamo che $\frac{1}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2+i}\right)^n$ è il prolungamento analitico di $\frac{1}{2-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{2-i}\right)^n$.*

La seconda è una serie geometrica di ragione $\frac{z-i}{2-i}$, quindi converge per $\left|\frac{z-i}{2-i}\right| < 1$, cioè dentro il cerchio $|z-i| = |2-i|$ ($|x+i(y-1)| = |2-i|$), da cui $x^2 + (y-1)^2 = 5$) di centro $(0, 1) = i$ e raggio $\sqrt{5}$. Conosciamo anche la somma di una serie geometrica, quindi si ricava

$$\frac{1}{2-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{2-i}\right)^n = \frac{1}{2-i} \frac{1}{1 - \frac{z-i}{2-i}} = \frac{1}{2-z}.$$

Anche la prima serie ha la stessa somma:

$$\frac{1}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2+i}\right)^n = \frac{1}{2+i} \frac{1}{1 - \frac{z+i}{2+i}} = \frac{1}{2-z},$$

e il suo cerchio di convergenza è quello di centro $-i$ e raggio $\sqrt{5}$; il suo centro quindi è all'interno del cerchio di convergenza dell'altra serie; dunque, le due serie coincidono nell'intersezione dei due cerchi (l'unico punto singolare per la funzione somma è il punto $z = 2$), e quindi

nell'intersezione dei loro domini, e nella loro unione, rappresentano entrambe la funzione analitica $\frac{1}{2-z}$: esse sono, quindi, il prolungamento analitico l'una dell'altra.

Esempio 2.43. La funzione $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 2$, non è analitica nell'origine e non è possibile prolungarla in modo tale che lo sia. Ricordiamo, infatti, che l'origine è un punto di diramazione per $f(z)$ e dall'origine parte la linea di diramazione: non esiste dunque nessun intorno dell'origine, per quanto piccolo, in cui la funzione sia esprimibile come somma di una serie di potenze.

Esempio 2.44. Sappiamo che integrando termine a termine la serie geometrica si ricava lo sviluppo della funzione $\log(1-z)$ nel cerchio unitario centrato nell'origine:

$$\log(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad |z| < 1.$$

Si ottiene, quindi, che

$$\log z = \log[1 - (1-z)] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-z)^{n+1}}{n+1} \quad |1-z| < 1,$$

serie centrata nel punto 1 e di raggio unitario. Inoltre

$$\log \frac{z_0}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{z_0}{z}\right)^{n+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z-z_0}{z}\right)^k,$$

da cui, utilizzando le proprietà del logaritmo, si ricava

$$\log z = \log(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z-z_0}{z}\right)^k.$$

La multifunzione logaritmo di z è definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e in tale dominio è una funzione analitica;⁴² pertanto lo sviluppo in serie di Taylor appena

⁴²Il suo unico punto singolare è il punto di diramazione (cioè l'origine), e se si considera il piano complesso esteso, anche il punto all'infinito può essere considerato come punto di diramazione).

trovato ha come punto iniziale un qualunque punto z_0 e converge nel cerchio di centro z_0 e raggio pari a $|z_0|$ (distanza di z_0 dall'origine). Consideriamo ora la funzione logaritmo principale $\text{Log } z = \log |z| + i\text{Arg}(z)$, $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ (un particolare ramo della multifunzione logaritmo complesso): essa è definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ed è olomorfa in $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 0, y = 0\}$; nel punto $z_0 = -1 + i$ essa è analitica, e quindi, per quanto detto, la corrispondente serie di Taylor centrata in z_0 converge per ogni z tale che $|z - z_0| < |z_0| = \sqrt{2}$. Ma allora siamo proprio nel caso in cui la serie converge in un cerchio che contiene punti non appartenenti a D (i punti x dell'asse reale nell'intervallo $(-2, 0)$), cerchio costituito dall'intervallo $(-2, 0) \subset \mathbb{R}$ e da due domini disgiunti contenuti in D . La somma di tale serie coincide allora con la funzione $\text{Log } z = \log |z| + i\pi$ se $\text{Im}(z) > 0$ e con $\log |z| - i\pi$ se $\text{Im}(z) < 0$, ed è quindi un prolungamento analitico della funzione logaritmo principale.

Il procedimento di prolungamento analitico (di una funzione analitica) può essere ripetuto indefinitamente. La totalità di tutti gli sviluppi di Taylor è una funzione analitica e ogni singolo sviluppo è detto **elemento analitico** della funzione analitica.

Utilizzando il principio di identità e il teorema della media si può dimostrare un altro famoso teorema che riguarda le funzioni olomorfe: il Principio del massimo. Prima osserviamo che dal teorema della media

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

segue che

$$|f(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

relazione che afferma che il massimo del modulo della funzione $f(z)$ su una circonferenza è maggiore o uguale al modulo di f calcolato nel centro della circonferenza. Vale però un risultato molto più forte:

Teorema 2.31 (Principio del massimo). *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio e $f \in \mathcal{O}(D)$ tale che $|f(z)|$ abbia un massimo locale in D . Allora f è costante in D .*

Esistono diverse dimostrazioni di questo teorema (che utilizzano tutte, come ingredienti, il teorema della media e il principio di identità); qui ne forniamo due diverse:

Dimostrazione. Sia z_0 un punto di massimo locale per $|f|$; allora esiste un intorno U di z_0 tale che $|f(z)| \leq |f(z_0)| \forall z \in U$. Per il Teorema 2.5 basta mostrare che $|f(z)|$ è costante in un intorno di z_0 : da ciò, infatti, segue che $f(z)$ è costante in tale intorno e, per il principio di identità, risulta costante in tutto D .

Supponiamo per assurdo che non sia così, cioè che in una bolla aperta di centro z_0 esista almeno uno z tale che $|f(z)| < |f(z_0)|$; sia z_1 un punto con tale proprietà, cioè tale che $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Posto $|z_1 - z_0| = r$, supponiamo che $\{z : |z - z_0| < 2r\} \subseteq D$, cioè che z_1 sia interno a un certo intorno di z_0 , e sia $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, la circonferenza su cui giace z_1 . Essendo $|f(z_1)| - |f(z_0)| < 0$ ed essendo la funzione (a valori reali) $|f(z)|$ continua, esiste $\epsilon > 0$ e un arco di circonferenza γ “intorno” a z_1 in cui tale differenza si mantenga minore di zero, cioè si abbia

$$|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)| - \epsilon \quad \text{per } t \in (\theta_1, \theta_2). \quad (2.30)$$

Dalla formula della media e usando la (2.30) si ha

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z_0 + re^{it}) dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t \notin [\theta_1, \theta_2]} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(z_0 + re^{it})| dt + \int_{t \notin [\theta_1, \theta_2]} |f(z_0 + re^{it})| dt \right] \\ &< \frac{1}{2\pi} \{ (|f(z_0)| - \epsilon)(\theta_2 - \theta_1) + [2\pi - (\theta_2 - \theta_1)] |f(z_0)| \} \\ &= |f(z_0)| - \epsilon \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} < |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Avendo trovato un assurdo segue che f ha modulo costante in un intorno di z_0 , da cui segue la tesi. □

Una seconda dimostrazione è la seguente:

Dimostrazione. Sia z_0 un massimo locale per $|f|$; allora esiste un intorno U di z_0 tale che $|f(z)| \leq |f(z_0)| \forall z \in U$. Sia $\epsilon > 0$ tale che la bolla chiusa $\overline{B_\epsilon(z_0)} \subset U$. Per la formula di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Parametrizzando la circonferenza $\partial B_\epsilon(z_0)$ ($z = z_0 + \epsilon e^{i\theta}$) e usando il fatto che $|f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})| \leq |f(z_0)| \forall \theta$ si ha

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)|; \end{aligned}$$

allora le precedenti disuguaglianze diventano uguaglianze e, essendo la funzione integranda $|f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})|$ continua rispetto a θ , si deve avere

$$|f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})| = |f(z_0)| \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad \forall \epsilon \text{ tale che } \overline{B_\epsilon(z_0)} \subset U,$$

cioé il modulo di f risulta costante (e uguale al modulo di $f(z_0)$) su tutta una circonferenza di centro z_0 e raggio minore della distanza di z_0 dalla frontiera dell'aperto U .⁴³

⁴³Da questo punto in poi si potrebbe usare anche il seguente ragionamento alternativo: a questo punto ci rimane da mostrare che il modulo di f è costante (e uguale al modulo di $f(z_0)$) anche dentro la bolla, cioè in tutta la bolla chiusa $\overline{B_\epsilon(z_0)}$. In effetti, così è, dato che il modulo di f coincide col valore $|f(z_0)|$ in ogni circonferenza di raggio $\epsilon > 0$ ma minore della distanza di z_0 dalla frontiera dell'aperto U . Allora, essendo $|f|$ costante nella bolla $B_\epsilon(z_0)$, per il Teorema 2.5 segue che $f(z)$ è costante in tale intorno di z_0 e, per il principio di identità, risulta costante in tutto D .

Volendo, per rafforzare questo risultato e per usare il principio di identità in un'altra forma ancora diversa, si può fare la considerazione che, dato che il modulo di f è costante in $B_\epsilon(z_0)$, anche il quadrato del suo modulo $|f(z)|^2$ lo è, e quindi anche il prodotto $f(z) \cdot \overline{f(z)}$ è costante in $B_\epsilon(z_0)$. In particolare, in tale bolla si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f\bar{f}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{f} + f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \quad (2.31)$$

dove, nell'ultimo membro della (2.31) il primo termine è nullo per l'olomorfia di f ; dunque risulta $f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$. Inoltre, ancora dall'olomorfia di f si ha anche

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)}; \quad (2.32)$$

Essendo $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\text{Arg}(f(z_0))}$, se $\text{Arg}(f(z_0)) = \alpha$, usando nuovamente la formula della media si ha

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= e^{-i\alpha} f(z_0) = \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta; \end{aligned}$$

inoltre, essendo il modulo di un numero complesso un numero reale, si ha

$$\begin{aligned} \text{Re}|f(z_0)| &= |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left(\int_0^{2\pi} e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re} (e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)|. \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, è stato usato il fatto che la parte reale di un numero complesso è minore o uguale al suo modulo. Tutte le disuguaglianze intermedie diventano dunque delle uguaglianze, e si trova

$$\text{Re} (e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})) = |e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})| = |f(z_0)| \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Ma allora $\text{Im}(e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})) = 0$ e $e^{-i\alpha} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) = |f(z_0)|$, cioè $f(z_0 + \epsilon e^{i\theta}) = e^{i\alpha} |f(z_0)| = f(z_0) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$. Ma allora non solo $|f(z)|$ è costante nella circonferenza $\{z : |z - z_0| = \epsilon\}$, ma anche $f(z)$

infatti

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u - iv) = \frac{1}{2} [(u_x + v_y) - i(v_x - u_y)]$$

e

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} [(u_x + v_y) - i(v_x - u_y)],$$

da cui segue la (2.32). Allora, sostituendo la (2.32) nella (2.31) si ottiene $f(z) \cdot \overline{f'(z)} = 0$ (essendo f olomorfa, $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$) per ogni $z \in B_\epsilon(z_0)$.

Ora, se per assurdo f non fosse costante in U , per il principio d'identità non lo sarebbe neanche in $B_\epsilon(z_0)$; quindi in tale disco f ed f' non sarebbero identicamente nulle e quindi, dalla Proposizione 2.7, ammetterebbero ciascuna solo un insieme discreto di zeri: la relazione $f(z) \cdot \overline{f'(z)} = 0$ non potrebbe quindi valere su tutto il disco. Allora f deve essere costante in U , per il principio di identità lo è anche in D .

è costante in tale curva (continua) contenuta in D e quindi, per il principio di identità, essa è costante in tutto D .

□

Osserviamo che alcune formulazioni del teorema precedente contengono anche l'implicazione inversa (che è banale): se f è costante in D , allora $|f(z)|$ ammette un massimo in D .

Citiamo, per completezza, anche un'altra formulazione: *Sia D un dominio e $f \in \mathcal{O}(D)$. Se esiste $z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| \geq |f(z)| \forall z \in D$ allora f è costante.* In questo enunciato il punto di massimo è globale anziché locale.

Ancora, spesso il principio del massimo viene enunciato "in negativo": *sia $f \in \mathcal{O}(D)$; allora $|f(z)|$ non può avere massimo in D a meno che non sia costante.*

Osserviamo che un teorema analogo per il minimo non vale. Infatti, consideriamo, per esempio, la funzione $f(z) = z$: essa è tale che $|f(z)|$ ha minimo in $z = 0$, ma non è costante.

Inoltre, se si applica il principio del massimo, nella versione in negativo, alla funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ segue un immediato

Corollario 2.32. *Se una funzione olomorfa in un dominio D , non costante e priva di zeri in D , allora il suo modulo non raggiunge minimo in D .*

Esempio 2.45. *La funzione $\sin z$ non è costante e non ammette zeri in un dominio D contenente un tratto di asse reale di lunghezza minore di π privo di zeri; quindi $|\sin z|$ non assume minimo in nessun punto di tale dominio D .*

Il Teorema 2.31 è chiamato anche **Principio del massimo modulo**, mentre è il seguente corollario ad essere chiamato, talvolta, principio di massimo.

Corollario 2.33. *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$. Allora*

$$\max_{\overline{D}} |f| = \max_{\partial D} |f|. \quad (2.33)$$

Se f non è costante, allora

$$|f(z)| < \max_{\xi \in \partial D} |f(\xi)| \quad \forall z \in D. \quad (2.34)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $|f(z)|$ è una funzione a valori reali; per ipotesi, essa è continua nell'insieme chiuso e limitato \bar{D} e, dunque, il massimo in \bar{D} esiste per il Teorema di Weierstrass. Supponiamo che esso venga raggiunto nel punto $z_0 \in \bar{D}$; allora si ha $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in \bar{D}$. Se $z_0 \in \partial D$, allora

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|,$$

e la (2.33) è vera. Se $z_0 \in D$, allora per il principio del massimo f deve essere costante, e quindi la (2.33) vale anche in questo caso.

Se f non è costante, segue la (2.34). \square

Corollario 2.34. *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\bar{D})$. Allora $\forall z_0 \in D$ vale la disuguaglianza*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! \frac{\max_{z \in \partial D} |f(z)|}{(\delta(z_0))^n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove $\delta(z_0) = \text{dist}(z_0, \partial D)$.

Dimostrazione. Per la stima di Cauchy sulle derivate si ha

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! \frac{\max_{|z-z_0|=r} |f(z)|}{r^n} \quad \forall r < \delta(z_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il principio del massimo, si ha $\max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \leq \max_{\bar{D}} |f| = \max_{\partial D} |f|$, e quindi

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! \frac{\max_{\partial D} |f|}{r^n} \quad \forall r < \delta(z_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.35)$$

da cui segue la tesi per $r \rightarrow \delta(z_0)$. \square

Nel caso particolare di una funzione olomorfa f in un disco aperto U e continua fino al bordo del disco, detto $M(r) = \max_{\partial U} |f|$, cioè il massimo del modulo di f sulla circonferenza (per esempio) di centro z_0 e

raggio r , la (2.35) può essere letta come: i coefficienti della serie di Taylor di f nell'intorno di z_0 ($|z - z_0| \leq r$) soddisfano le **disuguaglianze di Cauchy**

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

dette anche **del massimo modulo**).

Ritroviamo quindi le stime di Cauchy (per gli a_n) come corollario del Principio di massimo.

2.15 Serie di Laurent

Siano $0 \leq r < R \leq +\infty$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. L'insieme

$$C_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

è detto **corona circolare** di centro z_0 , raggio interno r e raggio esterno R . Se $r = 0$ e $R < +\infty$ si ottiene un cosiddetto **intorno** (o **disco**) **bucato** di centro z_0 e raggio R , che talvolta viene denotato come $B_R^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$; se $r > 0$ e $R = +\infty$ si ottiene il complementare del cerchio di centro z_0 e raggio r , e se $r = 0$ e $R = +\infty$ l'intero piano privato del punto z_0 .

Consideriamo ora la successione bilatera di numeri complessi $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Diciamo che la serie bilatera $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ converge se entrambe le serie $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergono, e in tal caso poniamo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Osserviamo che la scelta di spezzare la serie bilatera in zero è ininfluente: se la serie bilatera è convergente allora, fissato $k \in \mathbb{Z}$, si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^k a_n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n.$$

Una serie della forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, dove $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una successione assegnata di coefficienti complessi, è detta **serie bilatera** di

centro z_0 o, anche **serie di Laurent** di centro z_0 . Per capire in quale tipo di insieme converga questo tipo di serie scriviamola separando le potenze negative di $z - z_0$ da quelle positive:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n; \end{aligned}$$

la seconda serie è una serie di potenze e quindi converge in un cerchio $|z - z_0| < R$ di centro z_0 e con un dato raggio R ; la prima serie, invece, (dove compaiono le potenze negative di $z - z_0$) converge nei punti z tali che $\left| \frac{1}{z - z_0} \right| < \tilde{R}$ per un certo \tilde{R} , cioè in un insieme del tipo $\left\{ z : |z - z_0| > \frac{1}{\tilde{R}} \right\}$, che rappresenta l'esterno di un cerchio di centro z_0 e raggio $\frac{1}{\tilde{R}} = r$. La serie bilatera convergerà allora nell'intersezione dei due insiemi (cioè nell'insieme comune di convergenza di entrambe le serie), e quindi in un insieme del tipo $\{z : r < |z - z_0| < R\}$, cioè in una corona circolare.

Risulta quindi che se f è una funzione olomorfa in un cerchio di centro z_0 e raggio r , allora essa è sviluppabile in serie di potenze di $(z - z_0)$; in generale, se invece f è olomorfa in una corona circolare di centro z_0 , non sarà possibile svilupparla in serie di potenze di centro z_0 , ma si potrà ottenere uno sviluppo come somma di una serie bilatera in cui figurano anche potenze di $(z - z_0)$ con esponente negativo. Una funzione del genere è quindi una funzione olomorfa in un aperto tranne in un punto z_0 , dove si dice che ci sia una singolarità, in cui la funzione non è definita né può essere prolungata con continuità.

Esempio 2.46. La serie bilatera $\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z)^{-n}$, con $\alpha > 0$, converge in $\frac{1}{\alpha} < |z| < 1$ se $\alpha > 1$, mentre non converge in nessun punto se $\alpha < 1$.

Precisamente, vale il seguente:

Teorema 2.35 (Sviluppo in serie di Laurent (in una corona circolare)).
 Sia f olomorfa in $C_{r,R}(z_0)$ Allora, $\forall z \in C_{r,R}(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R, \quad (2.36)$$

dove

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial^+ B_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.37)$$

con $r < \rho < R$. I coefficienti a_n sono univocamente determinati.

Dimostrazione. Fissato $z \in C_{r,R}(z_0)$, siano r' e R' tali che z appartenga alla corona circolare di centro z_0 , raggio interno r' e raggio esterno R' , con $r < r' < R' < R$. Consideriamo, poi, una retta passante per z_0 ma non passante per z ; la corona circolare $C_{r',R'}(z_0)$ intercetta tale retta in due segmenti, che dividono tale corona in due curve chiuse Γ_1 e Γ_2 , una delle quali (sia, per esempio, Γ_1) contiene z al suo interno. Allora, dalla formula integrale di Cauchy si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

dato che il secondo integrale è nullo per il Teorema di Cauchy. Nella formula precedente i segmenti di Γ_1 e Γ_2 (che non giacciono sulle circonferenze che individuano $C_{r',R'}(z_0)$) vengono percorsi due volte in senso opposto e quindi si eliminano. Dunque, $f(z)$ si può esprimere come

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C_{r',R'}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \end{aligned} \quad (2.38)$$

dove Γ^{+} e γ'^{+} indicano i bordi, rispettivamente, esterno e interno della corona circolare $C_{r',R'}(z_0)$, percorsi in senso antiorario.⁴⁴

Trattiamo separatamente i due integrali che compaiono nella (2.38), sviluppando la quantità $\frac{1}{\xi-z}$ in due modi diversi a seconda che $\xi \in \Gamma'$ o $\xi \in \gamma'$.

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto nel Teorema 2.24 (di analiticità delle funzioni olomorfe), cioè osservando che, $\forall \xi \in \Gamma'$ si ha $\left| \frac{z-z_0}{\xi-z_0} \right| < 1$ e dunque $|z-z_0| < |\xi-z_0| = R'$, si trova

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-z_0+z_0-z} = \frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} \quad (2.39)$$

converge assolutamente ed uniformemente in ξ su Γ' , moltiplicando primo e ultimo membro della (2.39) per la funzione $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$, limitata su Γ' , e integrando termine a termine su Γ' si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'^+} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'^+} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per il secondo integrale della (2.38), osserviamo che $\forall \xi \in \gamma'$ si ha $\left| \frac{\xi-z_0}{z-z_0} \right| < 1$ e quindi si ha

$$-\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{z-z_0+z_0-\xi}$$

⁴⁴Più velocemente, si può anche osservare (direttamente dalla formula integrale di Cauchy) che, essendo z interno a Γ'

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi,$$

mentre, essendo z esterno a γ'

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = 0.$$

Sommando membro a membro le due relazioni si ottiene la (2.38).

$$= \frac{1}{(z - z_0) \left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

Moltiplicando per $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ e integrando termine a termine su γ' si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} f(\xi) (\xi - z_0)^k d\xi \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} f(\xi) (\xi - z_0)^k d\xi (z - z_0)^{-k-1}; \end{aligned}$$

posto $-k - 1 = n$ si trova

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n.$$

Quindi

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n,$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = -1, -2, \dots$$

Sostituendo le espressioni ottenute nella (2.38) si ha la tesi, dato che, grazie al teorema di Cauchy sulle curve omotope (i circuiti sono tutti equivalenti rispetto alla funzione $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$), le circonferenze Γ' e γ' possono essere rimpiazzate da una circonferenza qualunque di raggio ρ , $r < \rho < R$ (cioè la serie (2.36) converge uniformemente in ogni corona circolare $C_{r',R'}(z_0)$, con $r < r' < R' < R$, e anche i coefficienti possono essere calcolati su una qualunque circonferenza di centro z_0 e raggio intermedio fra i due raggi interno ed esterno).

Rimane da dimostrare l'unicità della serie di Laurent, cioè che, se vale la (2.36), allora i coefficienti a_n sono dati dalla (2.37). Posto

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \tag{2.40}$$

e $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, consideriamo la circonferenza γ_ρ di centro z_0 e raggio ρ , $r < \rho < R$. La serie $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente in γ_ρ , e tale proprietà si conserva se si moltiplicano entrambi i membri per una potenza qualunque $(z - z_0)^{-k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, essendo tale potenza una funzione limitata su γ_ρ (siamo lontani dal centro essendo $z \neq z_0$ e anche dall'altro caso limite $z \rightarrow \infty$, essendo $\rho < R$); integrando termine a termine ciò che si ottiene si ha

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \oint_{\gamma_\rho^+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \oint_{\gamma_\rho^+} (z - z_0)^{n-k-1} dz. \end{aligned}$$

Analogamente, moltiplicando (2.40) per $(z - z_0)^{-k-1}$ e integrando su γ_ρ si ottiene

$$\oint_{\gamma_\rho^+} \frac{h(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \oint_{\gamma_\rho^+} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^{n-k-1} dz.$$

La serie $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ è uniformemente convergente in γ_ρ . Infatti, posto $z = z_0 + \frac{1}{w}$, si ottiene ($r < |z - z_0| < R$ implica $r < \left|\frac{1}{w}\right| < R$)

$$h\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \frac{1}{w^n} = \sum_{l=1}^{+\infty} a_{-l} w^l, \quad \frac{1}{R} < |w| < \frac{1}{r},$$

e la serie a ultimo membro converge uniformemente sulla circonferenza di centro 0 e raggio $\frac{1}{\rho}$. Ragionando come prima, allora, segue (scambiando la serie con l'integrale) che

$$\oint_{\gamma_\rho^+} \frac{h(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \oint_{\gamma_\rho^+} (z - z_0)^{n-k-1} dz.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{h(z) + g(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \oint_{\gamma_\rho^+} (z - z_0)^{n-k-1} dz; \end{aligned}$$

calcolando esplicitamente l'integrale a secondo membro, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} i\rho^{n-k} e^{it(n-k)} dt;$$

quindi, per la proprietà di ortogonalità delle funzioni e^{imt} , $m \in \mathbb{Z}$, in $[0, 2\pi]$, tutti gli integrali del primo membro sono nulli tranne quello in cui $k = n$, che è uguale a $2\pi i$. Quindi, segue la formula (2.37). \square

La serie (2.36) è detta **serie di Laurent** della funzione f nella corona circolare $C_{r,R}(z_0)$. L'insieme delle potenze positive (cioè la serie di potenze standard $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$) si chiama *parte regolare* della serie e quello delle potenze negative (cioè la serie $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$) è detta *parte principale* o *parte singolare* o *parte caratteristica* della serie bilatera. Naturalmente, se la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è tale che $a_n = 0 \forall n < 0$, si ritrova l'usuale serie di potenze (positive). Osserviamo che, se f è olomorfa in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\} = B_R^*(z_0)$, tale sviluppo vale in $0 < |z - z_0| < R$, e

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove γ è una qualunque curva di Jordan contenuta in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, orientata positivamente e la definizione degli a_n non dipende dal cammino γ . Un caso particolare in cui si può effettuare lo sviluppo di Laurent è quando, dato un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, si ha $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$. In questo caso lo sviluppo di Laurent vale nella corona $\{0 < |z - z_0| < \delta(z_0)\}$, dove $\delta(z_0)$ indica la distanza di z_0 da ∂D .

Il Teorema 2.35 si può enunciare dicendo che ogni serie convergente di potenze positive e negative di $z - z_0$ è la serie di Laurent della sua somma.

La formula dei coefficienti della serie di Laurent si usa poco frequentemente nella pratica, dato che comporta il calcolo di un integrale. Tuttavia, poiché lo sviluppo di Laurent è unico, un qualunque procedimento che permetta di ottenere, per una funzione f , uno sviluppo in una serie di potenze, può essere utilizzato per ottenere questi coefficienti.

Esempio 2.47. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$; essa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Cerchiamo il suo sviluppo in serie di Laurent nella corona circolare $C_{1,2}(0)$; il modo più semplice di procedere in questo caso non è usare la formula generale dei coefficienti dimostrata nel Teorema 2.35, ma ricondursi alla serie geometrica. Per $1 < |z| < 2$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

dove il primo sviluppo è valido per $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, cioè per $|z| > 1$ e il secondo per $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, cioè per $|z| < 2$. Nell'insieme comune di convergenza $1 < |z| < 2$ si ottiene

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \dots - z^{-2} - z^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \dots,$$

che è la serie di Laurent cercata.

Osserviamo che la funzione assegnata è anche olomorfa in $B_1(0)$, e quindi ammetterà in tale bolla uno sviluppo in serie di potenze:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

dove il primo sviluppo è valido per $|z| < 1$ e il secondo per $|z| < 2$. Nell'insieme comune di convergenza, cioè nella bolla più piccola $|z| < 1$ si ottiene

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Infine, osserviamo che $f(z)$ è olomorfa anche nella corona circolare in $C_{2,\infty}(0)$, quindi in tale intorno di ∞ avrà uno sviluppo in serie di

Laurent ridotta alla sola parte singolare:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k, \end{aligned}$$

dove il primo sviluppo è valido per $|\frac{1}{z}| < 1$, cioè per $|z| > 1$ e il secondo per $|\frac{2}{z}| < 1$, cioè per $|z| > 2$. Nell'insieme comune di convergenza $|z| > 2$ si ottiene

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1+2^n) \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1+2^{-n-1}) z^n.$$

Osserviamo che la formula (2.37), per $n \in \mathbb{N}$, coincide con la formula integrale (2.27) per i coefficienti della serie di Taylor. Ripetendo il ragionamento seguito per ottenere le disuguaglianze di Cauchy per i coefficienti della serie di Taylor, si ottengono analogamente le **disuguaglianze di Cauchy per la serie di Laurent**: sia f una funzione olomorfa in una corona circolare $C_{r,R}(z_0)$ e sia $M(\rho)$ il massimo del modulo di f sulla circonferenza γ_ρ , $r < \rho < R$. Allora i coefficienti della serie di Laurent sono tali che

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

in $C_{r,R}(z_0)$.

Assegnata una funzione f complessa di variabile complessa, se la sua espressione analitica è abbastanza semplice, in genere è facile capire quale sia l'aperto più grande di \mathbb{C} in cui f è olomorfa.

I punti del piano complesso in cui una funzione f è olomorfa si dicono punti *regolari* o *ordinari* della funzione. I punti in cui non lo è si dicono *punti singolari* o *singolarità* della funzione. Osserviamo che, se la funzione è multivoca, i punti di diramazione sono singolarità della

funzione.⁴⁵ Se f è definita in un aperto $U \subset \mathbb{C}$ (limitato), i punti della frontiera ∂U sono punti singolari.

Esempio 2.48. La funzione $\frac{z^2 - 1}{1 + z^2} e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\}$; i punti $i, -i, 0$ sono punti singolari, che non appartengono all'aperto in cui f è olomorfa ma a cui ci si può "avvicinare" rimanendo dentro tale aperto.

Chiamiamo **singularità isolata** (o **punto singolare isolato**) di una funzione f un punto z_0 in cui f non è olomorfa o non è definita, ma è definita e olomorfa su un intorno (bucato) di tale punto, cioè se esiste $r > 0$ tale che in $B_r^*(z_0)$ (cioè un insieme del tipo $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ se z_0 è finito, o un insieme del tipo $\{z : |z| > R\}$ se $z_0 = \infty$) f è olomorfa, mentre f non è olomorfa in $B_r(z_0)$.

Diciamo, invece, che z_0 è una **singularità non isolata** per f se, per ogni $r > 0$, f non è olomorfa in $B_r^*(z_0)$ ma è olomorfa in qualche insieme aperto contenuto in $B_r^*(z_0)$.

Osserviamo che per definire le singularità (isolate o no) di una funzione f non viene dichiarato a priori quale sia l'aperto del piano complesso in cui f è olomorfa. La definizione di singularità è legata al fatto che si riesca a trovare o meno un aperto di un certo tipo in cui f è olomorfa. Dire che f ha una singularità isolata in z_0 equivale a dire che f è una funzione complessa di variabile complessa definita e olomorfa almeno in un disco bucato $B_r^*(z_0)$, ma non olomorfa in nessun insieme del tipo $B_r(z_0)$.

Un punto singolare isolato per una funzione f è necessariamente un punto di frontiera del dominio di olomorfia di f .

Esempio 2.49. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{\sin z}$; poiché gli zeri di $\sin z$ sono i punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(z)$ è definita e olomorfa nell'aperto $U = \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; i punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono tutti

⁴⁵Si tratta di punti singolari non isolati.

punti di singolarità isolata.

Esempio 2.50. Sia $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$; essa è definita per $z \neq 0$ e $z \neq \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Dall'esempio precedente segue che i punti $z = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di singolarità isolata.

Il punto $z = 0$, invece, è un punto di singolarità non isolata. Infatti $\forall r > 0$ il disco bucato $B_r^*(0)$ contiene qualche punto $z = \frac{1}{k\pi}$, e quindi f non è olomorfa in nessun disco bucato centrato nell'origine. D'altra parte, f è olomorfa nell'aperto $U = B_r^*(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ (dato che le altre singolarità $z = \frac{1}{k\pi}$ si trovano tutte sull'asse reale).

L'Esempio 2.50 mostra la situazione più semplice di una singolarità z_0 non isolata: z_0 è il limite di una successione di punti di singolarità isolata.

Esempio 2.51. Le funzioni \sqrt{z} determinazione principale della radice quadrata di z e $\text{Log } z$, parte principale del $\log z$ non hanno punti singolari isolati: il loro dominio di olomorfia è, infatti, il piano complesso privato di una semiretta uscente dall'origine ($\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$).

Partiamo ora dall'osservazione che se z_0 è una singolarità isolata per f allora esiste $r > 0$ tale che f sia olomorfa in $B_r^*(z_0) = C_{0,r}(z_0)$; dal Teorema 2.35 segue allora che in tale corona circolare f è sviluppabile in serie di Laurent.

Se invece z_0 è una singolarità non isolata non è possibile scrivere lo sviluppo di Laurent in un disco bucato di centro z_0 , dato che un qualunque insieme di questo tipo contiene infiniti punti di singolarità (e quindi f non è olomorfa in $B_r^*(z_0)$ per qualunque r).

Si distinguono allora tre tipi di singolarità isolate a seconda del comportamento di $f(z)$ in un intorno del punto singolare z_0 o delle caratte-

ristiche dello sviluppo di Laurent centrato in z_0 ⁴⁶, precisamente in un disco bucato $B_r^*(z_0)$.

Sia z_0 una singolarità isolata di f , e sia $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ la serie di Laurent di f centrata in z_0 . Allora z_0 è detto:

a) **singolarità eliminabile** (o *fittizia* o *artificiale* o **apparente** o **rimovibile**) se (f non è definita in z_0 ma) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L < \infty$ o, equivalentemente, se e solo se $a_n = 0 \forall n < 0$; in questo caso la serie di Laurent di f non contiene la parte singolare perché la serie si riduce a una serie di potenze; quindi la funzione può essere prolungata in $z = z_0$ (dove non era definita) ponendo $f(z_0) = L$ o, equivalentemente $f(z_0) = a_0$; in tal modo si ottiene una funzione f olomorfa nella bolla $B_r(z_0)$ (ecco perché la singolarità si chiama eliminabile);

b) **polo** se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$; il polo è detto di **ordine** (o **molteplicità**) $m \geq 1$, m intero, se $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = L \neq 0, \infty$; analogamente, z_0 è un polo di ordine m se e solo se $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0 \forall n < -m$; in tal caso la serie di Laurent di f si riduce a una serie del tipo $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-m}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$: essa contiene cioè soltanto un numero finito (diverso da zero) di termini $z - z_0$ con esponente negativo; in particolare, un polo di ordine 1 è detto **polo semplice**; una singolarità eliminabile, informalmente, è quindi un polo di “ordine zero”;

c) **singolarità essenziale** negli altri casi, cioè se f non possiede né un limite finito né un limite infinito per z che tende a z_0 (e quindi se non è né una singolarità eliminabile, né un polo); analogamente, la singolarità è essenziale se e solo se $a_n \neq 0$ per infiniti valori negativi di n . Il fatto che non esista nessun m finito tale che $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = L$ con $L \neq 0, \infty$ a livello “informale” si potrebbe esprimere dicendo che z_0 è un polo di ordine infinito.

Osserviamo che un punto di singolarità eliminabile (proprio per il suo significato) può a volte essere definito in altri modi leggermente diversi da quelli detti sopra. Si dice che f ha una singolarità eliminabile in z_0 se il modulo $|f(z)|$ di $f(z)$ è limitato in un intorno di z_0 oppure se la

⁴⁶L'equivalenza dei due modi di caratterizzare le singolarità isolate è dimostrata, per esempio, in [3].

funzione si estende ad una funzione continua in un intorno di z_0 oppure se la funzione si estende ad una funzione olomorfa (infatti è così, come abbiamo osservato), cioè se esiste il prolungamento analitico della funzione in z_0 .

A tal proposito, enunciamo il

Teorema 2.36 ((di Riemann) sulle singolarità eliminabili). *Siano D un dominio di \mathbb{C} , I un sottoinsieme discreto di D privo di punti di accumulazione in D e $f \in \mathcal{O}(D \setminus I)$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i) f è prolungabile analiticamente (o estendibile olomorficamente) in D ;*
- ii) esiste una funzione g continua in D tale che g ristretta a $D \setminus I$ coincida con f ;*
- iii) f è limitata in modulo in un intorno di ciascun punto di I ;*
- iv) $\lim_{z \rightarrow z_s} (z - z_s)f(z) = 0 \forall z_s \in I$.*

L'affermazione *iv)*, in particolare, dice che i punti dell'insieme I sono punti di singolarità isolati (precisamente, eliminabili) per f .

Esempio 2.52. *Sia $f(z) = \frac{\sin z}{z}$; il punto $z = 0$ è punto singolare isolato. Si ha $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1$ (anticipiamo che anche in campo complesso vale la regola di de l'Hôpital), quindi tale punto è di singolarità eliminabile.*

Ciò può essere verificato anche ricavando lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$: dallo sviluppo della funzione $\sin z$ si ricava

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

che è un serie di potenze.

Esempio 2.53. *Sia $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$; il punto $z = 0$ è punto di singolarità isolata eliminabile. Infatti, applicando anche stavolta la regola*

di de l'Hôpital, si trova $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}$.

Ricaviamo ora lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$: dallo sviluppo della funzione $\cos z$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}; \end{aligned}$$

posto $2n - 2 = 2k$ lo sviluppo si può scrivere come

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+2)!};$$

anche in questo caso la parte singolare della serie non compare.

Esempio 2.54. La funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; il punto $z = 0$ è un polo del primo ordine. Infatti, sfruttando il risultato del limite calcolato nell'Esempio 2.52 si trova $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z^2} = \infty$ e $\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2} = 1$. Anche in questo caso è facile ricavare lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ in un disco bucato di centro zero:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots \end{aligned}$$

da cui si evince che c'è un solo termine in cui la potenza di z è negativa.

Esempio 2.55. Si verifica facilmente che anche la funzione $\frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z(1 - z^2)}$ ha tre poli di ordine 1: in $z = 0$, $z = 1$ e $z = -1$. La funzione $\frac{1}{(z - 1)^2}$ ha un polo doppio in $z = 1$.

Esempio 2.56. La funzione $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$ ha un polo di ordine 3 in $z = 0$; infatti $\lim_{z \rightarrow 0} z^3 f(z) = 1$.

Inoltre, sfruttando lo sviluppo noto della funzione esponenziale si ha

$$\frac{e^{z^2}}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Esempio 2.57. La funzione $e^{\frac{1}{z}}$ ha, invece, una singolarità essenziale in $z = 0$. Infatti, essa non è definita in $z = 0$, è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e non ammette limite per $z \rightarrow 0$; infatti, scrivendo

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}} = e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}}$$

e restringendoci all'asse reale si ottiene $\left[e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}} \right]_{y=0} = e^{\frac{1}{x}}$ che tende a ∞ se $x \rightarrow 0^+$, mentre tende a 0 se $x \rightarrow 0^-$ (restringendoci all'asse immaginario, invece, si ottiene $e^{-\frac{i}{y}} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$, e i limiti $\lim_{y \rightarrow 0} \cos \frac{1}{y}$ e $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ non esistono).

Inoltre, si ricava dalla serie esponenziale che la serie di Laurent di tale funzione centrata in $z = 0$ è

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{z^k}{|k|!}. \end{aligned}$$

Partendo dagli sviluppi in serie noti è facile far vedere che anche $\sin \frac{1}{z}$, $\cos \frac{1}{z}$, $\sinh \frac{1}{z}$ e $\cosh \frac{1}{z}$ hanno una singolarità essenziale in $z = 0$.

Come abbiamo già detto, una funzione intera è una funzione f olomorfa su tutto \mathbb{C} ; quindi, possiamo dire che una funzione intera è una funzione che non possiede punti singolari finiti. Di conseguenza, il punto $z_0 = \infty$ è un punto singolare isolato di f (mettiamoci nel piano complesso esteso $\widehat{\mathbb{C}}$).

In $\widehat{\mathbb{C}}$ l'eventuale singolarità all'infinito di una funzione $f(z)$ (anche non intera) si studia usando il cambiamento di variabile $z = \frac{1}{\xi}$; in tal modo, infatti, $z = \infty \Leftrightarrow \xi = 0$.

Esempio 2.58. Data $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}$, osserviamo che $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$; posto $z = \frac{1}{\xi}$ si ottiene $f(\xi) = \frac{\xi^2 + 1}{\xi(1 - \xi)}$; $f(\xi)$ ha un polo semplice in $\xi = 0$, e quindi $f(z)$ ha un polo semplice in $z = \infty$.

Diamo ora la seguente

Definizione 2.6. Una funzione olomorfa su un dominio D tranne in eventuali punti di singolarità isolati che sono tutti poli, è detta **meromorfa** (o, anche, generalmente olomorfa) su D .

Le funzioni intere formano una sottoclasse della classe delle funzioni meromorfe (esse non possiedono singolarità in \mathbb{C}). Nei poli z_j , $j \in J$, di una funzione meromorfa f in D si può porre $f(z_j) = \infty$: in tal modo si ottiene una funzione continua $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Osserviamo anche che, essendo i poli singolarità isolate, una funzione meromorfa può avere, in \mathbb{C} al più un'infinità numerabile di poli. Infatti, ogni disco $\{z : |z| < n\}$, $n = 1, 2, \dots$, non può contenere che un numero finito di poli (altrimenti esisterebbe un punto d'accumulazione finito di poli che sarebbe un punto singolare non isolato, e quindi non un polo) e questi poli possono quindi essere numerati. Le funzioni $\tan z$ e $\cot z$ sono degli esempi di funzioni meromorfe che presentano un'infinità di poli.

Anche le funzioni razionali sono funzioni meromorfe. Una **funzione razionale** (complessa) è una funzione della forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (2.41)$$

dove p e q sono polinomi complessi.

Ricordiamo che uno zero z_0 di q è detto di ordine m ($m \in \mathbb{Z}^+$) se

$$q(z) = (z - z_0)^m \tilde{q}(z)$$

per qualche polinomio \tilde{q} tale che $\tilde{q}(z_0) \neq 0$.

Mostriamo che

Teorema 2.37. *Una funzione razionale non ha singolarità essenziali.*

Dimostrazione. Sia f della forma (2.41), con p e q polinomi complessi. Le singolarità di f sono allora date dagli zeri di q , ed essendo q un polinomio, esso possiede un numero finito di zeri, e quindi ogni singolarità di f è isolata. Supponiamo che q abbia uno zero z_0 di ordine m . Allora si ha

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)^m \tilde{q}(z)}.$$

La funzione $\frac{p(z)}{\tilde{q}(z)}$ è olomorfa in un intorno di z_0 , e quindi è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di z_0 , da cui:

$$f(z) = \frac{p(z)}{\tilde{q}(z)} (z - z_0)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}, \quad |z - z_0| < r$$

per qualche r .

Allora si possono verificare due eventualità: f ha una singolarità eliminabile in z_0 (e quindi la serie ottenuta è una serie di potenze), oppure un polo di ordine, al più, m (l'ordine di un polo è finito). Ne consegue che una funzione razionale non ha singolarità essenziali. Essa è, dunque, meromorfa in \mathbb{C} . \square

Questo teorema può essere formulato dicendo che, se una funzione meromorfa presenta all'infinito un punto singolare eliminabile o un polo (cioè se in \mathbb{C} le sue sole singolarità sono dei poli) allora essa è razionale.

Osserviamo che, data una funzione razionale $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $f(z)$ avrà valore ∞ in uno zero di $q(z)$ e quindi, considerata come una funzione a valori nel piano esteso, come tale sarà continua. Se consideriamo $f(z)$ da $\widehat{\mathbb{C}}$ in $\widehat{\mathbb{C}}$, si potrebbe definire $f(\infty)$ come $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, ma questa definizione non determinerebbe l'ordine di uno zero o di un polo a ∞ ; quindi, come già accennato, è preferibile considerare la funzione $f\left(\frac{1}{z}\right)$, che possiamo riscrivere come funzione razionale $g(z)$ e porre

$$f(\infty) = g(0).$$

Se $g(0) = 0$ o $g(0) = \infty$, l'ordine dello zero o del polo all'infinito di $f(z)$ è definito come ordine dello zero o del polo di $g(z)$ nell'origine. Usando la notazione

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m}$$

si ottiene

$$g(z) = z^{m-n} \frac{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \cdots + b_m}.$$

Se $m > n$, $f(z)$ ha uno zero di ordine $m - n$ a ∞ , se $m < n$ il punto all'infinito è un polo di ordine $m - n$, e se $m = n$ $f(\infty) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0, \infty$.

Ora, contando il numero di zeri di una funzione razionale nel piano esteso, si trova che il numero di zeri, inclusi quelli all'infinito, è pari al $\max(m, n)$, e lo stesso vale per i poli; il numero comune di zeri e poli è detto **ordine** della funzione razionale.

Se c è una costante, la funzione $f(z) - c$ ha gli stessi poli di $f(z)$ e, di conseguenza, lo stesso ordine. Gli zeri di $f(z) - c$ sono le radici dell'equazione $f(z) = c$ e, se le radici sono contate con la dovuta molteplicità (tante volte quante l'ordine dello zero indica) si ha che *una funzione razionale $f(z)$ di ordine p ha p zeri e p poli, e ogni equazione $f(z) = c$ ha esattamente p radici.*

In particolare, una funzione razionale di ordine 1 è una frazione lineare (**trasformazione lineare**) della forma

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$. L'equazione $S(z) = w$ ha esattamente una radice e

$$z = S^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

è la trasformazione inversa di $S(z)$.

La trasformazione lineare $z + a$ è detta **traslazione** e $\frac{1}{z}$ è detta **inversione**; le traslazioni sono trasformazioni lineari senza punti fissi (cioè punti z tali che $f(z) = z$), ma il punto all'infinito può essere considerato un punto fisso; l'inversione è la trasformazione lineare che scambia

fra loro 0 e ∞ .

Osserviamo anche che, se z_0 è un polo di ordine m per una funzione $f(z)$, allora z_0 è uno zero di ordine m per la funzione $\frac{1}{f(z)}$. Infatti, se z_0 è un polo di ordine m , allora lo sviluppo di Laurent di f in un intorno bucato di z_0 sarà $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$; moltiplicando primo e secondo membro dello sviluppo per $(z - z_0)^m$ si trova

$$f(z)(z - z_0)^m = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-m+k}(z - z_0)^k,$$

cioè $f(z)(z - z_0)^m = g(z)$, dove $g(z)$ è una funzione olomorfa in z_0 e tale che $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$ e non nulla in un intorno di z_0 . Allora anche la funzione $\frac{1}{g(z)}$ è olomorfa in z_0 e, dalla relazione $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{g(z)}(z - z_0)^m$

si ricava che z_0 è uno zero di ordine m per $\frac{1}{f(z)}$.

Viceversa, se z_0 è uno zero di ordine m per $f(z)$, allora z_0 è un polo di ordine m per $\frac{1}{f(z)}$. Infatti, se z_0 è uno zero di ordine m , allora esiste un intorno di z_0 in cui si ha

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k}(z - z_0)^k = (z - z_0)^m g(z);$$

moltiplicando primo e secondo membro dell'espressione scritta sopra per $(z - z_0)^{-m}$ si ottiene $\frac{f(z)}{(z - z_0)^m} = g(z)$, dove $g(z)$ è una funzione olomorfa in z_0 e tale che $g(z_0) = a_m \neq 0$ e non nulla in un intorno di z_0 ; allora anche la funzione $\frac{1}{g(z)}$ è olomorfa in z_0 e, dalla relazione

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{g(z)(z - z_0)^m}$$

si ricava che z_0 è un polo di ordine m per $\frac{1}{f(z)}$.

Consideriamo ora, più in generale, il quoziente $\frac{f(z)}{g(z)}$ di due funzioni olomorfe (non necessariamente polinomi) in un dominio D : essa è una funzione meromorfa che ha dei poli se $g(z)$ non è identicamente nulla. Gli unici poli possibili sono gli zeri di g , ma potrebbe capitare che f e g abbiano uno zero comune; tale zero potrebbe allora essere una

singularità eliminabile (in tal caso il valore del quoziente deve essere determinato per continuità, cioè si applicherà la regola di de l'Hôpital). Più in generale, la somma, il prodotto e il quoziente di due funzioni meromorfe è una funzione meromorfa.

Come abbiamo già anticipato, le regole di de l'Hôpital sulle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ si estendono anche a funzioni complesse; la dimostrazione è più semplice del caso reale, grazie all'uso degli sviluppi in serie.

Proposizione 2.8. *Siano $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni olomorfe (rispettivamente, meromorfe) in $D \subseteq \mathbb{C}$, e sia $z_0 \in D$ uno zero di ordine m per f e uno zero di ordine p per g (rispettivamente, un polo di ordine m per f e un polo di ordine p per g). Allora*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \quad e \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

esistono e sono uguali.

Dimostrazione. Consideriamo prima la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sia z_0 uno zero di ordine m per f e uno zero di ordine p per g ; essendo z_0 una singularità isolata per $\frac{f(z)}{g(z)}$, esisterà un intorno bucato di z_0 in cui, per definizione di zero, la funzione $\frac{f(z)}{g(z)}$ si potrà esprimere nella forma

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)^m \phi(z)}{(z - z_0)^p \psi(z)} = (z - z_0)^{m-p} \frac{\phi(z)}{\psi(z)},$$

dove $\phi(z)$ e $\psi(z)$ sono funzioni olomorfe in un intorno di z_0 e tali che $\phi(z_0) \neq 0$ e $\psi(z_0) \neq 0$. Dunque si ha che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > p, \\ \frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)} & \text{se } m = p, \\ \infty & \text{se } m < p. \end{cases}$$

Consideriamo ora il rapporto delle derivate:

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{g'(z)} &= \frac{m(z-z_0)^{m-1}\phi(z) + (z-z_0)^m\phi'(z)}{p(z-z_0)^{p-1}\psi(z) + (z-z_0)^p\psi'(z)} \\ &= \frac{(z-z_0)^{m-1}[m\phi(z) + (z-z_0)\phi'(z)]}{(z-z_0)^{p-1}[p\psi(z) + (z-z_0)\psi'(z)]} \\ &= (z-z_0)^{m-p} \frac{m\phi(z) + (z-z_0)\phi'(z)}{p\psi(z) + (z-z_0)\psi'(z)},\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \begin{cases} 0 & \text{se } m > p, \\ \frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)} & \text{se } m = p, \\ \infty & \text{se } m < p. \end{cases}$$

In maniera analoga si considera il caso $\frac{\infty}{\infty}$ una volta osservato che, se z_0 è un polo per entrambe le funzioni f e g , di ordine m e p rispettivamente, in un disco bucato di z_0 si ha

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^p},$$

con $\phi(z)$ e $\psi(z)$ funzioni olomorfe in un intorno di centro z_0 e tali che $\phi(z_0) \neq 0$ e $\psi(z_0) \neq 0$. \square

Osserviamo che una funzione meromorfa può essere sviluppata in serie di Taylor e di Laurent coincidenti intorno a un qualsiasi punto che non sia un suo polo (la convergenza si estenderà fino al polo più vicino), come accade per la funzione dell'Esempio 2.47. Intorno ad un polo la serie di Laurent convergerà nella corona circolare che esclude il polo e "sfiora" l'eventuale polo più vicino al centro della corona.

Esempio 2.59. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$; essa è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$; $z = i$ e $z = -i$ sono poli di ordine 1. Infatti, $\lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{1+z^2} = \infty$ e

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i) \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z \pm i} = \frac{\pm 1}{2i}.$$

Proviamo ora a scrivere la serie di Laurent di f in $B_2^*(i)$, cioè nel più grande intorno sferico di i che non contiene l'altra singolarità $-i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \cdot \frac{1}{2i} \\ &= \frac{1}{z-i} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) \frac{1}{1-(z-i)\frac{i}{2}} = \left(-\frac{i}{2}\right) \frac{1}{z-i} \sum_{k=0}^{\infty} \left((z-i)\frac{i}{2}\right)^k \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} \left(1 + \frac{i}{2}(z-i) - \frac{1}{4}(z-i)^2 - \frac{i}{8}(z-i)^3 + \dots\right) \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z-i) - \frac{1}{16}(z-i)^2 + \dots \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right)^{k+2} (z-i)^k, \end{aligned}$$

dove per scrivere la serie di Taylor è stata usata la stima $\left|\frac{z-i}{2i}\right| = \frac{1}{2}|z-i| < 1$, che è vera se $z \in B_2(i)$. Quindi lo sviluppo di Laurent di $f(z)$ centrato in $z_0 = i$ converge nel disco bucato $B_2^*(i)$.

Un fatto importante da sottolineare è che una funzione sviluppabile in serie di Laurent non può essere limitata “vicino” a una sua singolarità isolata che sia un polo o una singolarità essenziale.

Proposizione 2.9. *Sia f una funzione con una singolarità isolata non eliminabile in z_0 . Allora f è non limitata in ogni intorno di z_0 .*

Dimostrazione. Sia $f(z)$ una funzione monodroma e olomorfa in una corona circolare di centro z_0 , con z_0 polo o singolarità essenziale. Allora esistono coefficienti della parte principale della serie di Laurent non nulli, della forma (dalla (2.37))

$$a_{-N} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-N+1}} d\xi, \quad N \geq 1;$$

possiamo scegliere la curva chiusa γ all'interno dell'anello di analiticità (per comodità sia la circonferenza di centro z_0 e raggio r). Se la funzione fosse limitata ($|f(\xi)| < M$) si avrebbe

$$\begin{aligned} |a_{-N}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-N+1}} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{r^{-N+1} e^{(-N+1)it}} re^{it} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})|}{r^{-N}} dt; \end{aligned}$$

allora si avrebbe $|a_{-N}| \leq r^N M \forall r$ e dunque, anche per $r \rightarrow 0$, cioè $a_{-N} = 0$ per N arbitrario; ma, essendo nullo il generico coefficiente della parte principale della serie di Laurent, tale serie coinciderebbe con la serie di Taylor, e z_0 sarebbe un punto singolare eliminabile, contrariamente all'ipotesi. \square

Inoltre, non solo una funzione olomorfa non può essere limitata “vicino” a una sua singolarità isolata che non sia una singolarità eliminabile: se la singolarità isolata non è un polo, ma una singolarità essenziale, allora vale il

Teorema 2.38 (di Casorati). *In ogni intorno arbitrariamente piccolo di una singolarità isolata essenziale, una funzione olomorfa f assume valori arbitrariamente vicini a qualsiasi numero complesso.*

In altri termini, se f è olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$, U aperto, e se z_0 è un punto singolare essenziale per f , dato un qualunque numero complesso w , e comunque presi $\epsilon, \delta > 0$, esiste $z \in U$, $z \neq z_0$, tale che si abbia $|z - z_0| < \delta$ e $|f(z) - w| < \epsilon$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un valore $\alpha \in \mathbb{C}$ al quale la funzione f non può “avvicinarsi”, cioè tale che, almeno per un certo $\epsilon > 0$ e un certo $\delta > 0$, se $0 < |z - z_0| < \delta$, si abbia $|f(z) - \alpha| \geq \epsilon > 0$. Allora la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$ è definita nel disco bucato $B_\delta^*(z_0)$, ha zeri in corrispondenza dei poli di f ed è tale che $|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}$. Quindi per il Teorema di Riemann sulle singolarità

eliminabili, $g(z)$ può essere prolungata analiticamente in tutto il disco $B_\delta(z_0)$. Esprimiamo ora $f(z)$ in funzione di $g(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + \alpha \quad \forall z \in B_\delta^*(z_0);$$

se $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$, segue che f ha un polo in z_0 , che è assurdo; se $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$, allora z_0 è una singolarità eliminabile per f , nuovamente assurdo. \square

Osserviamo che se f è una funzione intera e z_0 è il punto all'infinito, allora il Teorema di Casorati afferma che f assume valori arbitrariamente vicini a qualunque numero complesso e a ∞ quando $z \rightarrow \infty$.

Il teorema precedente è noto talvolta anche come Teorema di Weierstrass o Teorema di Casorati-Weierstrass.⁴⁷

Sostanzialmente esso afferma che “vicino” a un punto di singolarità essenziale z_0 la funzione ha un comportamento “caotico” (infatti il limite di $f(z)$ per $z \rightarrow z_0$ non esiste mai, nè finito nè infinito), che dipende da come ci si “avvicina” a z_0 , come mostra il seguente

Esempio 2.60. Consideriamo nuovamente la funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Se $z = x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(z) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(z) = 0$.

Per $z = iy$ il $\lim_{y \rightarrow 0} f(z)$ non esiste.

Fissiamo ora $w \in \mathbb{C}$, $w = \rho e^{i\theta}$; consideriamo la successione

$$z_n = \frac{1}{\log \rho + i(\theta + 2\pi n)}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

si ha $z_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$f(z_n) = e^{\log \rho + i(\theta + 2\pi n)} = \rho e^{i\theta} e^{2\pi n} = w \quad \forall n,$$

cioé, fissato un numero complesso w , esiste una successione z_n tale che $f(z_n)$ sia addirittura costante (uguale a w).

⁴⁷Il Teorema di Casorati-Weierstrass afferma che: Sia $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$. Le tre affermazioni sono equivalenti:

i) z_0 è una singolarità essenziale di f ;

ii) per ogni intorno U di z_0 in D l'insieme $f(U \setminus \{z_0\})$ è denso in \mathbb{C} ;

iii) esiste una successione $\{z_n\} \in D \setminus \{z_0\}$ convergente a z_0 tale che la successione $\{|f(z_n)|\}$ non ha limite (si veda l'Esempio 2.59 poco più avanti).

Inoltre, si dimostra anche che se z_0 è una singolarità essenziale, allora $\liminf_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$ e $\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Dal Teorema di Casorati segue anche che, se l'equazione $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$, ammette infinite soluzioni in ogni intorno del punto z_0 , allora o f è costante oppure z_0 è una singolarità isolata essenziale per f . Infatti, se z_0 è un punto regolare per f , allora $f(z_0) = c$, e per il Principio di identità f è costante; se z_0 è un punto singolare, esso non può essere un polo.

Ancora più forte è il

Teorema 2.39 (di Picard). *In un qualunque intorno (arbitrariamente piccolo) di una sua singolarità isolata essenziale z_0 , una funzione ologomorfa f assume (infinite volte) tutti i valori complessi possibili con, al più, una eccezione.*⁴⁸

Cioè, per ogni $\delta > 0$, se z_0 è un punto singolare essenziale per f , esiste al più un numero complesso λ tale che $f(B_\delta^*(z_0)) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$.

Anche il Teorema di Picard può essere enunciato dal punto di vista delle equazioni: se z_0 è un punto singolare essenziale per f , allora l'equazione $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$, ha infinite soluzioni in ogni intorno di z_0 tranne che, al più, per un valore di c .

Per esempio, l'equazione $e^{\frac{1}{z}} = c$ ha infinite soluzioni in ogni intorno di $z_0 = 0$ se $c \neq 0$, mentre non ha soluzioni se $c = 0$.

Possiamo citare, infine, il

Teorema 2.40 (di Picard per funzioni meromorfe). *Una funzione meromorfa in \mathbb{C} che omette tre valori distinti $a, b, c \in \mathbb{C}$ (cioè che assume tutti i valori del piano complesso tranne questi tre) è costante.*

⁴⁸Spesso si distingue questo teorema (detto “grande” Teorema di Picard) dal “piccolo” Teorema di Picard: *una funzione intera non costante assume valori nell'intero piano complesso o nel piano complesso privato di un punto.*

Quest'ultimo è una generalizzazione del Teorema di Liouville e del Teorema di Casorati-Weierstrass per le funzioni trascendenti intere.

2.16 Il teorema dei residui

Le singolarità di una funzione olomorfa possono essere collegate a integrali curvilinei in \mathbb{C} .

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso e $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_0\})$. Allora f è sviluppabile in serie di Laurent centrata in z_0 . Il primo coefficiente della parte principale della serie di Laurent, a_{-1} , è detto **residuo** della funzione f nel punto singolare z_0 e viene denotato come

$$\operatorname{Res} f(z_0) \quad \text{o} \quad \operatorname{Res} f|_{z=z_0} \quad \text{o} \quad \operatorname{Res}(f(z); z_0).$$

Dalla (2.37) si ha

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,$$

dove γ è una qualunque curva di Jordan contenuta nel dominio di olomorfia di f (che contiene z_0), percorsa in senso antiorario (per il teorema di invarianza dell'integrale per una deformazione omotopa del contorno⁴⁹). Da quest'ultima relazione si ricava

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0);$$

questa formula permette di calcolare un integrale di contorno includente z_0 semplicemente calcolando il residuo della funzione in z_0 .

Più in generale, si può considerare una funzione olomorfa in un qualunque aperto che contiene la singolarità isolata z_0 ; considerata allora la serie di Laurent nel disco bucato $B_r^*(z_0)$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}(z_0)} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}(z_0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma_{\rho}(z_0)} (z - z_0)^n dz, \end{aligned}$$

dove $\gamma_{\rho}(z_0)$ indica la circonferenza di centro z_0 e raggio $\rho < r$ e dove si è usato il fatto che la serie converge uniformemente dentro il disco.

⁴⁹Ricordiamo che possiamo chiamare anche così il Teorema di Cauchy per circuiti equivalenti.

Ora, ricordando che

$$\int_{\gamma_\rho(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } n = -1, \end{cases}$$

si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z) dz = a_{-1};$$

questa osservazione spiega il nome del residuo di f in z_0 : di tutta la serie di Laurent di f in z_0 , “quello che resta” (appunto, il residuo) calcolando l'integrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho(z_0)} f(z) dz$ è solamente il coefficiente a_{-1} .

Si ha che se f è olomorfa in z_0 , il residuo è nullo, ma non vale il viceversa.

Esempio 2.61. *La funzione $f(z) = \frac{1}{z^2}$ ha residuo nullo in $z = 0$ pur non essendo olomorfa in zero ($z = 0$ è un polo di ordine 2). Per vederlo si può fare il calcolo diretto o ricordare il solito risultato noto $\int_{\gamma(0)} z^{-2} dz = 0$.*

Dimostriamo il

Teorema 2.41 (dei residui). *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio semplicemente connesso e $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$ e γ una curva di Jordan interamente contenuta in D e contenente al suo interno le singolarità isolate z_1, \dots, z_n . Allora*

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j).$$

Dimostrazione. Indichiamo con Ω il dominio racchiuso dalla curva γ . Sia $\epsilon > 0$ tale che

$$\epsilon < \min\{\text{dist}(z_j, \partial\Omega), \text{dist}(z_j, z_l) : j \neq l\}, \quad j, l = 1, \dots, n$$

e tale che, indicando con B_j la bolla $B_\epsilon(z_j)$, $j = 1, \dots, n$, queste bolle siano a due a due disgiunte e abbiano raggio sufficientemente piccolo

da essere strettamente contenute in Ω . Posto $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \cup_{j=1}^n \overline{B_\epsilon(z_j)}$, risulta che Ω_ϵ è un dominio limitato, f è olomorfa in Ω_ϵ e di classe C^1 fino alla sua chiusura, e quindi per il Teorema di Cauchy si ha

$$\int_{\partial^+ \Omega_\epsilon} f(z) dz = 0.$$

La frontiera di Ω_ϵ è percorsa positivamente percorrendo in senso antiorario la curva γ e in senso orario le circonferenze $\partial B_\epsilon(z_j)$ (non è altro che l'applicazione del Teorema di Cauchy per domini molteplicemente connessi). Quindi, per le proprietà degli integrali curvilinei si ottiene

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\partial^+ B_\epsilon(z_j)} f(z) dz = \sum_{j=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_j).$$

□

Naturalmente, come sempre, il teorema precedente si può formulare considerando una funzione olomorfa in un qualunque aperto U (non necessariamente semplicemente connesso) e prendendo come γ una curva di Jordan il cui interno è contenuto in U , fatta eccezione per le eventuali singolarità isolate.

L'importanza di questo teorema è data dal fatto che riconduce il calcolo di una quantità globale (l'integrale di una funzione olomorfa lungo la frontiera di un dominio) a quello di quantità locali (i residui della funzione nei suoi punti singolari).

Una formulazione più generale del Teorema dei residui coinvolge anche l'indice di avvolgimento della curva (che interviene solo se i cammini vengono percorsi in sensi opposti o più di una volta)⁵⁰, cioè se si considerano curve non semplici:

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{ind}(\gamma; z_j) \operatorname{Res}(f; z_j);$$

in questo caso il residuo va moltiplicato per l'indice corrispondente, che conta appunto il numero di giri che la curva fa attorno a z_j in

⁵⁰L'indice di avvolgimento interviene anche qualora si introducano *cicli* e curve *omologhe* a zero (si veda [1], pag. 150).

sensu antiorario; nel caso considerato precedentemente nel teorema, $\text{ind}(\gamma; z_j) = 1 \forall j$.

L'utilità del Teorema dei residui per il calcolo di integrali curvilinei complessi si nota quando si riescano a trovare dei metodi semplici per calcolare $\text{Res}(f; z_0)$ senza passare tramite la serie di Laurent.

Il caso più semplice (banale) si ha quando z_0 è una singolarità isolata eliminabile: in tal caso, infatti si ha $\text{Res}(f; z_0) = 0$ dato che la serie di Laurent di f contiene solo la parte regolare.

Ricaviamo ora le formule per il calcolo del residuo di una funzione f in un polo. Consideriamo prima il caso di un polo semplice z_0 . In tal caso, in un intorno di z_0 la serie di Laurent di f è

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

da cui

$$f(z)(z - z_0) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1} \longrightarrow a_{-1} \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

La formula per il calcolo del residuo se z_0 è un polo del primo ordine è

$$\boxed{\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).}$$

Si dimostra, anzi, il seguente risultato più generale: *se z_0 è una singolarità isolata di f e se esiste finito il $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$, allora tale limite è il $\text{Res}(f; z_0)$.*

Supponiamo ora che z_0 sia un polo di ordine m di f . In un intorno di z_0 si ha

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n;$$

moltiplichiamo entrambi i membri di questo sviluppo per $(z - z_0)^m$ per eliminare le potenze negative del secondo membro:

$$f(z)(z - z_0)^m = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots$$

$$+a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m};$$

nell'ultimo membro compare la somma di un polinomio di grado $m - 1$ e della funzione $g(z)(z - z_0)^m$ (con $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$), che ha uno zero di ordine m in $z = z_0$ e quindi ha tutte le derivate fino all'ordine $m - 1$ nulle; deriviamo quindi $m - 1$ volte per isolare il termine a_{-1} e facciamo tendere z a z_0 . Otteniamo la seguente formula per il residuo in un polo di ordine m :

$$\boxed{\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].}$$

Non esiste una formula simile per calcolare il residuo in un punto singolare essenziale. In questo caso, in generale, bisogna calcolare la parte principale della serie di Laurent.

È poi frequente il caso in cui $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ e z_0 è uno zero isolato di h . Se $g(z)$ e $h(z)$ sono olomorfe in un intorno di z_0 e se $h(z_0) = 0$, $g(z_0) \neq 0$ e $h'(z_0) \neq 0$; in tal caso, applicando la regola di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) + (z - z_0)g'(z)}{h'(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Quindi

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (2.42)$$

Osserviamo, infine, che se $f(z)$ è una funzione pari e $z_0 = 0$ è una singolarità isolata per f , allora $\text{Res}(f; z_0) = 0$; infatti $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{2n}z^{2n}$, e quindi $a_{-1} = 0$. Naturalmente questo criterio serve per calcolare il residuo nell'origine: una funzione pari infatti potrebbe avere singolarità isolate in punti diversi dall'origine, in cui il residuo non è nullo.

Esempio 2.62. La funzione $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1}$ ha due poli del primo ordine in $z = \pm i$. si ha

$$\text{Res}(f(z); i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^z}{z + i} = \frac{e^i}{2i}$$

e

$$\operatorname{Res}(f(z); -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^z}{z - i} = -\frac{e^{-i}}{2i}.$$

Esempio 2.63. Data la funzione $f(z) = \frac{z^2 + 3}{z^6 + 1}$ calcoliamo il suo residuo in $z_0 = i$. Dovremmo cioè calcolare

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^2 + 3}{z^6 + 1}$$

scomponendo il denominatore per poi poter semplificare; il procedimento non è difficile ma risulta laborioso. In tal caso però risulta utile la formula (2.42):

$$\operatorname{Res}(f; i) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{(z^2 + 3)|_{z=i}}{(6z^5)|_{z=i}} = \frac{1}{3i}.$$

Esempio 2.64. Calcoliamo

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z^4 - 1)(z + 2)^2}; 1\right) \quad e \quad \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{(z^4 - 1)(z + 2)^2}; -2\right)$$

Il punto $z_0 = 1$ è un polo semplice per la funzione assegnata; stavolta, però, usare la (2.42) non è molto conveniente; è più semplice scomporre e calcolare il

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{e^z}{(z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)(z + 2)^2} = \frac{e}{36}.$$

Il punto $z_0 = -2$ è invece un polo di ordine 2; quindi

$$\operatorname{Res}(f(z); -2) = \frac{d}{dz} \left| (z + 2)^2 f(z) \right|_{z=-2} = \frac{d}{dz} \left| \frac{e^z}{z^4 - 1} \right|_{z=-2} = \frac{47}{289e^2}.$$

Esempio 2.65. Calcoliamo il

$$\operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z^2}}; 0\right);$$

La funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ ha una singolarità essenziale in zero, e per le singolarità essenziali non esistono formule per il calcolo del residuo. Potremmo scrivere la serie di Laurent di f oppure osservare che, essendo $f(z)$ pari, il residuo richiesto è nullo.

Consideriamo ora una funzione con un punto singolare isolato all'infinito. Abbiamo già visto che la singolarità isolata all'infinito di una funzione $f(z)$ si studia usando il cambiamento di variabile $z = \frac{1}{\xi}$. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f(z) \in \mathcal{O}(U)$; allora esiste $R > 0$ tale che $\{z : |z| > R\} \subset U$; quindi la funzione $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ è definita nel disco bucato $B_{\frac{1}{R}}^*(0)$ e si dirà, allora, che il punto all'infinito è regolare per $f(z)$ se il punto $\xi = 0$ è una singolarità eliminabile per la funzione $g(\xi)$, che il punto all'infinito è un polo di ordine m per $f(z)$ se il punto $\xi = 0$ è un polo di ordine m per $g(\xi)$ e che esso è essenziale per $f(z)$ se $\xi = 0$ è una singolarità essenziale per $g(\xi)$.

Lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione $f(z)$ in un intorno del punto all'infinito è della forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad |z| > R. \quad (2.43)$$

Il coefficiente $-a_{-1}$ di questa serie si chiama **residuo all'infinito** di f e, dalla (2.37), integrando termine a termine lungo γ^- , esso risulta dato da

$$\text{Res}(f; \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z) dz \quad (2.44)$$

o, analogamente, da

$$\text{Res}(f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz,$$

dove γ è una qualunque circonferenza di centro zero e raggio $\tilde{R} > R$ (cioè contenuta nell'intorno di ∞ considerato), che nella seconda formula viene percorsa in senso orario (orientata in modo tale che l'intorno del punto all'infinito $\{z : R < |z| < \infty\}$ resti a sinistra del senso del

percorso).

Nello sviluppo (2.43) la serie

$$\cdots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots$$

soltanto formalmente è analoga alla serie di Laurent di f centrata in zero; infatti, qui z tende a ∞ e non a zero; la parte $\cdots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0$ è detta *parte regolare* della serie, mentre $a_1z + a_2z^2 + \cdots$ è detta *parte singolare*; risulta, quindi, che le parti regolare e singolare si scambiano all'infinito, a parte il termine a_0 . Proprio per il fatto che nello sviluppo in serie di Laurent (2.43) di f in un intorno del punto all'infinito le potenze negative figurano nella parte regolare e non nella parte principale (e quindi il coefficiente a_{-1} in questo caso si trova nella parte regolare) si ha che, contrariamente ai punti singolari finiti, il residuo all'infinito può non essere nullo anche se $z = \infty$ è un punto regolare (cioè una singolarità eliminabile).

Il punto $z_0 = \infty$ sarà una singolarità apparente se la parte singolare non c'è; sarà una singolarità polare se la parte singolare è costituita da un numero finito di termini, e quindi se essa è un polinomio in z (il grado del polinomio sarà l'ordine del polo a ∞), e sarà una singolarità essenziale negli altri casi.

In particolare, consideriamo una funzione intera: il punto singolare isolato all'infinito può essere di una delle tre tipologie viste. Se esso è un punto singolare eliminabile (cioè se $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L < \infty$), allora f è costante. Se $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, il punto all'infinito è un polo; allora la parte principale dello sviluppo di f in serie di Laurent nell'intorno del punto all'infinito è un polinomio $g(z)$. Sottraendo ad f la sua parte principale si ottiene ancora una funzione intera $f - g$, ma il cui punto all'infinito è un punto singolare eliminabile; allora, $f - g$ è una costante, e si conclude che una funzione intera che presenta un polo all'infinito è necessariamente un polinomio. Precisamente, un polinomio di grado n avrà all'infinito un polo di ordine n .

Le funzioni intere che non siano polinomi, infine, presentano un punto singolare essenziale all'infinito: esse sono dette *funzioni intere trascen-*

*dent*i; tali sono, ad esempio, le funzioni (trascendenti elementari) e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$ (si deduce dall'Esempio 2.57).

Dalla (2.43) si ricava inoltre lo sviluppo in serie di Laurent di $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ nel disco bucato $B_{\frac{1}{R}}^*(0)$:

$$g(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \xi^{-n}, \quad 0 < |\xi| < \frac{1}{R}.$$

Operando il cambio di variabile $z = \frac{1}{\xi}$, essendo $dz = -\frac{1}{\xi^2} d\xi$, dalla (2.44) si ricava

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}^+} -\frac{1}{\xi^2} f\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi,$$

dove, se γ era la curva di parametrizzazione $z(t) = \tilde{R}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\tilde{\gamma}$ è la circonferenza di equazione $\xi(t) = \frac{1}{\tilde{R}}e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.⁵¹ Quindi, per calcolare il residuo di f all'infinito si può usare anche la formula espressa in funzione di $g(\xi)$:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f(z); \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{\xi^2} g(\xi); 0\right)}.$$

Segue quindi da quest'ultima formula che una funzione pari ha residuo all'infinito nullo (nel caso in cui abbia senso definirlo).

Esempio 2.66. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{1+z}$ e calcoliamo i suoi residui. Poiché f è olomorfa tranne che nel punto $z_0 = -1$, che è un polo semplice, si ha

$$\operatorname{Res}(f(z); z) = 0 \quad \forall z \neq -1;$$

inoltre

$$\operatorname{Res}(f(z); -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z+1} = 1,$$

⁵¹Osserviamo che il cambio di variabile che trasforma z nella sua inversa $\xi = \frac{1}{z}$ è una trasformazione conforme.

che si può ricavare anche osservando che la funzione assegnata è proprio $f(z) = \frac{1}{z - (-1)}$, cioè è già la parte singolare dello sviluppo di Laurent della funzione stessa.

Infine, essendo (per $\xi \neq 0$)

$$-\frac{1}{\xi^2}g(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi}} = -\frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 + \xi} = -\frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n,$$

dove lo sviluppo in serie geometrica vale nell'intorno bucato di zero $|\xi| < 1$; dunque

$$-\frac{1}{\xi^2}g(\xi) = -\frac{1}{\xi} [1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \dots],$$

da cui si ricava $\text{Res}\left(-\frac{1}{\xi^2}g(\xi); 0\right) = \text{Res}(f(z); \infty) = -1$. Lo stesso residuo si può calcolare anche osservando che il punto $\xi = 0$ è un polo semplice per la funzione $-\frac{1}{\xi^2}g(\xi) = -\frac{1}{\xi(\xi + 1)}$, e quindi, dalla formula per il calcolo del residuo in polo semplice, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \cdot \left(-\frac{1}{\xi^2}g(\xi)\right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} -\frac{1}{\xi + 1} = -1.$$

Oppure, ancora, si può considerare direttamente lo sviluppo di $f(z)$ in un intorno di ∞ :

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z\left(1 + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z\left(1 - \frac{-1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n,$$

valido in $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, cioè per $|z| > 1$; risulta

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \left[1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots\right],$$

da cui $\text{Res}(f(z); \infty) = -1$. Osserviamo che la somma dei residui di $f(z)$ è $\text{Res}(f(z); -1) + \text{Res}(f(z); \infty) = 0$.

Il risultato della somma dei residui nell'ultimo esempio non è casuale. Vale, infatti, il

Teorema 2.42 (della somma dei residui). *Sia f una funzione olomorfa in tutto \mathbb{C} tranne in un numero finito di punti z_1, \dots, z_n che sono singolarità isolate. Allora la somma dei residui di tutti i punti singolari, al finito e all'infinito, è nulla:*

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; z_j) + \operatorname{Res}(f; \infty) = 0.$$

Dimostrazione. Sia γ_R la circonferenza centrata nell'origine e raggio

$$R > \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\},$$

cioè di raggio sufficientemente grande da contenere tutti i punti singolari finiti. Dal teorema dei residui si ha

$$\oint_{\gamma_R^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; z_j).$$

D'altra parte, nell'intorno di infinito $\{z : |z| > \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}\}$ per definizione si ha

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^+} f(z) dz,$$

da cui la tesi. □

Un'osservazione utile per i calcoli è la seguente: se una funzione monodroma con un numero finito di singolarità isolate tende a zero per $|z| \rightarrow \infty$ più velocemente di $\frac{1}{|z|}$ (cioè se si comporta asintoticamente come $\frac{1}{|z|^m}$, con $m \geq 2$), allora la somma di tutti i residui (al finito) della funzione è nulla. Infatti, calcolando l'integrale della funzione su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $r = |z|$ abbastanza grande da includere tutte le singolarità al finito, per il teorema dei residui tale integrale da una parte deve essere proporzionale alla somma dei residui

$$\int_{\gamma_r(0)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f; z_j)$$

e dall'altra può essere maggiorato da $2\pi rM$, dove M è il valore massimo assunto dal modulo della funzione lungo la curva:

$$\left| \int_{\gamma_r(0)} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it})rie^{it}| dt \leq 2\pi rM(r).$$

Nell'ipotesi fatta, però, si ha $\lim_{r \rightarrow \infty} Mr = 0$, e quindi la somma di tutti i residui (escluso quello all'infinito) è zero. Da ciò segue allora anche che, se la funzione f ha le caratteristiche dette, la somma dei residui delle singolarità interne a una qualsiasi curva di Jordan è pari alla somma dei residui delle singolarità esterne alla curva, cambiata di segno. Si ricava anche che il residuo all'infinito di f è nullo, sia come conseguenza del teorema della somma dei residui, sia osservando che

$$-\frac{1}{\xi^2}g(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}f\left(\frac{1}{\xi}\right) \sim \xi^{m-2} \quad \text{per } \xi \rightarrow 0;$$

se $m \geq 2$ allora $\xi = 0$ è una singolarità eliminabile per $g(\xi)$, e dunque ∞ è una singolarità eliminabile per $f(z)$.

Una conseguenza della formula dei residui è il seguente

Teorema 2.43 (dell'indicatore logaritmico). *Sia f olomorfa in un dominio D tranne che in un numero finito di punti $\{z_1, \dots, z_p\}$ che sono tutti poli (cioè f è meromorfa in D) di ordine, rispettivamente, m_1, \dots, m_p , e sia γ una curva di Jordan contenuta in D , su cui f non si annulla, e che contiene al suo interno tutti i poli z_j , $j = 1, \dots, p$, e gli zeri w_1, \dots, w_q di f di ordine, rispettivamente, n_1, \dots, n_q . Allora vale la formula*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^q n_j - \sum_{j=1}^p m_j, \quad (2.45)$$

detta **formula dell'indicatore logaritmico**.

Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che, dato che f non ha zeri su γ , il numero degli zeri di f nell'interno della curva è finito. Infatti, se per assurdo non fosse così, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass⁵² esisterebbe un punto di accumulazione di zeri, che non può essere perché

⁵²In \mathbb{R}^2 ogni insieme limitato e infinito ammette almeno un punto di accumulazione.

l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa è discreto.

Osserviamo anche che punti singolari per la funzione $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ sono dati dagli zeri e dai poli di f ; negli altri punti, infatti, f' esiste ed è olomorfa, e f non si annulla. Allora, per la formula dei residui si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^q \operatorname{Res}(g; w_j) + \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}(g; z_j). \quad (2.46)$$

Calcoliamo i residui di g relativi ai punti w_j , $j = 1, \dots, q$: essendo ogni w_j uno zero di ordine n_j , esiste un intorno $B_{\epsilon_j}(w_j)$ in cui $f(z) = (z - w_j)^{n_j} \phi(z)$, dove ϕ è una funzione olomorfa in tale intorno, con $\phi(w_j) \neq 0$ e non nulla in tutto l'intorno (basta prendere il raggio sufficientemente piccolo). Dunque in $B_{\epsilon_j}(w_j)$ si ha $f'(z) = n_j(z - w_j)^{n_j-1} \phi(z) + (z - w_j)^{n_j} \phi'(z)$, da cui si ricava

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j}{z - w_j} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)};$$

allora w_j è un polo di ordine 1 per g , e quindi si ha, per la formula integrale di Cauchy e per il teorema di Cauchy

$$\operatorname{Res}(g; w_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial^+ B_{\epsilon_j}(w_j)} \left(\frac{n_j}{z - w_j} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right) dz = n_j.$$

D'altra parte, essendo ogni z_j un polo di ordine m_j , esiste un disco bucato $B_{\epsilon_j}^*(z_j)$ in cui $f(z) = (z - z_j)^{-m_j} \psi(z)$, dove ψ è una funzione olomorfa in tale intorno, con $\psi(z_j) \neq 0$ e non nulla in tutto l'intorno bucato. Dunque, per $z \in B_{\epsilon_j}^*(z_j)$ si ha $f'(z) = -m_j(z - z_j)^{-m_j-1} \psi(z) + (z - z_j)^{-m_j} \psi'(z)$, da cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m_j}{z - z_j} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)};$$

allora, analogamente al caso precedente, z_j è un polo di ordine 1 per g , con residuo $-m_j$.

Sostituendo le espressioni trovate in (2.46) si trova la (2.45). \square

Osserviamo che se una funzione è olomorfa in tutto il piano complesso tranne che in un numero finito di poli, allora il numero totale di zeri

è uguale al numero totale di poli. Infatti, considerando la formula dell'indicatore logaritmico lungo una circonferenza di raggio r , essa fornisce la differenza fra gli zeri e i poli interni alla curva; quindi, se la curva è percorsa in senso antiorario allora entrano in gioco i poli e gli zeri all'interno del cerchio (in $|z| < r$), mentre se la curva è percorsa in senso orario allora entrano in gioco i poli e gli zeri all'esterno del cerchio (in $|z| > r$) e la somma dei due integrali è sempre nulla.

Da questo fatto consegue immediatamente un'altra dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra: infatti segue da quanto detto che un polinomio $P(z)$ di grado n ammette sempre n radici, essendo una funzione olomorfa in tutto \mathbb{C} tranne che all'infinito, dove ha un polo di ordine n . Se γ_R è la circonferenza di centro l'origine e raggio R sufficientemente grande da contenere al suo interno tutte le radici di $P(z)$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = n.$$

Osservazione 2.3. *Il motivo per cui questo teorema è detto "dell'indicatore logaritmico" è che, in un intorno di un punto z non singolare per la funzione $\frac{f'}{f}$, essa rappresenta la derivata di una determinazione della funzione $\log f(z)$.*

*Il teorema è chiamato anche **Principio dell'argomento**, e può essere formulato in termini di indici di avvolgimento di cicli omologhi a zero rispetto agli zeri e ai poli (si veda [1], pag. 152).⁵³ Se si considera l'integrale lungo una curva γ semplice che congiunge il punto z_0 col punto z e se non ci sono né singolarità né zeri di f lungo γ , allora*

$$\int_{\gamma(z_0, z)} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \log f(z) - \log f(z_0).$$

⁵³ Data una funzione meromorfa in D con zeri w_j e poli z_k , allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j n(\gamma, w_j) - \sum_k n(\gamma, z_k)$$

per ogni curva chiusa γ omologa a zero in D e non passante per gli zeri e i poli di f . Nella formula gli zeri e i poli sono contati rispetto al loro ordine e le somme sono finite

Se il cammino è chiuso, $\log |f(z)|$, dopo un giro completo, assume nuovamente il valore iniziale, mentre l'argomento, in generale, non è detto che sia lo stesso perché potremmo essere finiti in un'altra determinazione del logaritmo.

Un'altra conseguenza della formula dei residui, che è corollario della formula dell'indicatore logaritmico, è il seguente:

Teorema 2.44 (di Rouché). *Siano $f, g \in \mathcal{O}(D)$ tali che $|g(z)| < |f(z)| \forall z \in \gamma$, dove γ è una curva di Jordan con interno contenuto in D . Allora le funzioni f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri nell'interno di γ , contati ciascuno secondo la rispettiva molteplicità.⁵⁴*

Il teorema afferma che la variazione dell'argomento di $f + g$ lungo γ è la stessa di quella di f .

Dimostrazione. Poiché $|g(z)| < |f(z)|$ su γ , f non ha zeri su γ , e dunque gli zeri di f nell'interno di γ sono in numero finito (si segua lo stesso ragionamento usato precedentemente); tali zeri costituiscono i punti di singolarità della funzione $h = \frac{g}{f}$, e sono tutti poli per essa.

Siano n il numero di zeri di f nell'interno di γ ed m il numero degli zeri di $f + g$, entrambi contati con la loro molteplicità. Sono allora verificate le ipotesi del teorema dell'indicatore logaritmico, dal quale si ottiene (omettiamo la dipendenza delle funzioni da z)

$$\begin{aligned} n - m &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'}{f} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f' + g'}{f + g} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'[f + g] - f[f' + g']}{f[f + g]} dz. \end{aligned}$$

⁵⁴Esiste anche una versione più forte del teorema, detta versione simmetrica del Teorema di Rouché.

In alcuni testi (per esempio in [1]) l'ipotesi su f e g è espressa come $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, che significa che, lungo γ , si ha $\left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1$.

Allora si ha⁵⁵

$$\begin{aligned} n - m &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'f(1+h) - ff' - fg'}{f^2(1+h)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'h - g'}{f(1+h)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} -\frac{h'}{1+h} dz. \end{aligned}$$

Poiché $|h(z)| < 1$ su γ , si può sviluppare in serie la funzione $\frac{1}{1+h} = \sum_{j=0}^{\infty} (-h)^j$ e, dato che la serie converge uniformemente su γ , per il teorema di integrazione per serie si ha

$$n - m = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \oint_{\gamma} h' h^j dz.$$

Inoltre per ogni j si ha $\oint_{\gamma} h' h^j dz = \frac{1}{j+1} \oint_{\gamma} \frac{d}{dz} h^{j+1} dz$, dove l'ultimo integrale è nullo essendo l'integrale di una funzione che ammette primitiva lungo una curva chiusa.

Allora segue che $n = m$. □

Per dare un'interpretazione geometrica di questo teorema bisogna riformularlo in maniera un po' diversa: posto $h = f + g$, risulta che h è olomorfa, dato che f e g lo sono. Allora la condizione $|g| < |f|$ su γ può essere espressa come $|h - f| < |f|$, da cui segue che f e h hanno lo stesso numero di zeri all'interno di γ . La condizione $|h(z) - f(z)| < |f(z)| \forall z \in \gamma$ esprime il fatto che la distanza di $f(z)$ dall'origine è maggiore della distanza $|h(z) - f(z)| \forall z \in \gamma$. Allora risulta che la curva ottenuta come composizione della funzione f con la curva γ ($f(\gamma(t))$) è sempre

⁵⁵Forniamo anche un'altra dimostrazione, probabilmente più usata: dobbiamo mostrare che $m = n$, cioè che $\oint_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \oint_{\gamma} \frac{f' + g'}{f + g} dz$. Posto $q = 1 + \frac{g}{f}$, osserviamo che $q(z)$ è una funzione meromorfa con singolarità, eventualmente eliminabili, in corrispondenza degli zeri di f . Dato che $\frac{f' + g'}{f + g} = \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q}$, per arrivare alla conclusione basterà far vedere che $\oint_{\gamma} \frac{q'}{q} dz$. Dall'ipotesi $|g(z)| < |f(z)|$ su γ , cioè da $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ segue che $|q(z) - 1| < 1 \forall z \in \gamma$ e, quindi, che $|q(z)| < 2$; i valori di $q(z)$ sulla curva γ sono dunque contenuti nel disco aperto di centro 1 e raggio 1 $B_1(1)$ che, a sua volta, è contenuto in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (insieme di definizione della determinazione principale $\text{Log } z$ del logaritmo di z). Allora $\text{Log } q(z)$ è una primitiva di $\frac{q'(z)}{q(z)}$, ed essendo γ una curva semplice e chiusa si ha $\oint_{\gamma} \frac{q'(z)}{q(z)} dz = 0$.

più vicina alla curva ottenuta come composizione di h con γ ($h(\gamma(t))$) che all'origine.

Intuitivamente, ciò significa che queste curve devono “avvolgersi” attorno all'origine lo stesso numero di volte; quindi, dato che per il principio dell'argomento (espresso in termini di indici di γ attorno a zeri e poli della funzione) il numero di volte con cui tali curve girano attorno a zero corrisponde al numero di zeri delle rispettive funzioni, si ottiene che queste ultime hanno lo stesso numero di zeri.

Detto in maniera informale: se il padrone deve portare il proprio cane al guinzaglio attorno a un albero facendogli fare più e più giri facendo in modo che la lunghezza del guinzaglio sia sempre inferiore alla propria distanza dall'albero, allora il cane farà attorno all'albero tanti giri quanti ne farà il suo padrone.

Osservazione 2.4. *Dal teorema di Rouché segue in maniera ancora più immediata della precedente la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra: dato il polinomio $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, siano $f(z) = a_nz^n$, $g(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}$; allora esiste un $R > 0$ (sufficientemente grande) tale che $|g(z)| < |f(z)|$ per $|z| = R$. Dunque, applicando il teorema di Rouché alla circonferenza centrata nell'origine e di raggio R , risulta che f e $f + g = P$ hanno lo stesso numero di zeri: f ne ha n (banalmente), dunque altrettanti ne ha P , e il numero di zeri rimane lo stesso anche facendo tendere $R \rightarrow +\infty$.*

Un aspetto positivo di questa dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra è che, oltre che essere immediata, essa mostra non solo che un polinomio di grado maggiore o uguale a 1 deve avere almeno una radice, ma anche che il numero delle radici (contate con la dovuta molteplicità) deve essere uguale al suo grado.

Il Teorema di Rouché viene usato solitamente per posizionare gli zeri di una funzione olomorfa: la si scrive come somma di due funzioni, una delle quali sia più semplice e che tenda a infinito più velocemente dell'altra quando $|z| \rightarrow \infty$. Allora si possono localizzare gli zeri osser-

vando soltanto la “parte dominante”, come mostra il seguente

Esempio 2.67. *Le radici del polinomio $P(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ stanno nella corona circolare $\{z : 1 < |z| < 2\}$: posto $f(z) = 12$ e $g(z) = z^7 - 5z^3$, osserviamo che su $|z| = 1$ si ha $|g(z)| \leq 6 < 12 = |f(z)|$, per il Teorema di Rouché $f(z) + g(z)$ non ha zeri nell'insieme $\{z : |z| < 1\}$.*

Sia, ora, $f(z) = z^7$ e $g(z) = -5z^3 + 12$; dato che $|g(z)| \leq 52 < 2^7 = 128 = |f(z)|$ su $|z| = 2$, sempre per il Teorema di Rouché $f(z) + g(z) = P(z)$ ha tutti gli zeri in $\{z : |z| < 2\}$.

Presentiamo ora un altro importante risultato utile per i calcoli:

Teorema 2.45 (Lemma di Jordan). *Sia f olomorfa nel semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$ ad eccezione, eventualmente, di un numero finito di punti singolari isolati. Sia $M(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|$, dove γ_R è la semicirconferenza definita da $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$. Se $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$ allora, per ogni $\lambda > 0$ si ha*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (2.47)$$

Dimostrazione. La dimostrazione⁵⁶ si basa sulla disuguaglianza

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}, \quad R > 0,$$

che segue dalla disuguaglianza di Jordan.⁵⁷ Dal fatto che $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$

per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ segue che, se $R > 0$,

$$e^{-R \sin \theta} \leq e^{-R \frac{2}{\pi} \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Quindi, integrando nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = -\frac{\pi}{2R} \left[e^{-\frac{2}{\pi} R\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}),$$

⁵⁶Si veda, per esempio, [5], pag. 272.

⁵⁷La disuguaglianza di Jordan è la seguente: $\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta \leq \theta \forall 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. In questo caso viene usata la disuguaglianza a sinistra.

da cui

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2R}.$$

Dato che la funzione $y = \sin \theta$ (nel piano (y, θ)) è simmetrica rispetto alla retta verticale $\theta = \frac{\pi}{2}$, segue che

$$\int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}. \quad (2.48)$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i\lambda Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta;$$

poiché $|f(Re^{i\theta})| \leq M(R)$ e

$$e^{i\lambda Re^{i\theta}} = e^{i\lambda R(\cos \theta + i \sin \theta)} = e^{i\lambda R \cos \theta} e^{-\lambda R \sin \theta},$$

essendo $|e^{i\lambda Re^{i\theta}}| = e^{-\lambda R \sin \theta}$, si ha, usando la (2.48)

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M(R) R \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta < M(R) \frac{\pi}{\lambda},$$

che tende a zero per $R \rightarrow \infty$. □

Sottolineiamo l'importanza del segno di λ : infatti, se $\lambda < 0$, la (2.47) viene sostituita da

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

(γ_R viene cioè percorsa in senso orario).

Il Lemma di Jordan ha anche altre⁵⁸ formulazioni (in realtà basta richiedere che f sia continua su γ_R), che possono risultare più utili di

⁵⁸Si veda, per esempio, [2], dove si considera f definita in un settore circolare contenuto nel semipiano superiore e si richiede che f sia infinitesima all'infinito.

In [4], invece, si ha il seguente enunciato: *Sia f continua nell'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Im}(z) > -a\}$, dove $R_0, a \in \mathbb{R}$, $a, R_0 > 0$, tale che $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, e sia γ_R l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio $R > R_0$ contenuto in \bar{A} . Allora, $\forall \lambda > 0$ si ha $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$. Osserviamo che, in questo caso $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda \operatorname{Im}(z)} \rightarrow 0$ per $z \rightarrow \infty$.*

Cambiando la posizione del semipiano si ottiene una versione diversa del Lemma di Jordan: *Sia f continua nell'insieme $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Re}(z) > -a\}$, dove $R_0, a \in \mathbb{R}$, con $R_0, a > 0$, tale che $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, e sia γ_R l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio $R > R_0$ contenuto in \bar{B} . Allora, $\forall \lambda > 0$ si ha $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{-\lambda z} dz = 0$. Osserviamo che, in questo caso $|e^{-\lambda z}| = e^{-\lambda \operatorname{Re}(z)} \rightarrow 0$ per $z \rightarrow \infty$.*

altre a seconda dei casi; esso viene chiamato anche *Lemma del grande cerchio* per distinguerlo dal *Lemma del piccolo cerchio*.⁵⁹ Esempi di applicazione di questo lemma si possono trovare nel seguito.

2.17 Calcolo di integrali col metodo dei residui

Il Teorema dei residui è utile per calcolare alcuni integrali, tra cui integrali impropri.

Per *metodo dei residui* si intende l'utilizzo della teoria delle funzioni olomorfe, con le sue relazioni col calcolo differenziale, con gli sviluppi in serie e col calcolo integrale, dove uno degli ingredienti chiave è il Teorema dei residui.

Calcolo di integrali in \mathbb{C} .

Il principale utilizzo del metodo dei residui è per calcolare integrali lungo curve nel piano complesso di funzioni complesse di variabili complesse.

Esempio 2.68. *Calcoliamo i seguenti integrali in \mathbb{C} col metodo dei residui:*

$$\int_{\gamma_2(0)} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} \quad e \quad \int_{\gamma_1(i)} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}.$$

La funzione integranda ha due poli di ordine 2 in $z = -i, i$; essi sono entrambi interni alla circonferenza di centro zero e raggio 1, quindi

$$\int_{\gamma_2(0)} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = 2\pi i \left[\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + 1)^2}; i \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + 1)^2}; -i \right) \right]$$

si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + 1)^2}; i \right) &= \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \cdot \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right]_{z=i} \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z + i)^2} \right]_{z=i} = \left[\frac{-2}{(z + i)^3} \right]_{z=i} = \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

⁵⁹Si veda, per esempio, [3], pag. 317.

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}; -i\right) &= \frac{d}{dz}\left[(z+i)^2 \cdot \frac{1}{(z^2+1)^2}\right]_{|z=-i} \\ &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-i)^2}\right]_{|z=-i} = \left[\frac{-2}{(z-i)^3}\right]_{|z=i} = -\frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{\gamma_2(0)} \frac{dz}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \left[\frac{1}{4i} - \frac{1}{4i}\right] = 0;$$

ci si poteva aspettare questo risultato, dato che la funzione integranda ha un numero finito di punti singolari (e la curva chiusa in questione li contiene tutti) e, per $|z| \rightarrow \infty$, si comporta come $\frac{1}{|z|^4}$.

La circonferenza di centro i e raggio 1, invece, contiene solo la singolarità $z = i$, quindi

$$\int_{\gamma_1(i)} \frac{dz}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 2.69. Calcoliamo

$$\oint_{\gamma^+} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz, \quad \gamma(t) = \frac{i}{2} + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Le singolarità della funzione integranda sono $z = 0, -i, i$. I punti interni a γ sono tali che $\left|z - \frac{i}{2}\right| \leq 1$, cioè sono dentro il cerchio di centro $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ e raggio 1. Quindi $-i = (0, -1)$ è esterno a γ , mentre gli altri due punti (che sono entrambi poli semplici) sono interni. Si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} = 1 = \operatorname{Res}(f; 0)$$

e

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) \cdot \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin z}{z^2(z+i)} = -\frac{\sin i}{2i} = \operatorname{Res}(f; i).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma^+} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f; 0) + \operatorname{Res}(f; i)] \\ &= 2\pi i \left(1 - \frac{\sin i}{2i}\right) = 2\pi i \left(1 + \frac{e^{-1} - e}{4}\right). \end{aligned}$$

Esempio 2.70. *Calcoliamo*

$$\oint_{\gamma^+} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2(z+4i)} dz, \quad \gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Osserviamo che, applicando la regola di de l'Hôpital, si trova

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2(z+4i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+4i) + 2z(z-1)(z+4i) + z(z-1)^2} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}; \end{aligned}$$

dunque il punto $z = 0$ è una singolarità eliminabile della funzione integranda.

Inoltre

$$\lim_{z \rightarrow -4i} (z+4i) \cdot \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2(z+4i)} = \frac{e^{-4i} - 1}{4i(15+8i)},$$

quindi il punto $z = -4i$ è un polo di ordine 1, ma esso si trova all'esterno della curva γ , essendo $|-4i| = 4$, mentre γ è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2.

Il punto $z = 1$, invece, è un polo di ordine 2:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \cdot \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2(z+4i)} = \frac{e-1}{1+4i} = \frac{e-1+i(4-4e)}{17};$$

usando la formula per il calcolo dei residui di un polo di ordine maggiore di 1 si trova

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{e^z - 1}{z(z+4i)} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z^2 + (4i-2)z - 4i) + 2z + 4i}{z^2(z+4i)^2} = \frac{2-e+4i}{(1+4i)^2}. \end{aligned}$$

Quindi il valore dell'integrale dato è $2\pi i \frac{2-e+4i}{(1+4i)^2}$.

Calcolo di integrali in \mathbb{R} .

Il metodo dei residui permette di calcolare anche integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, dove il prolungamento analitico di $f(x)$ in \mathbb{C} è la funzione $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, analitica in \mathbb{C} tranne in un numero finito di punti z_1, \dots, z_n , non appartenenti alla retta reale, in ciascuno dei quali f ha un polo (semplice o multiplo).

Precisamente, vale il seguente risultato:

Teorema 2.46 (Integrale di funzioni razionali). *Sia $f(x)$ una funzione razionale della forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di grado n e m rispettivamente, con $m \geq n + 2$, e dove $Q(x)$ non ha zeri reali. Allora si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}(f(z); z_k),$$

dove $f(z)$ è il prolungamento analitico di $f(x)$ in \mathbb{C} e dove la somma è estesa ai poli z_k di $f(z)$ che si trovano nel semipiano superiore.

Oppure, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) < 0} \text{Res}(f(z); z_k),$$

dove la somma è estesa ai poli z_k di $f(z)$ che si trovano nel semipiano inferiore.

Il teorema precedente è una conseguenza del teorema dei residui e della stima dell'integrale di una funzione $f(z)$, lungo una semicirconfenza centrata nell'origine, con l'ipotesi che $|f(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^n}\right)$, con $n \geq 2$, per $z \rightarrow \infty$ (o, analogamente, che $|f(z)| = o\left(\frac{1}{|z|}\right)$ per $z \rightarrow \infty$): in tal caso infatti segue che $\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$ usando, nella stima dell'integrale, il fatto che il perimetro di una circonferenza è proporzionale al raggio (e come già osservato in precedenza).

Per capire meglio consideriamo il seguente

Esempio 2.71. *Si voglia calcolare ora*

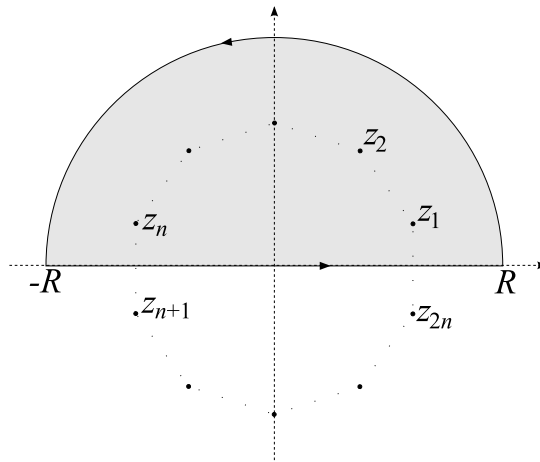
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La funzione integranda può essere estesa al campo complesso:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$$

che è definita e olomorfa su \mathbb{C} ad eccezione degli zeri del denominatore. Gli zeri del denominatore sono singolarità isolate per f , in quanto essi

sono le radici $2n$ -esime complesse di -1 . Dato $R > 1$, definiamo l'arco di circonferenza $\Gamma(R) = \{|z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$. Allora, applicando la formula dei residui sul semicerchio indicato nella figura sottostante,



si ha

$$\int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^{2n}} dx + \int_{\Gamma(R)} \frac{1}{1+z^{2n}} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j). \quad (2.49)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma(R)} \frac{1}{1+z^{2n}} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{iR e^{i\theta}}{1+R^{2n} e^{2in\theta}} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^{2n} e^{2in\theta}|} d\theta \leq \max_{\Gamma(R)} \frac{1}{|1+R^{2n} e^{2in\theta}|} \cdot R\pi = \frac{R\pi}{R^{2n}+1} \end{aligned}$$

e quest'ultima quantità tende a 0 per $R \rightarrow +\infty$. Dunque, passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ nella (2.49) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j),$$

e il calcolo dell'integrale assegnato è ricondotto al calcolo dei residui di f nelle radici $2n$ -esime di -1 .

Come caso particolare si può prendere $n = 2$.⁶⁰ consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Indicando con γ_R la semicirconferenza di raggio R nel semipiano superiore e osservando che la funzione $\frac{1}{1+z^4}$ ha, all'interno della curva chiusa $\gamma_R \cup [-R, R]$, le due singularità isolate $\frac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$ (che non sono altro che le due radici quarte di -1 , z_0 e z_1), per il teorema dei residui si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz + \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx \\ &= 2\pi i \left[\operatorname{Res} \left(f; \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{Res} \left(f; \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Stimiamo il secondo integrale che compare a primo membro (osserviamo che, da $|z^4| \leq |z^4 + 1| + 1$, segue che $|1+z^4| \geq R^4 - 1$ se $z \in \gamma_R$ con $R > 1$):

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \leq \frac{1}{R^4 - 1} \pi R \quad \rightarrow_{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(f; \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{1+z^4} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) \left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) \left(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{4(-1+i)}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\operatorname{Res} \left(f; \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4(1-i)}.$$

⁶⁰Si veda, per esempio, [3], pag. 305.

Per il calcolo si può anche considerare $f(z)$ come funzione razionale con $P(z) = 1$ e $Q(z) = 1 + z^4$, da cui

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{z_0}{4z_0^4} = \frac{z_0}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

e, analogamente,

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = -\frac{z_1}{4} = -\frac{-1+i}{4\sqrt{2}}.$$

Quindi, in definitiva,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{-1-i+1-i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Teorema 2.47 (Integrale del tipo “trasformata di Fourier”). *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in \mathbb{C} tranne che in un numero finito di singolarità isolate (poli). Se $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|z|=R} |f(z)| = 0$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\lambda x} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}(g(z); z_k) & \text{se } \lambda > 0 \\ -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) < 0} \operatorname{Res}(g(z); z_k) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

dove $g(z) = f(z)e^{i\lambda z}$ è il prolungamento analitico di $f(x)e^{i\lambda x}$ in \mathbb{C} e dove la somma è estesa ai poli z_k di $f(z)$ ⁶¹ che si trovano nel semipiano superiore se $\lambda > 0$ e ai poli che si trovano nel semipiano inferiore se $\lambda < 0$.

La dimostrazione segue un ragionamento simile a quello usato nell'Esempio 2.71: si considera l'integrale della funzione $g(z)$ lungo la curva chiusa Γ del semipiano superiore formata dall'unione del tratto di asse reale da $-R$ a R e dalla semicirconferenza Γ_R centrata nell'origine e percorsa in verso antiorario (se la semicirconferenza si trova nel semipiano inferiore di \mathbb{C} , allora verrà percorsa in senso orario e salterà fuori un segno negativo), con R abbastanza grande in modo che Γ contenga tutte le singolarità di $f(z)$; per il Teorema dei residui tale integrale è

⁶¹La funzione $e^{i\lambda z}$ non ha singolarità in \mathbb{C} .

uguale alla quantità $2\pi i$ moltiplicata per la somma dei residui di $g(z)$ relativi alle singolarità del semipiano superiore. Quando R tende a ∞ l'integrale $\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z} dz$ tende a zero se $\lambda > 0$ e l'integrale lungo il tratto di asse x $\int_{-R}^R f(x)e^{i\lambda x} dx$ tende proprio all'integrale in \mathbb{R} che si vuole calcolare.

Esempio 2.72. *Calcoliamo l'integrale*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$$

Osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx.$$

Essendo $\left| \frac{\sin x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$, la funzione $\frac{\sin x}{x^2 + 1}$ è integrabile in \mathbb{R} e,

essendo, dispari, segue che $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = 0$. Dato che la funzione

$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ha due poli semplici (in $\pm i$) ed è infinitesima all'infinito, possiamo applicare una delle due formule forniteci dal teorema precedente; posto $g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(g(z); i) = 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{2z} \right]_{z=i} = \frac{\pi}{e}.$$

Integrali generalizzati che richiedono di “aggirare” un polo.

Col teorema dei residui si possono calcolare anche integrali del tipo fornito nell'esempio che segue.

Dimostriamo prima il

Teorema 2.48 (Lemma di Jordan (del piccolo⁶² cerchio)). *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa con un polo del primo ordine in z_0 e sia γ_r un*

⁶²Si veda anche la formulazione data in [2] a pag. 182.

arco di circonferenza di centro z_0 e raggio r piccolo: $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [\theta_1, \theta_2]$. Allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f(z); z_0).$$

Dimostrazione. Essendo z_0 un polo semplice per $f(z)$, si ha

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + g(z),$$

dove $g(z)$ è olomorfa in un intorno di z_0 e a_{-1} è il residuo di f in z_0 .

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{a_{-1}}{re^{it}} + g(z_0 + re^{it}) \right] rie^{it} dt \\ &= ia_{-1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} dt + ri \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(z_0 + re^{it}) e^{it} dt. \end{aligned}$$

Si ha (indicando con M il max di $g(z)$ lungo l'arco di circonferenza γ_r)

$$\left| ri \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(z_0 + re^{it}) e^{it} dt \right| \leq r \int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(z_0 + re^{it})| dt \leq Mr(\theta_2 - \theta_1),$$

che tende a zero quando $r \rightarrow 0$. Quindi, dall'espressione precedente segue la tesi per $r \rightarrow 0$. \square

Esempio 2.73. *Dimostriamo che*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Ricordiamo che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è l'esempio notevole di funzione integrabile in senso generalizzato ma non integrabile secondo Lebesgue in \mathbb{R}^+ .

L'idea è sempre quella di usare il Teorema dei residui e il Lemma di Jordan. Infatti, osserviamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

e che $\frac{\cos x}{x}$ è una funzione dispari, e dunque il suo integrale in un intervallo simmetrico è nullo. La funzione $\frac{e^{ix}}{x}$, però, non è integrabile

in un intorno di $x = 0$ (a differenza della funzione $\frac{\sin x}{x}$), e quindi l'aver introdotto la funzione $\frac{e^{ix}}{x}$ ha introdotto una singolarità nell'origine, che si deve cercare di di "evitare".

Consideriamo allora la funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$; essa ha un polo semplice in $z = 0$, quindi non possiamo usare una curva chiusa come quelle usate nei due esempi precedenti, che passava per l'origine degli assi; quello che si cerca di fare in questo caso è "evitare" il polo: quindi integriamo $f(z)$ lungo la curva chiusa $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_R \cup \gamma_3 \cup \gamma_r$, dove γ_1 è il tratto di retta reale da r a R , $0 < r < R$ (con r si indica sempre il raggio "piccolo" e con R il raggio "grande"), γ_R è la semicirconferenza superiore di raggio R percorsa in verso antiorario, γ_3 è il tratto di retta reale da $-R$ a r e γ_r la semicirconferenza superiore di raggio r percorsa in verso antiorario. Per il Teorema di Cauchy si ha $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, cioè

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (2.50)$$

Osserviamo che

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{r < |x| < R} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{r < |x| < R} \frac{\sin x}{x} dx,$$

dove il primo integrale a secondo membro è nullo per simmetria. Quindi, osservando che quando $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \rightarrow i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

e

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx \rightarrow i \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx,$$

segue che

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx \rightarrow i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (2.51)$$

Inoltre, dal Lemma di Jordan segue che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \quad (2.52)$$

Infine, dal Lemma di Jordan del piccolo cerchio si trova

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = i(\pi - 0) \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}; 0 \right) = i\pi \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} = i\pi. \quad (2.53)$$

Dunque, usando le (2.51), (2.52), (2.53) e passando al limite per $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$, dalla (2.50) si ricava

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - i\pi = 0,$$

cioé

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Un'altra tipologia di integrale risolvibile mediante metodi simili ai precedenti è un'integrale "tipo trasformata di Fourier della gaussiana".⁶³

Esempio 2.74. Dato l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R},$$

esprimiamo l'esponente dell'integranda completando il quadrato

$$\begin{aligned} -\alpha x^2 + \beta x &= -\alpha \left[x^2 - \frac{\beta}{\alpha} x \right] = -\alpha \left[x^2 - \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right] \\ &= -\alpha \left[\left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right] = -\alpha \left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha} \end{aligned}$$

e operiamo la sostituzione $t = \sqrt{\alpha} \left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)$; l'integrale assegnato diventa

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha \left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}} dx = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{\alpha}},$$

da cui si ricava (ricordando il valore dell'integrale di Gauss)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

⁶³Si vedano le dispense riguardanti le trasformazioni di Fourier e Laplace.

Il precedente risultato vale anche per $\beta \in \mathbb{C}$ ($\beta = \sigma + i\omega$): completando il quadrato come prima e ponendo $z = \sqrt{\alpha} \left(x - \frac{\beta}{2\alpha} \right)$, si trova

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz,$$

dove Γ è la retta orizzontale $z = t - i\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Mostriamo che $\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$. Integriamo la funzione e^{-z^2} lungo il rettangolo di vertici $(\pm R, 0)$ e $(\pm R, -\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})$. Per il Teorema di Cauchy tale integrale lungo questa curva chiusa è nullo, cioè si ha

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^{-\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}} e^{-(R+iy)^2} dy \\ & + \int_R^{-R} e^{-(x-i\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dx + i \int_{-\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}}^0 e^{-(-R+iy)^2} dy = 0. \end{aligned}$$

Stimiamo il secondo e il quarto termine che compaiono nell'espressione precedente: dato che $|e^{-(\pm R+iy)^2}| = e^{y^2 - R^2}$, essi tendono a zero quando $R \rightarrow \infty$. Quindi si ricava, facendo tendere R a ∞ , che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dx;$$

il primo membro è uguale a $\sqrt{\pi}$ e il secondo è proprio l'integrale di e^{-z^2} lungo la curva Γ .⁶⁴

Quindi la formula trovata prima vale anche per $\beta \in \mathbb{C}$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{C};$$

se β è immaginario puro ($\beta = i\omega$) la precedente relazione diventa

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2 + i\omega x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0, \omega \in \mathbb{R}$$

e, in particolare, se $\beta = -i\omega$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-i\omega x} dx = \mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0, \omega \in \mathbb{R},$$

⁶⁴Si veda anche il calcolo della trasformata di Fourier della gaussiana nelle dispense sulla trasformazione di Fourier.

dove \mathcal{F} indica la trasformazione di Fourier.

Osservazione 2.5. Più in generale, il teorema dei residui si può usare per calcolare integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} F(\sin t, \cos t) dt,$$

dove la funzione integranda è continua in $[0, 2\pi]$ (il caso più comune è quello in cui f è una funzione razionale). Basta, infatti, esprimere le funzioni trigonometriche mediante l'esponenziale complesso: con la sostituzione $z = e^{it}$ si riesce a ricondursi all'integrale, sulla circonferenza unitaria $|z| = 1$, di una funzione $f(z)$; se f è olomorfa nel cerchio tranne che, eventualmente, in un numero finito di punti singolari isolati, allora si può usare il teorema dei residui.

Integrali di Frénel.

Nello studio di alcuni fenomeni di diffrazione compaiono le *funzioni di Frénel*

$$C(x) = c_1 \int_0^x \cos t^2 dt \quad \text{e} \quad S(x) = c_2 \int_0^x \sin t^2 dt,$$

dette anche *coseno* e *seno integrale*. Esse sono funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ dove le costanti c_1 e c_2 , per il loro significato, vanno scelte in modo tale che si abbia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1.$$

Occorre dunque calcolare i due integrali generalizzati

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \sin t^2 dt.$$

Esempio 2.75. Consideriamo la funzione (intera) $f(z) = e^{iz^2}$ e calcoliamo l'integrale $\int_\gamma f(z) dz$, dove γ è la curva chiusa unione delle curve γ_1 (tratto di asse reale dall'origine al punto R), γ_2 (arco di circonferenza centrata in O , di raggio R e ampiezza $\frac{\pi}{4}$) e γ_3 (tratto della bisettrice del primo quadrante dal punto di intersezione con la circonferenza di

raggio R all'origine). L'integrale lungo Γ di $f(z)$ è nullo per il Teorema di Cauchy:

$$\int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = 0. \quad (2.54)$$

Si ha

$$\int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R (\cos x^2 + i \sin x^2) dx;$$

parametizziamo γ_2 con $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$; si ha

$$\int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2it}} Rie^{it} dt$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{iR^2 [\cos(2t) + i \sin(2t)]} \right| dt \\ &= R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{iR^2 \cos(2t) - R^2 \sin(2t)} \right| dt = R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin(2t)} dt; \end{aligned}$$

posto $2t = \tau$ si trova

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin \tau} d\tau < \frac{R}{2} \cdot \frac{\pi}{2R^2} = \frac{\pi}{4R} \rightarrow 0$$

per $R \rightarrow +\infty$, dove nell'ultima disuguaglianza è stata usata la stima (2.48) trovata nella dimostrazione del Lemma di Jordan.

Infine, dopo aver parametrizzato γ_3 con $z = Re^{i\frac{\pi}{4}}(1-t)$, $t \in [0, 1]$, calcoliamo

$$\int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = - \int_0^1 e^{iR^2 e^{i\frac{\pi}{2}}(1-t)^2} Re^{i\frac{\pi}{4}} dt = -Re^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^1 e^{-R^2(1-t)^2} dt;$$

posto $R(1-t) = \tau$, si ha

$$\int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-\tau^2} d\tau \rightarrow -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-\tau^2} d\tau = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

per $R \rightarrow +\infty$.

Quindi, sostituendo i risultati trovati nella (2.54) e passando al limite per $R \rightarrow \infty$ si ricava

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx + i \int_0^\infty \sin x^2 dx - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,$$

cioé

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

da cui, uguagliando parti reale e immaginaria:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad e \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Esempio 2.76. *Calcoliamo*

$$\oint_{\partial+Q} e^{\frac{1}{z^2-iz}} dz,$$

dove Q è il quadrato definito da $\{z \in \mathbb{C} : |Re z| \leq 2, |Im z| \leq 2\}$.

Dal teorema dei residui si ha

$$\oint_{\partial+Q} e^{\frac{1}{z^2-iz}} dz = 2\pi i [Res(e^{\frac{1}{z^2-iz}}; 0) + Res(e^{\frac{1}{z^2-iz}}; i)].$$

Poiché, dal teorema della somma dei residui si ha

$$Res(e^{\frac{1}{z^2-iz}}; 0) + Res(e^{\frac{1}{z^2-iz}}; i) + Res(e^{\frac{1}{z^2-iz}}; \infty) = 0,$$

basterà calcolare il residuo del punto all'infinito:

$$Res(e^{\frac{1}{z^2-iz}}; \infty) = Res\left(-\frac{1}{w^2} e^{\frac{w^2}{1-iw}}; 0\right).$$

Si ha

$$\lim_{w \rightarrow 0} w^2 \frac{1}{w^2} e^{\frac{w^2}{1-iw}} = 1,$$

quindi $w = 0$ è un polo del secondo ordine per la funzione $-\frac{1}{w^2} e^{\frac{w^2}{1-iw}}$.

Quindi

$$\begin{aligned} Res\left(-\frac{1}{w^2} e^{\frac{w^2}{1-iw}}; 0\right) &= -\lim_{w \rightarrow 0} \frac{d}{dw} e^{\frac{w^2}{1-iw}} \\ &= -\lim_{w \rightarrow 0} \frac{2w(1-iw) + iw^2}{(1-iw)^2} e^{\frac{w^2}{1-iw}} = 0, \end{aligned}$$

da cui segue che $\oint_{\partial+Q} e^{\frac{1}{z^2-iz}} dz$.

Osserviamo che, in questo caso, è stato conveniente ricondursi al calcolo del residuo all'infinito, dato che, essendo $z = 0$ e $z = i$ delle

singolarità essenziali per la funzione integranda, il calcolo dei singoli residui in questi punti sarebbe stato più laborioso.

Bibliografia

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Third Edition, McGraw-Hill (1979).
- [2] G.C. Barozzi, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli (2011).
- [3] M. Bramanti, *Metodi di Analisi Matematica per l'Ingegneria*, Esculapio (2017).
- [4] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi matematica*, McGraw-Hill (2011).
- [5] J.W. Brown, R.V. Churchill, *Complex variables and applications*. Eighth Edition, McGraw-Hill (2009).
- [6] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica 2*, Liguori (2016).
- [7] R.E. Greene, S.G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, Third Edition, AMS (2006).
- [8] E. Hille, *Analytic function theory, Vol. 1*, Chelsea Publishing Company, N.Y. (1959).
- [9] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 2*, Seconda Edizione Zanichelli (2016).
- [10] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third Edition, McGraw-Hill (1987).