

Approssimazione di funzioni con polinomi

Polinomio di Taylor

Data una funzione f derivabile n volte in x_0 , esiste uno e un solo polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$ con la proprietà che

$$T_n(x_0) = f(x_0), T'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

(cioè T_n ha un contatto di ordine n con f in x_0)

Tale polinomio si chiama polinomio di Taylor ed è dato da

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Polinomio di Taylor di grado n generato da f con centro in x_0

Approssimazione di funzioni con polinomi

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Se $x_0=0$, $T_n(x)$ è detto polinomio di Mac Laurin di grado n .

$R_n(x)$ = errore che si commette quando si approssima $f(x)$ con $T_n(x)$:

Si ha:
$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

a) $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ per $x \rightarrow x_0$, Formula di Peano

cioè
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

b) Se f è derivabile $n+1$ volte in (a,b) escluso al più x_0 ,

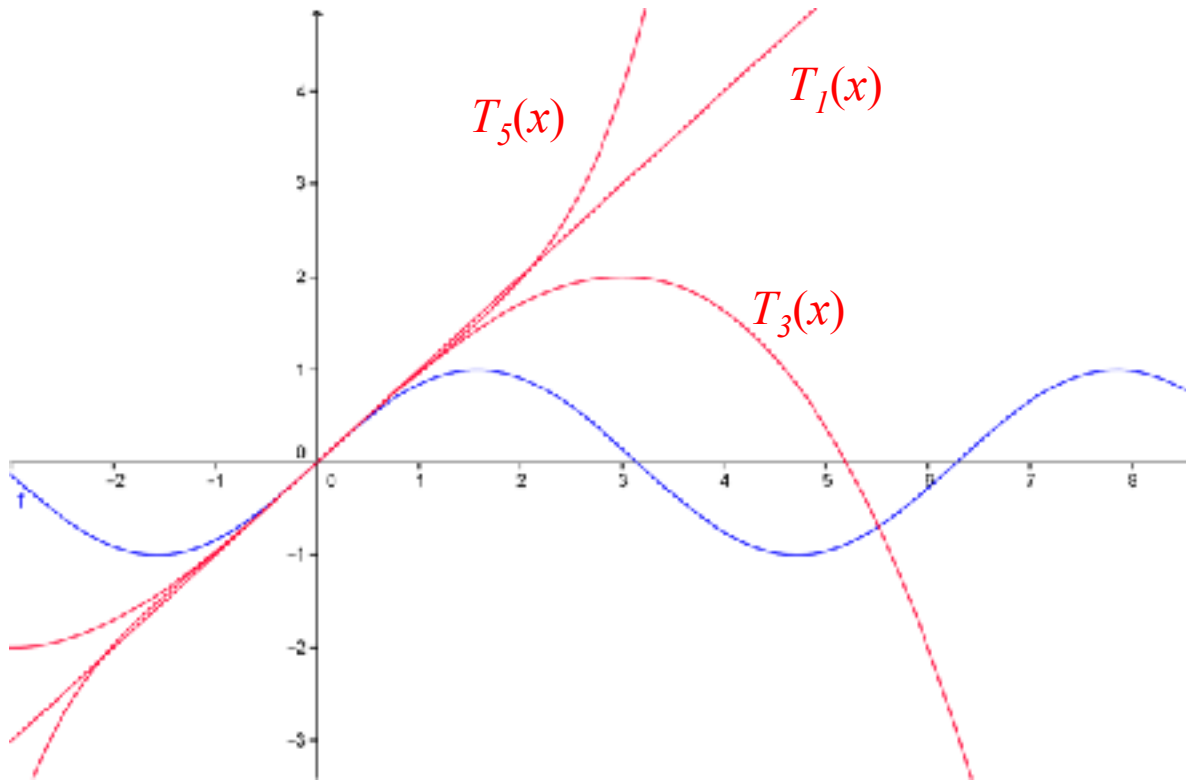
$\forall x \in (a, b), \exists c$ compreso tra x e x_0 :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{Formula di Lagrange}$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

Esempio.

$y = \sin x$ in $x=0$, $T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ solo potenze dispari



$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

Esempio

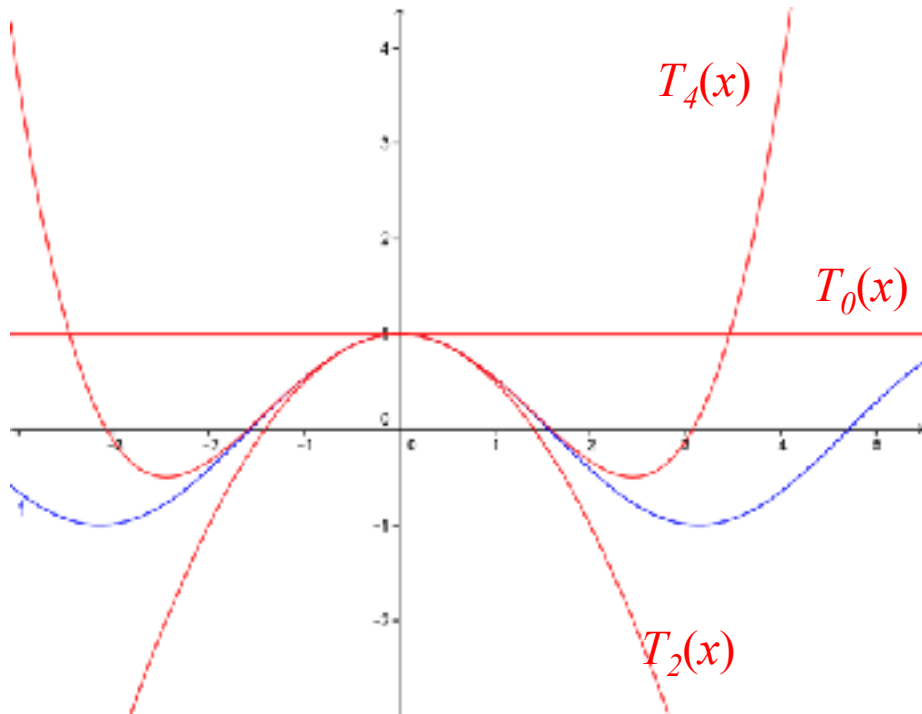
$y = \cos x$ in $x=0$

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ solo potenze pari}$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$



Approssimazione di funzioni con polinomi

Analogamente in $x_0=0$, si ottiene

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}$$

Approssimazione di funzioni con polinomi

Esercizio

Scrivere il polinomio di Mac Laurin di grado 2 che approssima $f(x)=\ln(1-3x)$

Uso della formula di Taylor e Mac Lauri nel calcolo dei limiti

Esercizio

Utilizzando la formula di Mac Laurin calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$$